

2- Interazione del campo o.m. con particelle cariche

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \vec{\Sigma}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

Si introduce il potenziale vettore \vec{A} tale che

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.3)$$

\vec{A} è definito non in modo univoco, in quanto

se usiamo

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi(\vec{r}, t) \quad (2.4)$$

abbiamo lo stesso campo \vec{B}

Abbiamo anche

$$\nabla \times \left[\vec{\Sigma}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = 0 \quad \text{quindi}$$

$$\vec{\Sigma}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (2.5)$$

anche il potenziale ϕ non è univoco

in quanto si può sostituire con

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.6)$$

(2.4) e (2.6) sono chiamate trasformazioni di gauge, esse lasciano invariate le proprietà fisiche.

Potremmo scegliere una gauge opportuna, nel nostro caso useremo la gauge di Coulomb

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.7)$$

la cui si associa anche $\phi = 0$.

Dall'altra equazione di Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (2.8)$$

abbiamo

$$c^2 \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

ma

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

poi con $\phi = 0$ la (2.5) ci dà

$$\frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

e otteniamo l'equazione delle onde per \vec{A}

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

La soluzione della (2.9) si può scrivere come

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = 2A_0(\omega) \hat{\epsilon} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega) \quad (2.10)$$

dove $\hat{\epsilon}$ è la polarizzazione del vettore \vec{A} ed è

tale che $\hat{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ con $\omega = ck$. L'onda è

polarizzata ortogonale alla direzione di propagazione \vec{k} .

Nella (2.10) δ_ω è la fase randomica. Con la

gauge di Coulomb dalle (2.5) abbiamo

$$\vec{\Sigma}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \text{quindi}$$

$$\vec{\Sigma}(\vec{r}, t) = E_0(\omega) \hat{\epsilon} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega) \quad (2.11)$$

con

$$E_0(\omega) = -2\omega A_0(\omega) \quad (2.12)$$

Poi $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$A_z = 2A_0(\omega) \hat{z} \cos[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t + \delta_\omega]$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = -2A_0(\omega) \hat{z} k_y \sin[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t + \delta_\omega]$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = -2A_0(\omega) \hat{y} k_z \sin[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t + \delta_\omega]$$

$$B_y = -(\vec{k} \times \hat{z})_y 2A_0(\omega) \sin[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega]$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ k_x & k_y & k_z \\ \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \end{vmatrix} = \vec{k} \times \hat{z}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -2A_0(\omega) (\vec{k} \times \hat{z}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega) \quad (2.13)$$

$$= \frac{E_0(\omega)}{\omega} (\vec{k} \times \hat{z}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega)$$

Per data frequenza ω l'energia del campo e. m.
in un volume V è data da

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\mathbf{E}|^2 dV + \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}|^2 dV \quad (2.14)$$

quindi la densità di energia sarà

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2$$

quindi

$$\begin{aligned} u &= \left[\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2(\omega) + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E_0(\omega)}{\omega} \right)^2 k^2 \right] \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega) \\ &= \epsilon_0 E_0^2(\omega) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\epsilon_0 \mu_0} \frac{k^2}{\omega^2} \right] \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega) \end{aligned}$$

$$\text{ma} \quad \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \quad \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$u = \epsilon_0 E_0^2(\omega) \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega) = 4 \epsilon_0 \omega^2 A_0^2(\omega) \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega)$$

$$u = 4 \epsilon_0 \omega^2 A_0^2(\omega) \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega) \quad (2.15)$$

Definiamo ora la densità di energia media del campo come la media temporale

$$g(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T dt u(t) \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2(\vec{v} \cdot \vec{a} + \omega t) = \frac{1}{T} \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \quad (2.17)$$

quindi

$$g(\omega) = 2 \epsilon_0 \omega^2 A_0^2(\omega) \quad (2.18)$$

Se nel volume V ci sono in media $N(\omega)$

fotoni di frequenza ω la densità di energia

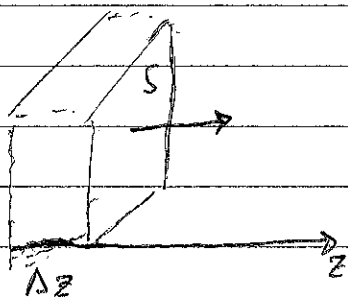
media sarà

$$p(\omega) = \frac{\hbar \omega N(\omega)}{V} \quad (2.19)$$

che combinata con la (2.18) porta a

$$A_0^2(\omega) = \frac{\hbar N(\omega)}{2 \epsilon_0 \omega V} \quad (2.20)$$

L'energia che si propaga in media
 attraverso una superficie S in un tempo Δt
 in direzione \hat{z} sarà



$$\Delta U = (S \Delta z) \rho(\omega)$$

con $\Delta z = c \Delta t$ $\Delta U = c \Delta t S \rho(\omega)$

Se definiamo l'intensità di radiazione e.m. come

l'energia che si diffonde per unità di superficie come

$$I(\omega) = \frac{1}{S} \frac{dU}{dt} \quad \rightarrow \quad I(\omega) = c \rho(\omega) \quad (2.21)$$

Per ottenere l'intensità totale di una

radiazione incoerente, con S_ω la struttura a caso,

con una distribuzione di frequenze

dovremo calcolare

$$I = \int_0^{\infty} dw I(w) \quad (2.22)$$

e avremo anche una densità di reclutazione

$$g = \int_0^{\infty} dw g(w) \quad (2.23)$$

Elettroni nel campo e. m.

