Elementi di Misure Elettroniche
E. Silva - a.a. 2016/2017
Parte 1.2

Errori. Incertezza. Trattazione elementare.
Rappresentazione grafica.
Trattazione statistica.

v. 1.1

Riferimenti:

J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis", 2nd ed., University Science Book
Capp. 1, 2,3 (con esercizi)

R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer
Cap. 3 (con esercizi).

P. Fornasini "The Uncertainty in Physical Measurements", Springer
Cap. 1 (parr. 1.1, 1.2, 1.3, 1.6), Cap. 2, App. B

Incertezza: trattazione elementare

Incertezza

Ogni misurazione è *necessariamente* accompagnata da errori, imprecisioni, limitazioni degli strumenti e degli operatori.

Non è possibile associare un numero unico al misurando, ma un *intervallo* di valori.

TUTTAVIA questo intervallo può essere stimato, ed esprime l'***incertezza*** della misura.

L'incertezza è un parametro **quantitativo**.

Quando l'incertezza non è nota, non è possibile confrontare differenti misure!

Il risultato di una misurazione è *completo* **solo** quando comprende anche l'***incertezza***

Errori e incertezza

~~Linguaggio comune:~~
~~errore = sbaglio~~

Contesto scientifico e ingegneristico:
differenza fra il valore ("*vero*") μ e il valore misurato m: $e = |\mu - m|$

Attenzione! Suppone che un valore "vero" μ esista!

Difficoltà concettuale: l'esistenza necessaria di "errori" (a priori sconosciuti!) implica che il valore "vero" sia, in linea di principio, *sconosciuto*.

La formulazione corretta viene da una trattazione statistica (vedi oltre)

Esempio: stime da lettura di scale (1)

Figura da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

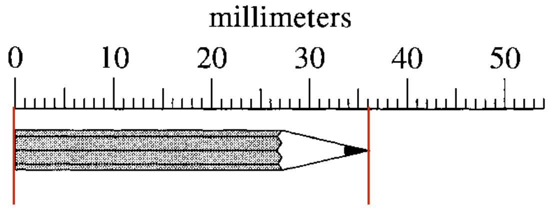


Figure 1.2. Measuring a length with a ruler.

ℓ ?

È ***ragionevole*** descrivere l'incertezza sul valore da fornire come "mezza divisione"

$\rightarrow 35.5 \text{ mm} \leq \ell \leq 36.5 \text{ mm}$

Esempio: stime da lettura di scale (2)

Figura da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

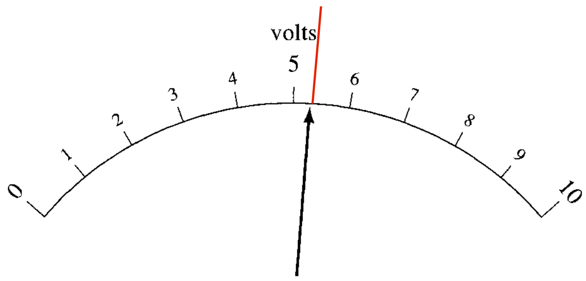


Figure 1.3. A reading on a voltmeter.

V ?

È ***ragionevole*** interpolare, ma *dipende dall'operatore*.
$\rightarrow 5.2 \text{ V} \leq V \leq 5.4 \text{ V}$

Esempio: stime da letture ripetute

Figura da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

Supponiamo di leggere più volte la corrente I che scorre in un ramo di un circuito. Otteniamo:
25 μa, 24 μA, 25 μA, 23 μA, 24 μA, 22 μA, 23 μA, 26 μA

È ***ragionevole*** assumere che
- la stima migliore sia la *media aritmetica* dei risultati,
- il valore corretto si trovi nell'intervallo compreso fra la minima e massima lettura

$\rightarrow$ 22 μA $\leq I \leq$ 26 μA
con
$I_{miglior\ stima}$ = 24 μA

Esempio: stime da letture ripetute

Figura da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

È ***ragionevole*** assumere che
- la stima migliore sia la *media aritmetica* dei risultati,
- il valore corretto si trovi nell'intervallo compreso fra la minima e massima lettura

$\rightarrow$ 22 μA $\leq I \leq$ 26 μA
con
$I_{miglior\ stima}$ = 24 μA

Attenzione! Le misurazioni sono state eseguite tutte *nelle stesse condizioni*?
(temperatura, alimentazione del circuito, funzionamento dello strumento...)

Errori

Errori casuali: variabili in maniera non prevedibile in misurazioni ripetute.
Se ci si aspetta che il valor medio di questi contributi casuali sia nullo, effettuare molte misure e mediarle ne riduce il peso.

Errori sistematici: in misurazioni ripetute rimangono costanti o variano in maniera prevedibile.
L'effetto può essere ridotto se se ne conosce l'origine (ad esempio, l'effetto dell'impedenza interna di un voltmetro sui valori di una misura può essere calcolato se si conosce l'impedenza del circuito fra i punti di misura).
Calibrazione e *offset* fanno parte degli effetti sistematici.
Errore di offset: la grandezza misurata è $m = m_0 + \mu$.
Errore di calibrazione: la grandezza misurata è $m = f(\mu)$.
Nei casi più semplici, $m = \beta\,\mu$ con $\beta \neq 1$.

... oltre ovviamente agli errori veri e propri: errori di lettura, errori di comunicazione,...

Incertezza

Definizione data dal *metodo* di stima dell'incertezza:

Incertezza di tipo A, u_A: stimata attraverso analisi statistica mediante misure ripetute.

Incertezza di tipo B, u_B: non può essere stimata attraverso misure ripetute. Ad esempio precedenti informazioni (datasheets, caratteristiche strumentali), osservazioni sperimentali,...

Una volta stimate le due tipologie di incertezza, l'incertezza complessiva andrà espressa come

$$u = \sqrt{u_a^2 + u_B^2}$$

Errori e Incertezza

Errore e incertezza hanno definizioni e *origini* diverse!

In particolare:

gli errori casuali	***non sono sovrapponibili***	all'incertezza di tipo A
gli errori sistematici	***non sono sovrapponibili***	all'incertezza di tipo B

L'incertezza è classificata in base alla *metodologia* utilizzata per stimarla.
Gli errori sono classificati in base alla loro "natura".

metodo scientifico → la definizione di incertezza è più soddisfacente!

Errori e Incertezza

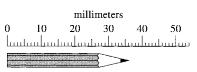


Figure 1.2. Measuring a length with a ruler.

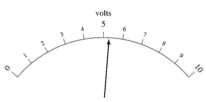


Figure 1.3. A reading on a voltmeter.

35.5 mm ≤ ℓ ≤ 36.5 mm

5.2 V ≤ V ≤ 5.4 V

22 μA ≤ I ≤ 26 μA

In questi esempi si fornisce il cosiddetto *errore massimo*.
Questo è ancora usato in alcuni contesti industriali.

Data una misura A completa di stima dell'intervallo (A_{min}, A_{max}) dove è *ragionevole* che si trovi il valore cercato, allora si esprime:

$$A \pm \delta A$$

dove $\delta A = (A_{max} - A_{min})/2$ è l'errore massimo.

Usiamo il concetto di errore massimo come proxy per l'incertezza ***(per adesso)***.

Cifre significative

Si sia eseguita una misura della grandezza α, risultante nel valore A completo di stima dell'incertezza δA

$$\alpha = A \pm \delta A$$

L'incertezza ***sperimentale*** va arrotondata a **una** cifra significativa (esempio 1) a meno che tale operazione non dia una significativa perdita di informazione sull'incertezza stessa (esempio 2).

Esempio 1. Si misura una ddp $V_0 = 6.386$ V con una incertezza stimata $\delta V = 0.056$ V. il risultato sarà espresso come (6.39 ± 0.06) V. Il risultato è dato con tre cifre significative.

Esempio 2. Si misura una resistenza $R_c = 3347.5\ \Omega$ con una incertezza stimata $\delta\Omega = 1.4\ \Omega$. il risultato sarà espresso come (3347.5 ± 1.4) V. Il risultato è dato comunque con cinque cifre significative.

regola empirica: se l'incertezza sperimentale ha la prima cifra significativa pari a 1 o 2, ha senso esprimerla con due cifre.