Per una particella carica, con carica q e massa m

in interazione col campo elettromagnetico

l'equazione del moto si ricava in meccanica classica

dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q \phi + q \vec{v} \cdot \vec{A}$$

con l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

Per es. con $x_i = x$

$$\begin{aligned} m \dot{v}_x &= -q \frac{\partial \phi}{\partial x} + q \left[\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right]_x = \\ &= -q \frac{\partial \phi}{\partial x} + q \left[\vec{v} \times \vec{B} \right]_x \end{aligned}$$

Si ottiene l'equazione di Newton

$$m \dot{\vec{v}} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.24)$$

Per la quantità di moto

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x$$

quindi $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$ (2.25)

L'hamiltoniana sarà data da

$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L$$

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q\vec{A}]^2 + q\phi \quad (2.26)$$

Per passare all'hamiltoniana quantistica

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{q}{2m} [\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}] + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2 + q\phi$$

quindi

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{i\hbar q}{2m} [\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla] + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2 + q\phi$$

Dobbiamo fare attenzione perché ora

$\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla$ è un operatore che deve agire su
una funzione d'onda

$$\nabla \cdot \vec{A} \psi = \frac{\partial}{\partial x} (A_x \psi) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \psi) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \psi) =$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \psi + A_x \frac{\partial}{\partial x} \psi + A_y \frac{\partial}{\partial y} \psi + A_z \frac{\partial}{\partial z} \psi$$

$$= (\nabla \cdot \vec{A}) \psi + (\vec{A} \cdot \nabla) \psi$$

$$(\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla) \psi = (\nabla \cdot \vec{A}) \psi + 2(\vec{A} \cdot \nabla) \psi$$

quindi se assumiamo la gauge di Coulomb

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad \phi = 0 \quad \text{l'hamiltoniano diventa}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{Z e^2 \hbar^2}{2m} \vec{A} \cdot \nabla + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2 \quad (2.27)$$

Ora applichiamo quanto visto all'atomo di

idrogeno dove c'è anche un potenziale centrale

$$\frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Possiamo spezzare l'hamiltoniano in una parte
indipendente dal tempo

$$H_0 = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.28)$$

e una perturbazione dipendente dal tempo

$$H'(t) = \frac{-i\hbar e}{m} \vec{A} \cdot \nabla + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 \approx \frac{-i\hbar e}{m} \vec{A} \cdot \nabla \quad (2.29)$$

dove abbiamo posto $q = -e$ e consideriamo solo
termini lineari in \vec{A} .

Usiamo la teoria delle perturbazioni dipendente
dal tempo e scriviamo

$$H(t) = H_0 + \lambda H'(t)$$

Conosciamo lo spettro delle autofunzioni di H_0

$$H_0 \psi_k = E_k^0 \psi_k$$

La funzione d'onda perturbata soddisfa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = [H_0 + \lambda H'(t)] \psi(\vec{r}, t) \quad (2.30)$$

Possiamo sviluppare $\psi(\vec{r}, t)$ nel set completo ψ_k

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_k c_k(t) \psi_k(\vec{r}) e^{-iE_k^0 t/\hbar} \quad (2.31)$$

Sostituiamo la (2.31) nella (2.30), il lato

sinistro ci darà

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\vec{r}, t)\rangle = \sum_k i\hbar \dot{c}_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} |\psi_k\rangle$$

$$+ i\hbar \left(-\frac{i}{\hbar}\right) E_k^0 e^{-iE_k^0 t/\hbar} c_k(t) |\psi_k\rangle$$

$$= \sum_k [i\hbar \dot{c}_k(t) + E_k^0 c_k(t)] e^{-iE_k^0 t/\hbar} |\psi_k\rangle$$

Il lato destro della (2.31) in (2.30) ci darà

$$[H_0 + \lambda H'(t)] \sum_k c_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} |\psi_k\rangle$$

$$= \sum_k [E_k^0 + \lambda H'(t)] c_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} |\psi_k\rangle$$

quindi la (2.30) diventa

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_k \dot{c}_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} |\psi_k\rangle + \sum_k E_k^0 c_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} |\psi_k\rangle = \\ = \sum_k E_k^0 c_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} |\psi_k\rangle + \\ + \sum_k c_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} \lambda H'(t) |\psi_k\rangle \quad (2.32) \end{aligned}$$

da (2.31) si riduce a

$$i\hbar \sum_k \dot{c}_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} |\psi_k\rangle = \sum_k \lambda H'(t) c_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} |\psi_k\rangle \quad (2.33)$$