Regole di scrittura

Usualmente si scrive l'unità di misura una sola volta:

$$R_c = (3347.5 \pm 1.4)\ \Omega$$

e non $R_c = 3347.5\ \Omega \pm 1.4\ \Omega$

In casi in cui si usi la notazione esponenziale, la potenza di 10 si esprime alla fine:

$$q = (3.22 \pm 0.06) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Regole di calcolo dell'incertezza

L'incertezza (e il valore dato) vanno calcolati mantenendo almeno una cifra significativa in più rispetto alle cifre signficative del risultato finale.
Non è scorretto mantenere nei calcoli intermedi più cifre.
È scorretto esprimerle in un valore finale!

Discrepanza

discrepanza: differenza fra due valori misurati della stessa quantità

Vengono fornite alcune misure di una stessa grandezza
attraverso procedure diverse.
Esse forniscono i risultati:

$x_1 \pm \delta x_1$

$x_2 \pm \delta x_2$

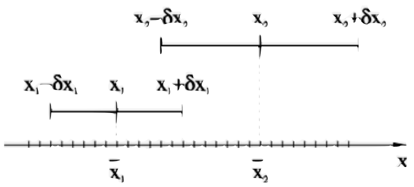
$x_3 \pm \delta x_3$

...

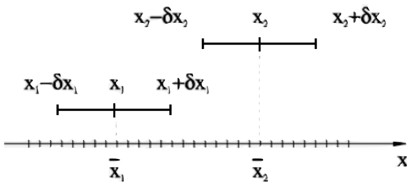
con $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ (discrepanza)

non è detto che quando fra due misure vi sia discrepanza, essa sia *signficativa*.

Discrepanza



Le misure non sono significativamente diverse, essendo le bande di incertezza sovrapposte.

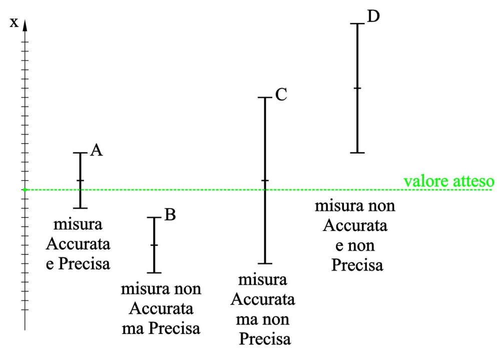


Le misure non sono consistenti.

Accuratezza e precisione

Accuratezza: caratteristica metrologica che indica quanto bene una misura si avvicina al "valore atteso" .

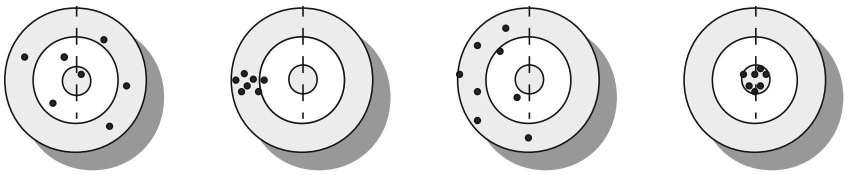
Precisione: caratteristica metrologica che indica la dispersione dei dati intorno ad un valore.



Accuratezza e precisione

Un'analogia

Il tiratore è stato



Accurato, non preciso | Preciso, non accurato | Né accurato, né preciso | Accurato e preciso

Confronto di una relazione con un grafico

Attestare o meno la rispondenza a leggi note, verificare le specifiche...

Senza riportare incertezza.
Conforme?

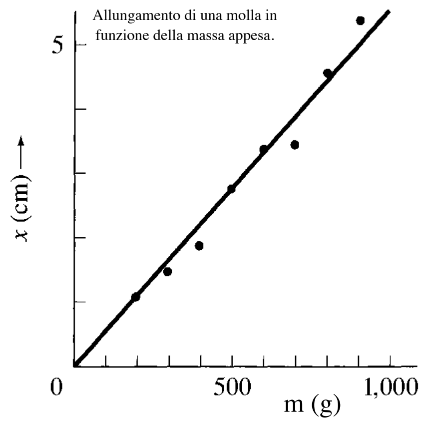


Figura da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

Confronto di una relazione con un grafico

Attestare o meno la rispondenza a leggi note, verificare le specifiche...

Con incertezza.
Conforme.

N.B. Incertezza sulla massa appesa trascurabile

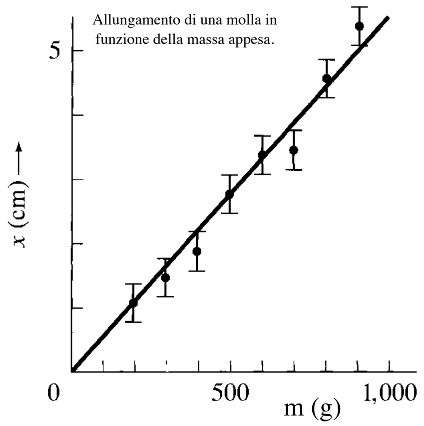


Figura da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

Confronto di una relazione con un grafico

Attestare o meno la rispondenza a leggi note, verificare le specifiche...

Con incertezza.
Non conforme.

N.B. Incertezza sulla massa appesa trascurabile

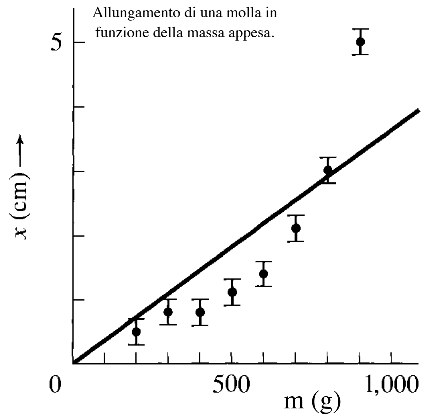


Figura da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Misure con incertezze in grafico

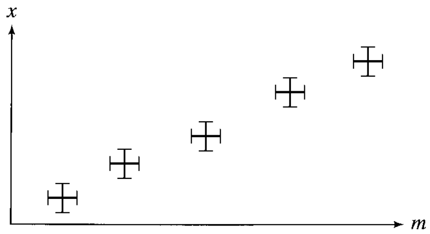


Figure 2.6. Measurements that have uncertainties in both variables can be shown by crosses made up of one error bar for each variable.

Figura da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Rappresentazione in grafico: linearizzazione

Per verificare la rispondenza a una legge o specifica, o per identificare dipendenze particolari, è spesso opportuno riportare in grafico le relazioni *linearizzate*.

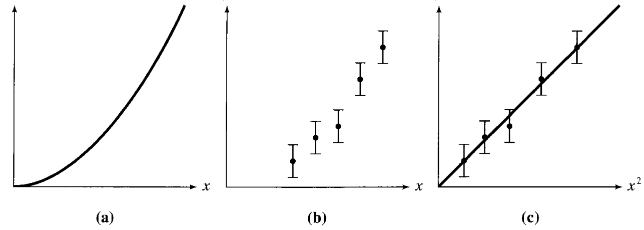


Figure 2.7. **(a)** If y is proportional to x^2, a graph of y against x should be a parabola with this general shape. **(b)** A plot of y against x for a set of measured values is hard to check visually for fit with a parabola. **(c)** On the other hand, a plot of y against x^2 should be a straight line through the origin, which is easy to check. (In the case shown, we see easily that the points *do* fit a straight line through the origin.)

Se $y = x^\alpha$, è immediato linearizzare la relazione riportando y in funzione di x^α e non x.

Figura da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

Rappresentazione in grafico: linearizzazione

Per verificare la rispondenza a una legge o specifica, o per identificare dipendenze particolari, è spesso opportuno riportare in grafico le relazioni *linearizzate*.

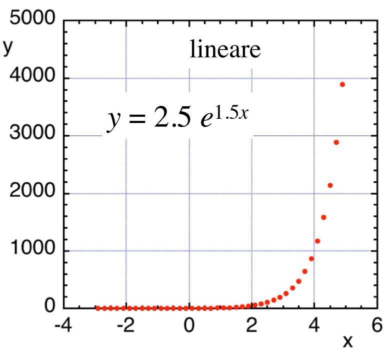
Esempi di largo uso:

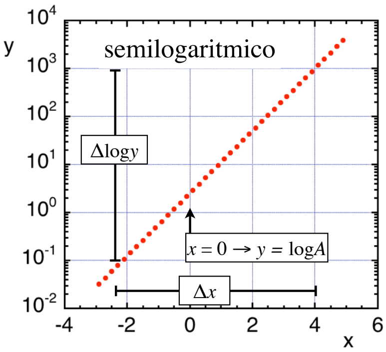
$y = A\,e^{kx} \rightarrow \ln y = \ln A + kx$.
Grafico: ascissa x, ordinata $\ln y$
Intercetta $\rightarrow A$, coefficiente angolare $\rightarrow k$.

$y = ax + bx^3 \rightarrow y/x = a + bx^2$
Grafico: ascissa y/x, ordinata x^2.
Intercetta $\rightarrow a$, coefficiente angolare $\rightarrow b$.

Grafico semilogaritmico

$y = A\,e^{kx} \rightarrow \ln y = \ln A + kx$
Solitamente i software forniscono i grafici logaritmici in base 10:
$y = A\,e^{kx} \rightarrow \log y = \log A + kx \log e$
Intercetta $\rightarrow A$, coefficiente angolare $\rightarrow k \log e$

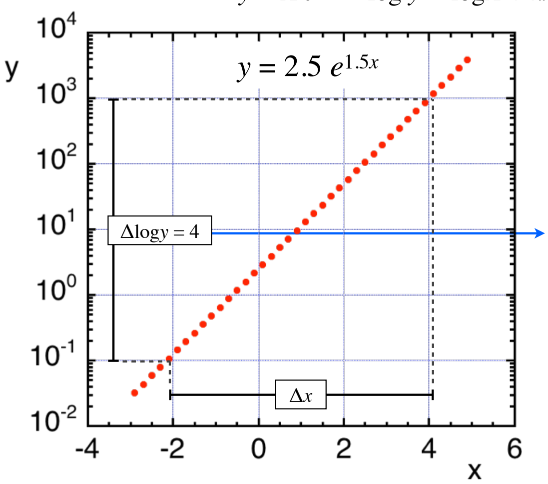




coefficiente angolare: $\dfrac{\Delta \log y}{\Delta x} = k \log e$

Grafico semilogaritmico

$y = A\,e^{kx} \rightarrow \log y = \log A + kx \log e$



coefficiente angolare:

$$\frac{\Delta \log y}{\Delta x} = k \log e$$

Δlogy = log10^3–log10^{-1} = 3+1 = 4

Δlogy = num. decadi!

Grafico bilogaritmico

Si usa per le leggi di potenza:

$y = A\,x^{\alpha}$

$\downarrow$

$\log y = \log A + \alpha \log x$

Coefficiente angolare

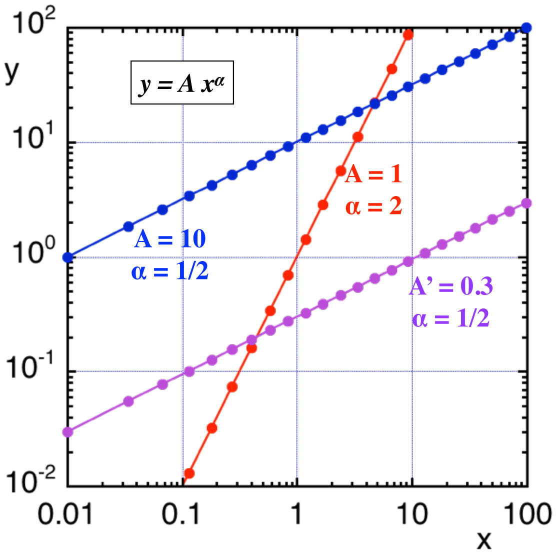
$\downarrow$

α

Stesso α, diverso A

$\downarrow$

traslazione



Esempio: caratteristica di un termistore

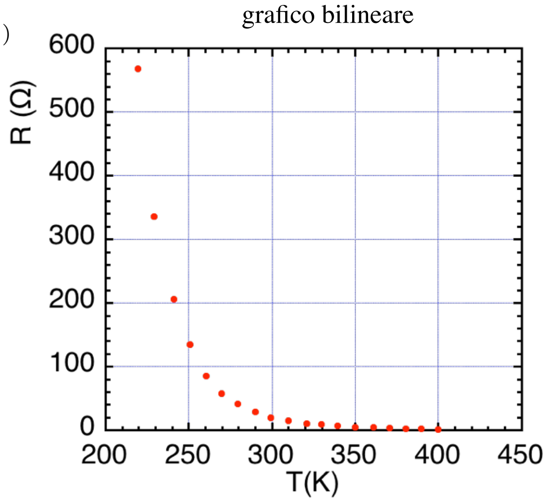
Sensore di temperatura.

Caratteristica:

$R(T) = R(T_0)\mathrm{e}^{B\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$

Determinare B dai dati?

grafico bilineare



Esempio: caratteristica di un termistore

Sensore di temperatura.

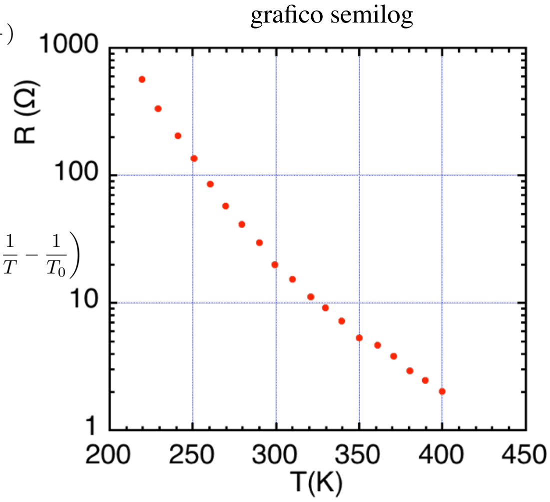
Caratteristica:

$R(T) = R(T_0)\mathrm{e}^{B\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$

Determinare B dai dati?

$$\log R(T) = \log R(T_0) + (\log \mathrm{e})B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)$$

grafico semilog



Esempio: caratteristica di un termistore

Sensore di temperatura.

Caratteristica:

$$R(T) = R(T_0)\mathrm{e}^{B\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$$

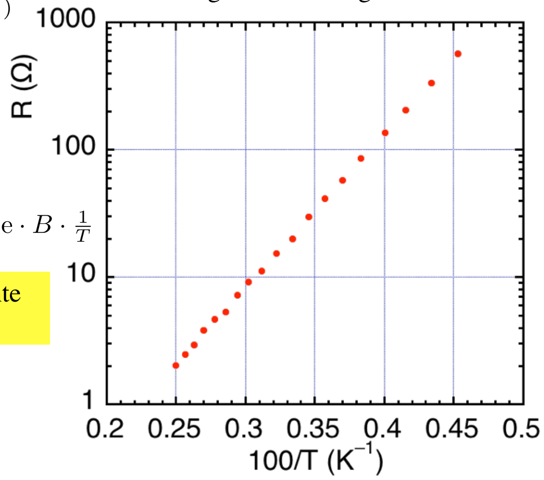
Determinare B dai dati?

$$\log R(T) = \left[\log R(T_0) - \frac{B}{T_0}\log \mathrm{e}\right] + \log \mathrm{e}\cdot B\cdot\frac{1}{T}$$

retta: B dato dal coefficiente angolare

Né R_0 né T_0 sono necessari

grafico semilog vs. 1/T



Esempio: caratteristica di un termistore

Sensore di temperatura.

Caratteristica:

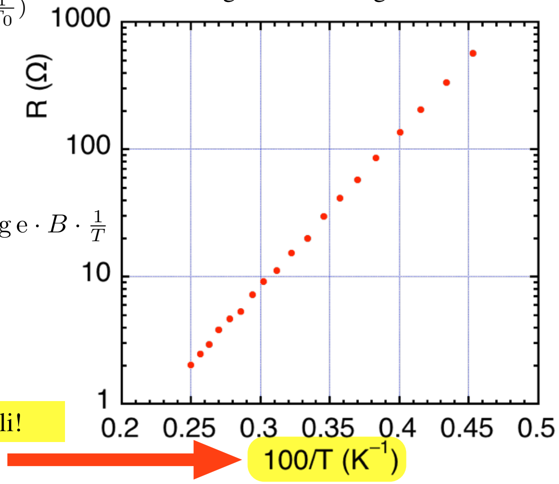
$$R(T) = R(T_0)\mathrm{e}^{B\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$$

Determinare B dai dati?

$$\log R(T) = \left[\log R(T_0) - \frac{B}{T_0}\log \mathrm{e}\right] + \log \mathrm{e}\cdot B\cdot\frac{1}{T}$$

In grafico: unità leggibili!

grafico semilog vs. 1/T



Esempio: caratteristica di un termistore

Sensore di temperatura.

Caratteristica:

$$R(T) = R(T_0)\mathrm{e}^{B\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$$

Determinare B dai dati?

$$\log R(T) = \left[\log R(T_0) - \frac{B}{T_0}\log \mathrm{e}\right] + \log \mathrm{e}\cdot B\cdot\frac{1}{T}$$

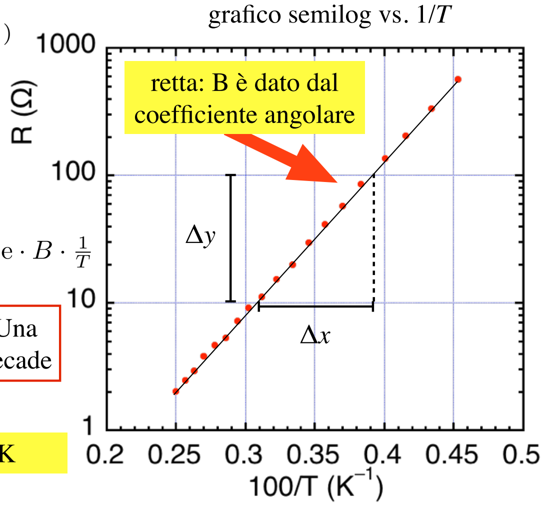
$\Delta y = \log 100 - \log 10 = 1$ Una decade

$\Delta x \approx 8.5\cdot 10^{-4}$ K^{-1}

log e ≃ 0.434

B = $\Delta y/(\log \mathrm{e}\ \Delta x)$ = 2710 K

grafico semilog vs. 1/T



Esempio: caratteristica di un termistore

Sensore di temperatura.

Caratteristica:

$$R(T) = R(T_0)\mathrm{e}^{B\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$$

Determinare B dai dati?

$$\log R(T) = \left[\log R(T_0) - \frac{B}{T_0}\log \mathrm{e}\right] + \log \mathrm{e}\cdot B \cdot \frac{1}{T}$$

$\Delta y = \log 100 - \log 10 = 1$ Una decade

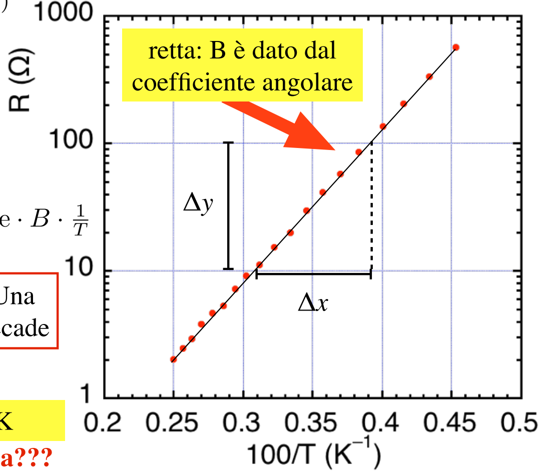
$\Delta x \approx 8.5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$

$\log \mathrm{e} \simeq 0.434$

$B = \Delta y/(\log \mathrm{e}\ \Delta x) = 2710\ \mathrm{K}$

incertezza???

grafico semilog vs. $1/T$



Esempio: caratteristica di un termistore

$$R(T) = R(T_0)\mathrm{e}^{B\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$$

Incertezza su R: $\delta R/R = \pm 5\%$

Incertezza su T: trascurabile

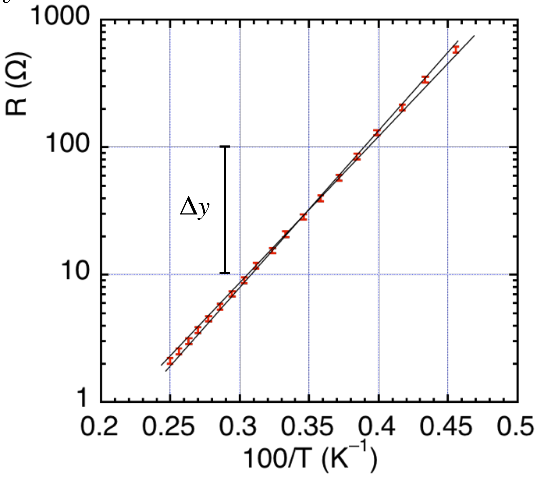
incertezza

Rette di massima e minima pendenza

$B_{max} = \Delta y/(\log \mathrm{e}\ \Delta x_{min})$

$B_{min} = \Delta y/(\log \mathrm{e}\ \Delta x_{max})$

grafico semilog vs. $1/T$



Esempio: caratteristica di un termistore

$$R(T) = R(T_0)\mathrm{e}^{B\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$$

Incertezza su R: $\delta R/R = \pm 5\%$

Incertezza su T: trascurabile

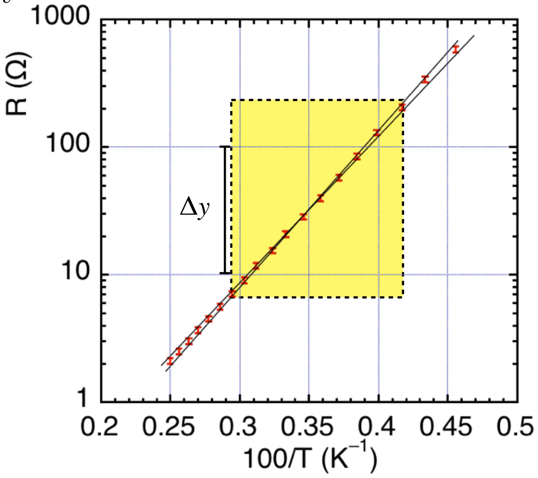
incertezza

Rette di massima e minima pendenza

$B_{max} = \Delta y/(\log \mathrm{e}\ \Delta x_{min})$

$B_{min} = \Delta y/(\log \mathrm{e}\ \Delta x_{max})$

grafico semilog vs. $1/T$



Esempio: caratteristica di un termistore

$R(T) = R(T_0)\mathrm{e}^{B(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0})}$

Incertezza su R: δR/R = ± 5%

Incertezza su T: trascurabile

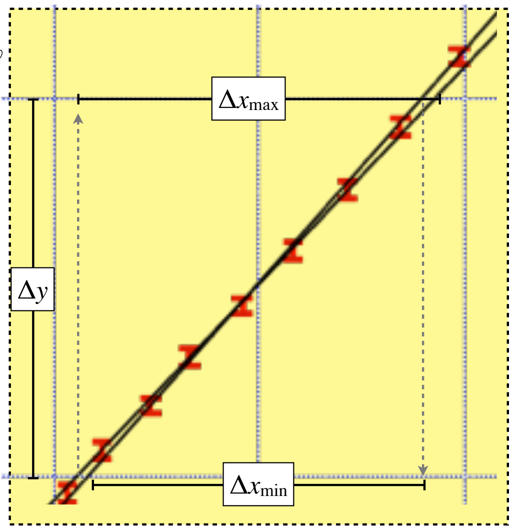
incertezza

Rette di massima e minima pendenza

$B_{max} = \Delta y/(\log \mathrm{e}\ \Delta x_{min})$
$B_{min} = \Delta y/(\log \mathrm{e}\ \Delta x_{max})$

⇩

$B = (2740 \pm 120)$ K



Incertezza di somme e differenze

regola provvisoria
(riguarda il "proxy", l'errore massimo)

Siano date le misure di due grandezze $x_1 \pm \delta x_1$, $x_2 \pm \delta x_2$ (ad es., le tensioni di due batterie), dove le incertezze rappresentano gli errori massimi.

Incertezza di $x_+ = x_1 + x_2$:

il valore massimo prevedibile sarà dato da
$(x_1 + \delta x_1) + (x_2 + \delta x_2) = (x_1 + x_2) + (\delta x_1 + \delta x_2)$
il valore minimo prevedibile sarà dato da
$(x_1 - \delta x_1) + (x_2 - \delta x_2) = (x_1 + x_2) - (\delta x_1 + \delta x_2)$

Incertezza di $x_- = x_1 - x_2$:

il valore massimo prevedibile sarà dato da
$(x_1 + \delta x_1) - (x_2 - \delta x_2) = (x_1 - x_2) + (\delta x_1 + \delta x_2)$
il valore minimo prevedibile sarà dato da
$(x_1 - \delta x_1) - (x_2 + \delta x_2) = (x_1 - x_2) - (\delta x_1 + \delta x_2)$

$$\boxed{\Rightarrow \delta(x_1 \pm x_2) \approx \delta(x_1) + \delta(x_2)}$$

questa regola sarà rivista alla luce della definizione statistica dell'incertezza

Incertezza relativa (o frazionaria).

regola provvisoria
(riguarda il "proxy", l'errore massimo)

Data le misura $x_0 \pm \delta x$, l'incertezza frazionaria (o relativa) è: $\dfrac{\delta x}{|x_0|}$

È una quantità *adimensionale*.

Rappresenta meglio di δx la "bontà" di una misura:
indica il valore percentuale dell'incertezza.

Esempio. Una misura di capacità fornisce $C_0 = (103 \pm 2)$ pF. L'incertezza frazionaria vale 2/103 = 0.019 → 0.02, ovvero 2%. Si può scrivere $C_0 = 103$ pF ± 2%

Sono tipicamente valori "piccoli": 10% → 0.1 $\quad \dfrac{\delta x}{|x_0|} \ll 1$

Incertezza di prodotti.

regola provvisoria
(riguarda il "proxy", l'errore massimo)

Siano date le misure di due grandezze $x_1 \pm \delta x_1$, $x_2 \pm \delta x_2$ (ad es., carica e ddp di un condensatore).
Conviene riscrivere le misure come $x_1\left(1 \pm \frac{\delta x_1}{|x_1|}\right),\ x_2\left(1 \pm \frac{\delta x_2}{|x_2|}\right)$

Incertezza di $x_\times = x_1 \cdot x_2$. Valore massimo prevedibile:

$$x_1\left(1+\frac{\delta x_1}{|x_1|}\right)\cdot x_2\left(1+\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right) = x_1x_2\left(1+\frac{\delta x_1}{|x_1|}+\frac{\delta x_2}{|x_2|}+\frac{\delta x_1}{|x_1|}\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right) \approx x_1x_2\left(1+\frac{\delta x_1}{|x_1|}+\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right)$$

Valore minimo prevedibile: ***piccole ⇒ secondo ordine***

$$x_1\left(1-\frac{\delta x_1}{|x_1|}\right)\cdot x_2\left(1-\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right) = x_1x_2\left(1-\frac{\delta x_1}{|x_1|}-\frac{\delta x_2}{|x_2|}+\frac{\delta x_1}{|x_1|}\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right) \approx x_1x_2\left(1-\frac{\delta x_1}{|x_1|}-\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\delta(x_1\cdot x_2)}{|x_1||x_2|} \approx \frac{\delta x_1}{|x_1|}+\frac{\delta x_2}{|x_2|}}$$

In un prodotto, le (piccole) incertezze frazionarie si sommano

questa regola sarà rivista alla luce della definizione statistica dell'incertezza

Incertezza di rapporti.

regola provvisoria
(riguarda il "proxy", l'errore massimo)

Siano date le misure di due grandezze $x_1 \pm \delta x_1$, $x_2 \pm \delta x_2$ (ad es., carica e ddp di un condensatore).
Conviene riscrivere le misure come $x_1\left(1 \pm \frac{\delta x_1}{|x_1|}\right),\ x_2\left(1 \pm \frac{\delta x_2}{|x_2|}\right)$

Incertezza di $x_\div = x_1 / x_2$.
Valore massimo prevedibile:

$$\frac{x_1\left(1+\frac{\delta x_1}{|x_1|}\right)}{x_2\left(1-\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right)} \approx \frac{x_1}{x_2}\left(1+\frac{\delta x_1}{|x_1|}+\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right)$$

Valore minimo prevedibile:

$$\frac{x_1\left(1-\frac{\delta x_1}{|x_1|}\right)}{x_2\left(1+\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right)} \approx \frac{x_1}{x_2}\left(1-\frac{\delta x_1}{|x_1|}-\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right)$$

Esercizio: dimostrare, usando $1/(1-\varepsilon) \approx 1+\varepsilon$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\delta(x_1/x_2)}{|x_1|/|x_2|} \approx \frac{\delta x_1}{|x_1|}+\frac{\delta x_2}{|x_2|}}$$

In un rapporto, le (piccole) incertezze frazionarie si sommano

questa regola sarà rivista alla luce della definizione statistica dell'incertezza

Incertezza per funzioni arbitrarie.

Sia $q = f(x)$. La misura è ottenuta dalla misura di x con incertezza δx.

Poiché: $\delta q = q(x_{best}+\delta x) - q(x_{best}) = \left.\frac{dq}{dx}\right|_{x_{best}} \delta x$ purché $\delta x \ll |x|$

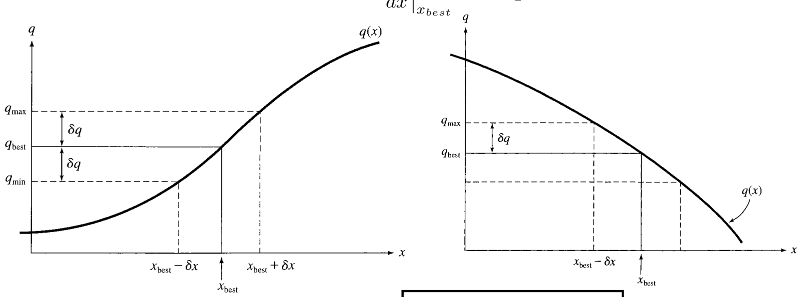


Figure da J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis"

Tenendo conto della possibile pendenza positiva o negativa di *f*:

$$\boxed{\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x_{best}} \delta x}$$

Incertezza per funzioni arbitrarie: potenze.

Sia $q = f(x)$. La misura è ottenuta dalla misura di x con incertezza δx.

$$\boxed{\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x_{best}} \delta x}$$ purché $\delta x \ll |x|$

Per funzioni potenza, $q = x^\alpha$: $\delta q = |\alpha| x^{\alpha-1} \delta x$

da cui: $\dfrac{\delta q}{|q|} = \dfrac{\delta q}{x^\alpha} = |\alpha| \dfrac{\delta x}{x}$

L'incertezza percentuale per una potenza x^α è α volte l'incertezza percentuale su x.

Incertezza per funzioni arbitrarie.

regola provvisoria

(riguarda il "proxy", l'errore massimo)

Sia $q = f(x_1, x_2, x_3 ...)$ una grandezza la cui misura è ottenuta da misure di N grandezze x_I, ciascuna con incertezza δx_i.

Come per una funzione di una variabile: $\delta q = \left|\dfrac{dq}{dx}\right|_{x_{best}} \delta x$

Si ottiene

$$\delta q = \sum_i \left|\frac{dq}{dx_i}\right|_{x_{i,best}} \delta x_i$$

questa regola sarà rivista alla luce della definizione statistica dell'incertezza

Esercizi.

Es. La ddp di un generatore può essere mantenuta costante a V = (7.00±0.05) V. In un resistore collegato al generatore scorre una corrente misurata di (35±5) μA. Determinare il valore della resistenza R del resistore e l'errore massimo.

Es. In un resistore di resistenza R = (47.0±0.1) kΩ scorre una corrente I = (1.5±0.1) mA. Determinare la potenza dissipata e l'errore massimo..

Es. Due resistori di uguale resistenza nominale R = 33 kΩ hanno tolleranze differenti: 20% e 5%, rispettivamente. Calcolare la resistenza serie e l'errore massimo.

Es. Due resistori di resistenza nominale R_1 = 220 Ω e R_2 = 47.5 Ω hanno tolleranze differenti: 5% e 1%, rispettivamente. Calcolare la resistenza serie e l'errore massimo.

Incertezze di somme e differenze: rivisitazione

se $q = x_1 \pm x_2$, dire $\delta(q) = \delta(x_1 \pm x_2) \approx \delta x_1 + \delta x_2$ implica che è *ugualmente probabile* sovrastimare/sottostimare contemporaneamente x_1 e x_2.

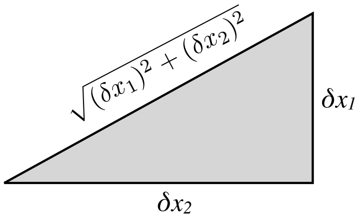
In molte occasioni ciò non è vero e porta a una sovrastima dell'incertezza (infatti si chiama *errore massimo*).

Se le misure sono *indipendenti* (**attenzione!**) e descrivibili con una distribuzione normale (gaussiana), allora si dimostra

$$\delta q = \sqrt{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2}$$

con

$$\delta q = \sqrt{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2} \leq \delta x_1 + \delta x_2$$



Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Incertezze di prodotti o rapporti: rivisitazione

Sia $q = x_1 \cdot x_2$, oppure $q = x_1/x_2$ considerare $\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x_1}{|x_1|} + \frac{\delta x_2}{|x_2|}$

equivale a dare come *ugualmente probabile* la contemporanea sovrastima/sottostima di x_1 e x_2.

Se le misure sono *indipendenti* (**attenzione!**) e descrivibili con una distribuzione normale (gaussiana), allora si dimostra

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x_1}{|x_1|}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_2}{|x_2|}\right)^2}$$

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Incertezza per funzioni arbitrarie: rivisitazione.

Sia $q = f(x_1, x_2, x_3 ...)$ una grandezza la cui misura è ottenuta da misure di N grandezze x_1, ciascuna con incertezza δx_i.

Se le misure sono *indipendenti* (**attenzione!**) e descrivibili con una distribuzione normale (gaussiana), allora si dimostra

$$\delta q = \sqrt{\sum_i \left(\frac{dq}{dx_i}\delta x_i\right)^2}$$

Incertezza: trattazione statistica

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Trattazione statistica

"Se le misure sono *indipendenti* (**attenzione!**) e descrivibili con una distribuzione normale (gaussiana), allora si dimostra..."

Siamo naturalmente portati a una trattazione statistica

Il risultato di una misurazione rimane sempre una stima del valore del misurando!

Incertezza di tipo A, u_A: stimata attraverso analisi statistica mediante misure ripetute.

Incertezza di tipo B, u_B: non può essere stimata attraverso misure ripetute. Ad esempio precedenti informazioni (datasheets, caratteristiche strumentali), osservazioni sperimentali,... *Tuttavia* viene ancora trattata con la statistica

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Incertezza: definizione della GUM(*)

"Parametro, associato al risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando"

Le cause responsabili dell'incertezza sono molteplici (*):

- *Definizione incompleta del misurando*.
- *Realizzazione imperfetta ella definizione del misurando* (implementazione pratica).
- *Campioni non rappresentativi*.
- *Conoscenza inadeguata degli effetti delle condizioni ambientali sulla misurazione, o misurazioni imperfette delle condizioni ambientali stesse*.
- *Lettura non corretta di strumenti analogici* (esempio tipico, errore di prallasse).
- *Risoluzione o soglia di discriminazione finite*.
- *Valori inessatti degli standard e dei riferimenti*.
- *Valori iniesatti delle costanti e di altri parametri proveneinti da sorgenti esterne, utilizzati negli algoritmi*.
- *Approssimazioni e assunzioni presenti nel metodo e nella procedura di misurazione*.
- *Variazioni nelle osservazioni ripetute del misurando in condizioni apparentemente identiche*.

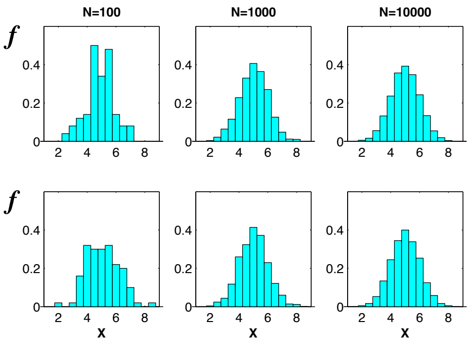
(*) "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", Bureau International des Poids et des Mesures (BIPM), http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html

Misura: il problema statistico

misura di X: ($x_b \pm \delta x$) u.m.

Come stimare il "valore atteso" e l'incertezza da misure ripetute?

La ripetizione delle misure permette l'accesso a un ***campione*** (finito, eventualmente molto numeroso) della (infinita) ***popolazione*** delle misure



***f*:** numero di misure/numero totale di misure

Figura adattata da P. Fornasini "The Uncertainty in Physical Measurements"

Numerose misure → dispersione (con sufficiente risoluzione)

Se le misurazioni sono caratterizzate da fluttuazioni casuali
↓
Al crescere del num. di misure N l'istogramma tende a una campana uguale per diverse serie di misure.

Stima di x_b ?
Stima di δx?

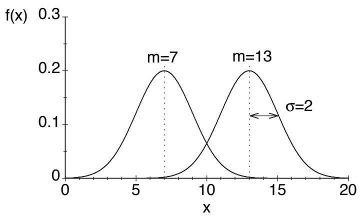
Distribuzione normale

Se gli istogrammi tendono a una curva a campana (sole fluttuazioni casuali), La funzione di distribuzione cui tende l'istogramma delle occorrenze al crescere di N è la ***distribuzione normale*** o ***curva di Gauss***, dove il valore medio (in corrispondenza del massimo della "campana") coincide con il valore atteso m e la larghezza σ è indice della dispersione delle misure (→ incertezza)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Normalizzazione della probabilità: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Probabilità che la misura di x cada fra a e b: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$



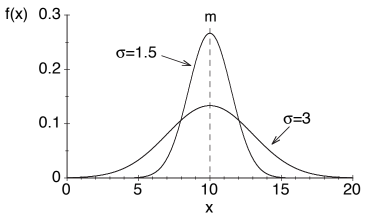


Figura adattata da P. Fornasini "The Uncertainty in Physical Measurements"

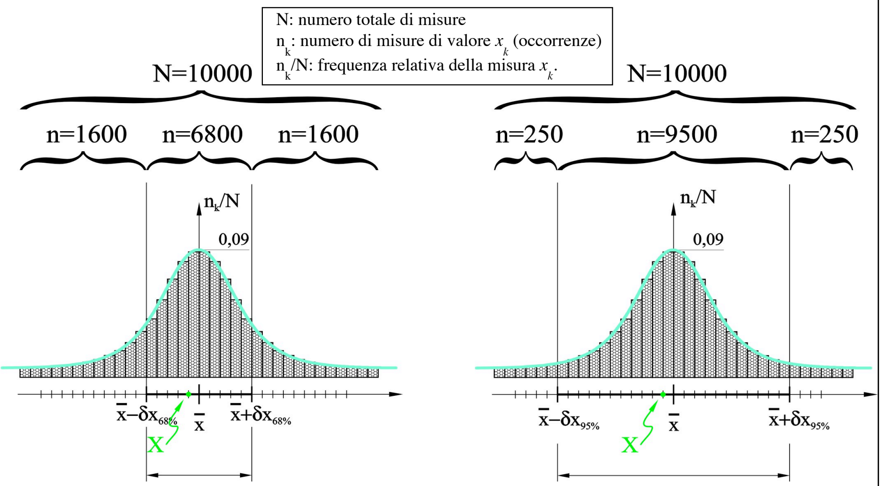
Teorema del Limite centrale

Se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_NX_N = \sum_{i=1}^{N} c_iX_i$ e se tutte le X_i sono caratterizzate da distribuzioni normali, anche la convoluzione risultante che rappresenta la distribuzione di Y è normale. Tuttavia, anche quando le distribuzioni delle X_i non sono tutte normali, la distribuzione di Y può sovente essere approssimata con una distribuzione normale grazie al Teorema del limite centrale. Questo stabilisce che la distribuzione di Y sarà *approssimativamente normale* con valore atteso $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_iE(X_i)$ e varianza $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\sigma^2(X_i)$, in cui $E(X_i)$ e $\sigma^2(X_i)$ sono rispettivamente il valore atteso e la varianza di X_i, se le X_i sono indipendenti e se $\sigma^2(Y)$ è molto più grande di ciascuna singola componente $c_i^2\sigma^2(X_i)$ originata da una X_i avente distribuzione non normale.

Ad esempio, anche se la grandezza x non è distribuita secondo una gaussiana, la sua media (ovvero $Y = (1/N)\sum x_i$) sarà distribuita approssimativamente come una gaussiana.

Questo giustifica la scelta degli stimatori per x_b , δx...

Livello e intervallo di confidenza

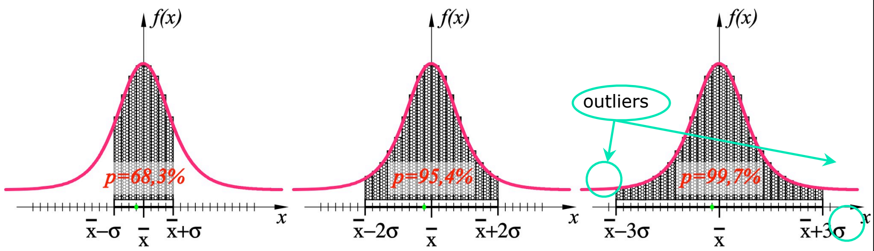


Intervallo di confidenza corrispondente
al livello di confidenza del 68%

Intervallo di confidenza corrispondente
al livello di confidenza del 95%

(calcolati sulla gaussiana limite)

Distribuzione normale (curva di Gauss)



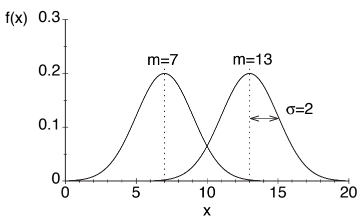
Per una gaussiana
la probabilità ***p*** che il valore atteso X sia...

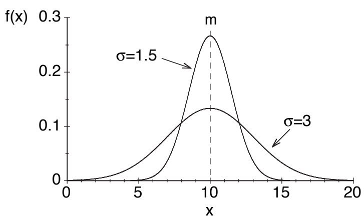
tra $\bar{x} - \sigma$ ***e*** $\bar{x} + \sigma$ $\Rightarrow$ ***p = 68,3%***

tra $\bar{x} - 2\sigma$ ***e*** $\bar{x} + 2\sigma$ $\Rightarrow$ ***p = 95,4%***

tra $\bar{x} - 3\sigma$ ***e*** $\bar{x} + 3\sigma$ $\Rightarrow$ ***p = 99,7%***

Distribuzione normale (curva di Gauss)





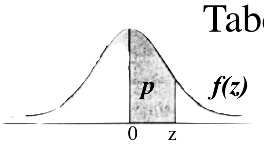
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2^2}}$$

$$z = \frac{x-m}{\sigma}$$

forma normale,
riportata nelle tabelle

Tabella Gaussiana standard



Es. Da una misurazione di resistenza si ha:

Valore medio: $R_m = 102\ \Omega$

Deviazione standard: $\sigma = 2\ \Omega$.

Nell'ipotesi che i valori siano distribuiti normalmente, qual'è la probabilità $p_{\pm\delta x}$ che ripetendo la misura essa si discosti dal valore medio di non più di $\delta R = \pm 3.5\ \Omega$?

$$z = \frac{R - R_m}{\sigma} = \frac{(R_m + \delta R) - R_m}{\sigma} =$$

$$= \frac{\delta R}{\sigma} = \boxed{1.75}$$

Tabella:

per metà intervallo: $p_{\delta x} = 0.4599$

$\Rightarrow$ $p_{\pm\delta x} = 2 \cdot p_{\delta x} = 0.9198$

vale a dire una probabilità di circa 92.0 %

Area p sottesa da f(z) in funzione di z — Second Decimal Place in z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	[illegible]	0.4686
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	[illegible]	0.4744	0.4750
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Misura: il problema statistico

Stima di x_b ?
Stima di δx?

Avendo conoscenza della distribuzione di probabilità $P(x)$ (ovvero dell'insieme di tutti gli -infiniti- risultati di una misura), gli stimatori sono

valore atteso: $x_b = \langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx$$

deviazione standard σ

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 P(x) dx$$

Ovviamente ***non*** si conosce la $P(x)$. Tuttavia la teoria della probabilità indica i migliori stimatori...

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Misura: il problema statistico

Stima di x_b ?
Stima di δx?

La teoria della probabilità indica i migliori stimatori
<u>a partire dal campione disponibile.</u>

x_b : media aritmetica $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

UNI CEI ENV 13005: miglior stima dei valori attesi

Miglior stima della varianza $\sigma^2(x)$: $s^2(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$

UNI CEI ENV 13005: s(x): scarto tipo

δx: deviazione standard della media semplice $s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x)}{N}$

incertezza standard: $u(\bar{x}) = s(\bar{x})$

Valutazione dell'incertezza di tipo A

Incertezza di tipo A, u_A: stimata attraverso analisi statistica mediante misure ripetute

misura di X: ($x_b \pm \delta x$) u.m.

Stima di x_b ? Stima di δx?

STATISTICA

x_b : media aritmetica $\rightarrow$ $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

δx: incertezza standard (scarto tipo) $\rightarrow$ $u(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$

UNI CEI ENV 13005: incertezza tipo di categoria A

Valutazione dell'incertezza di tipo B

Incertezza di tipo B, u_B: non può essere dedotta da misure ripetute, ma da altre informazioni
(dati ottenuti in condizioni simili, conoscenza del comportamento degli strumenti, specifiche tecniche, calibrazioni, dati di riferimento...)

Anche per ***u_B*** si tratta di una *stima* di una deviazione standard, la quale tuttavia non può essere ottenuta da un campione di numerose misure.

Trattandosi ancora di una grandezza statistica, l'***incertezza combinata*** sarà ottenuta in maniera consistente.

Incertezza combinata

Si debba dare la misura y di una grandezza Y, funzione di N grandezze X_i direttamente misurate, le cui misure siano x_i con incertezze u_i:

$Y = f(X_1, X_2,\ldots, X_N)$ $\Rightarrow$ $y = f(x_1, x_2,\ldots, x_N)$

Trattiamo le variabili y, x_i come variabili stocastiche di valore aspettato:

$\eta = \mathrm{E}(y)$

$\xi_i = \mathrm{E}(x_i)$

cerchiamo η.

Per piccole variazioni Δ_i (dove $\Delta_i = x_i - \xi_i$):

$$\eta = E(y) = E[f(\xi_i + \Delta_i)] \simeq E\left[f(\xi_i) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\Delta_i + o(\Delta_i^2 + \ldots)\right]$$

coefficienti di sensibilità
(nulla a che vedere con gli strumenti!)

Poiché (variabili stocastiche) $\mathrm{E}(\Delta_i) = 0$, si ha

$\eta = f(\xi_i)$ (purché $\Delta_i \ll \xi_i$)

Incertezza combinata - varianza

$$\sigma_y^2 = E[(y-\eta)^2] = E[(f(x_i)-f(\xi_i))^2] \simeq E\left[\sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\Delta_i\Delta_j\right] = \sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial f}{\partial \xi_j}E\left[\Delta_i\Delta_j\right]$$

definizione

Taylor

dove $E[\Delta_i\Delta_j] = E[(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)] = \mathrm{cov}(x_i, x_j)$ è la ***matrice di covarianza***

si ha subito $E[\Delta_i\Delta_i] = E[(x_i - \xi_i)^2] = \sigma_{xi}^2$

Gli elementi fuori diagonale $E[\Delta_i\Delta_j]$ danno una quantificazione della *correlazione* (dipendenza mutua) fra x_i e x_j.

Incertezza combinata - propagazione

Sostituendo ai valori esatti le *stime*, otteniamo le stime dei risultati di una misura indiretta, in cui la grandezza di interesse Y è funzione di più grandezze X_i.

$$y = f(\xi_i)$$

con incertezza combinata data dalla stima della varianza

$$u_c^2(y) = \sum_{i,j}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)$$

legge della propagazione delle incertezze

in assenza di correlazione $u(x_i, x_j) = 0$ ($i \neq j$), da cui:

$$u_c^2(y) = \sum_{i}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

somma delle incertezze in quadratura

Incertezza combinata - correlazione

$$y = f(\xi_i)$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i,j}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j) = \sum_{i}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + \boxed{2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)}$$

Il termine di covarianza appare solo se si ritiene che le misure possano essere correlate

Attenzione: la correlazione non riguarda le grandezze X_i, ma riguarda i valori (le misure!) x_i.

Ad esempio, una serie di misurazioni di resistenza effettuate con il medesimo strumento in un intervallo simile possono essere correlate (con correlazione positiva), se la principare sorgente di incertezza viene dalla calibrazione dello strumento. L'effetto è maggiore se le misure di resistenza sono fra loro vicine. Se al contrario si utilizzano strumenti diversi, con range diversi, di diverso tipo e produttore, è ragionevole assumere che i termini di covarianza siano nulli.

Nota: assenza di correlazione $\Rightarrow$ covarianza nulla
ma covarianza nulla $\not\Rightarrow$ assenza di correlazione

Normalizzazione: matrice di correlazione

$$y = f(\xi_i)$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i,j}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Per avere una stima quantitativa del grado di correlazione, si introduce una normalizzazione: con $-1 < \varrho_{ij} < 1$ matrice di correlazione, per cui:

$$\rho_{ij} = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_j) \rho_{ij}$$

Incertezza combinata: prodotti e rapporti

Quando $Y = cX_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\ldots X_N^{\alpha_N}$,
dove c e α_i sono esattamente conosciuti (es.: $P=RI^2$, $E = {}^1/_2CV^2$, ...), si può dimostrare che l'incertezza percentuale (relativa, frazionaria) vale:

$$\left[\frac{u_c(y)}{y}\right]^2 = \sum_{i}^{N} \left[\alpha_i \frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2 + \boxed{2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \rho_{ij}\alpha_i\alpha_j \frac{u(x_i)}{x_i}\frac{u(x_j)}{x_j}}$$

Solo in presenza di correlazione

In assenza di correlazione, si ottiene la regola della somma in quadratura

$$\frac{u_c(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i}^{N} \left[\alpha_i \frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2}$$

Incertezza ↔ deviazione standard

Identificazione $\delta x \leftrightarrow u(x) \leftrightarrow \sigma(x) \rightarrow$ l'incertezza dà una misura della *probabilità* di trovare il risultato della misura nell'intervallo $x \pm \delta x$. Quale?

Si assume (spesso implicitamente) che i risultati siano dispersi secondo una gaussiana (i valori medi di gruppi numerosi di campioni lo sono! (teorema del limite centrale). Ok per incertezza **di tipo A**.

Supponiamo comunque di poter applicare i medesimi ragionamenti all'incertezza di **tipo B** (vedremo oltre come variare il ragionamento).
N.B.: in questo caso assumere che la distribuzione sia gaussiana è un'ipotesi forte (non sono possibili misure ripetute, non si può invocare il limite centrale).

Incertezza estesa e fattore di copertura

L'incertezza standard $u_c = \sqrt{u_{c,A}^2 + u_{c,B}^2}$ esprime l'incertezza di una misura.

dove $u_{c,A}$ e $u_{c,B}$ sono eventualmente incertezze combinate.
Tuttavia, nulla dice sulla distribuzione di probabilità associata.

In ambito commerciale, di produzione, normativo etc etc è necessario ricorrere all' intervallo che contiene con (*ragionevole*) certezza (ovvero con probabilità $p \simeq 100\%$) il valore del misurando.

UNI CEI ENV 13005: incertezza estesa

→ ***incertezza estesa***: $U = k\, u_c$

dove k è il ***fattore di copertura.***

<u>Il valore di *k*</u> necessario a ottenere una certa *p* (*livello di probabilità* o *livello di confidenza**) <u>dipende dalla funzione di distribuzione del misurando</u>.

* definizione non raccomandata dalla GUM

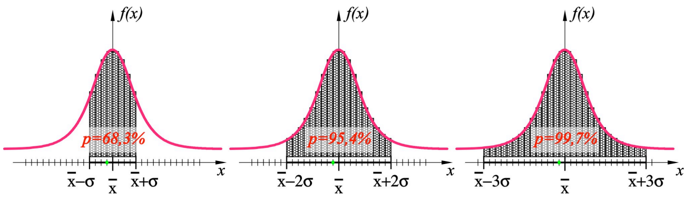
Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Incertezza estesa: distribuzione gaussiana

incertezza standard: $u_c = \sqrt{u_{c,A}^2 + u_{c,B}^2}$

incertezza estesa: $U = k\, u_c$

fattore di copertura: k



$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$U = u_c$	$U = 2\, u_c$	$U = 3\, u_c$
$p = 68\ \%$	$p = 95\ \%$	$p \gtrsim 99\ \%$

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

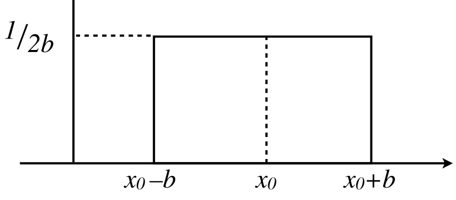
Incertezza estesa: distribuzione uniforme

incertezza standard: $u_c = \sqrt{u_{c,A}^2 + u_{c,B}^2}$

incertezza estesa: $U = k\, u_c$

fattore di copertura: k

$$f(x) = \begin{matrix} \frac{1}{2b}, & x \in [x_0 - b, x_0 + b] \\ 0, & x \notin [x_0 - b, x_0 + b] \end{matrix}$$



$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \ = x_0$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \ = b^2/3$$

$$p(x_0 - \delta x, x_0 + \delta x) = \int_{-\delta x}^{\delta x} f(x) dx \ = \delta x / b$$

$k = 1$	$k = 1.5$	$k = 1.7$
$U = u_c$	$U = 1.5\, u_c$	$U = 1.7\, u_c$
$p = 58\ \%$	$p = 87\ \%$	$p = 98\ \%$

Incertezza estesa combinata

Partendo da: $$u_c^2(y) = \sum_{i,j}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

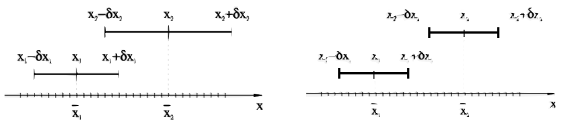
con $$u(x_i, x_j) = E[(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)]$$

l'incertezza estesa combinata si ottiene moltiplicando ogni $u(x_i)$ per il medesimo fattore di copertura k.

L'intervallo (multidimensionale) ottenuto non ha la stessa probabilità di ciascuno degli intervalli di partenza (tranne che nel caso di distribuzioni gaussiane)

Compatibilità di due misure

Con errore massimo:



compatibili non compatibili

Usando statistica? Sì, se possiamo assumere che la distribuzione della *differenza* di due misure sia gaussiana

misure: $m_1 \pm u_1, m_2 \pm u_2$
differenza: $\Delta = (m_1 - m_2) \pm u_\delta$, $u_\delta = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

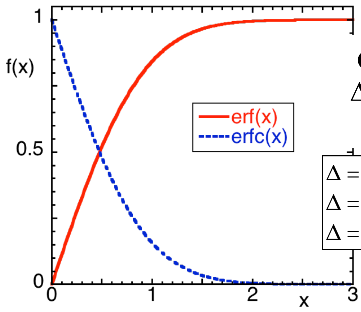
Misure compatibili ⇔ Δ compatibile con 0 (zero)
Se la variabile $x = m_1 - m_2$ è gaussiana → identificando u_δ con la deviazione standard e 0 (zero) col valore "vero" di x (ovvero supponendo che m_1 e m_2 siano compatibili), posso conoscere la probabilità che x non sia contenuto in un certo intervallo $[-\Delta, +\Delta]$.

Compatibilità di due misure

misure: $m_1 \pm u_1, m_2 \pm u_2$
differenza: $\Delta = (m_1 - m_2) \pm u_\delta$, $u_\delta = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

$x = m_1 - m_2$ gaussiana? Se sì, ⇒ probabilità che x si trovi fuori da $[-\Delta, +\Delta]$:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u_\delta}\left[\int_{-\infty}^{-\Delta} + \int_{\Delta}^{\infty}\right] \mathrm{e}^{-x^2/2u_\delta^2}dx = 1 - 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}u_\delta}\int_0^{\Delta} \mathrm{e}^{-x^2/2u_\delta^2}dx = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}u_\delta}\right)$$
$$= \mathrm{erfc}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}u_\delta}\right)$$



Conoscendo quanto vale *sperimentalmente* Δ/u_δ si può valutare *quanto probabile* sia un valore di $|m_1 - m_2| > \Delta$.

$\Delta = u_\delta$	(argomento della erf() vale 0.71)	⇒ $p \simeq 32\%$
$\Delta = 0.1\ u_\delta$	(argomento della erf() vale 0.07)	⇒ $p \simeq 92\%$
$\Delta = 3\ u_\delta$	(argomento della erf() vale 2.13)	⇒ $p \simeq 0.26\%$

È sempre una *probabilità!*

Espressione dell'incertezza

Resoconto dettagliato dell'incertezza:
elenco completo delle componenti, specificando per ognuna il metodo usato per ottenerne il valore numerico.

Le componenti di tipo A sono caratterizzate da: varianze stimate s_i^2 o scarti tipo stimati s_i e dai gradi di libertà v_i . Se necessario, anche le covarianze devono essere indicate.

Le componenti di tipo B devono essere caratterizzate da grandezze u_j^2 , interpretabili come approssimazioni delle varianze corrispondenti, che si considerano esistenti. Le u_j^2 sono trattate come varianze e le corrispondenti grandezze u_j come scarti tipo. Quando opportuno, si trattano le covarianze in modo analogo.

L'incertezza composta deve essere espressa come "scarto tipo".

Qualora sia necessario, per applicazioni particolari, moltiplicare l'incertezza composta per un fattore, così da ottenere un'incertezza globale, il fattore moltiplicativo deve essere sempre indicato.