La perturbazione è tale da non modificare lo spettro

dei livelli di energia E_k^0 , quello che vogliamo

è trovare le probabilità che l'elettrone possa trovarsi

ad uno stato finale $|\psi_b\rangle$

Moltiplichiamo la (2.33) a destra e sinistra col

bra $\langle \psi_b |$

$$i\hbar \sum_k \dot{c}_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} \delta_{bk} = \sum_k \langle \psi_b | \lambda H' | \psi_k \rangle c_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar}$$

Definiamo $\omega_{bk} = \frac{E_b^0 - E_k^0}{\hbar}$ (2.34)

avremo

$$\dot{c}_b(t) = \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_k c_k(t) \langle \psi_b | \lambda H' | \psi_k \rangle e^{i\omega_{bk} t} \quad (2.35)$$

Sviluppiamo anche gli $c_k(t)$ nell'ordine della

perturbazione

$$c_k(t) = c_k^{(0)} + \lambda c_k^{(1)}(t) + \lambda^2 c_k^{(2)}(t) + \dots$$

all'ordine (0) non c'è la perturbazione e quindi:

$$c_k^{(0)} = c_k^{(0)}(t=0) = \text{cost}$$

Assumiamo per chi il sistema all'istante $t=0$

sia nel singolo stato $|\psi_0\rangle$, quindi $c_k^{(0)} = \delta_{k0}$

Dalla (2.35) avremo

$$\lambda c_b^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[c_a^{(0)} + \lambda c_a^{(1)}(t, t_0) \right] \langle \psi_b | \lambda H' | \psi_a \rangle e^{i\omega_{ba}t}$$

tenendo l'ordine in λ

$$c_b^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} H'_{ba}(t) e^{i\omega_{ba}t} \quad (2.36)$$

dove

$$H'_{ba}(t) = \langle \psi_b | H'(t) | \psi_a \rangle$$

Naturalmente

$$c_b^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' H'_{ba}(t') e^{i\omega_{ba}t'} \quad (2.37)$$

con

$$H'_{ba}(t) = \frac{-i\hbar t}{m} \langle \psi_b(\vec{r}) | \vec{A} \cdot \nabla | \psi_a(\vec{r}) \rangle \quad (2.38)$$

La variamo ora su questo elemento di matrice

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \int_0^\infty d\omega \, 2A_0(\omega) \hat{\epsilon} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega) = \\ &= \int_0^\infty d\omega \, A_0(\omega) \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega)} \right] \end{aligned}$$

che sostituisce in (2.38) porta a

$$H'_{ba}(t) = \frac{-i e \hbar}{m} \left\{ \int_0^t d\omega e^{-i\omega t + i\omega \tau} A_0(\omega) \langle \psi_b | e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\epsilon} \cdot \nabla | \psi_a \rangle \right.$$

$$\left. + \int_0^t d\omega e^{i\omega t - i\omega \tau} A_0(\omega) \langle \psi_b | e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\epsilon} \cdot \nabla | \psi_a \rangle \right\}$$

quindi $c_b^{(1)}$ è ora costituita da due termini

$$c_b^{(1)}(t) = -\frac{e}{m} \int_0^t d\omega A_0(\omega) \langle \psi_b | e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\epsilon} \cdot \nabla | \psi_a \rangle$$

$$\cdot e^{i\omega \tau} \int_0^t dt' e^{i(\omega_{ba} - \omega)t'}$$

$$- \frac{e}{m} \int_0^t d\omega A_0(\omega) \langle \psi_b | e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\epsilon} \cdot \nabla | \psi_a \rangle$$

$$\cdot e^{-i\omega \tau} \int_0^t dt' e^{i(\omega_{ba} + \omega)t'} \quad (2.39)$$

I due integrali sul tempo sono del tipo

$$\int_0^t dt' e^{i\tilde{\omega}t'} \quad (2.40)$$

nel primo $\tilde{\omega} = \omega_{ba} - \omega$, nel secondo $\tilde{\omega} = \omega_{ba} + \omega$

Come vedremo nel seguito i due integrali

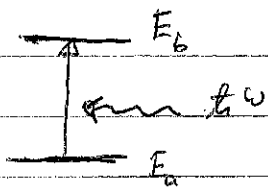
sono diversi da zero solo quando $\tilde{\omega} \approx 0$

nel limite che ci interessa $t \gg 2\pi/\omega$

vale a dire tempi lunghi rispetto a quelli

microscopici. Allora il primo termine nella (2.39)

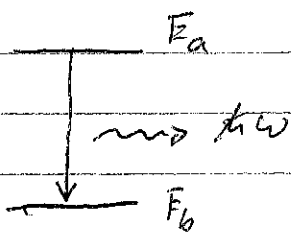
corrisponde a $\hbar\omega_{ba} = \hbar\omega \rightarrow E_b = E_a + \hbar\omega$



assorbimento

mentre nel secondo termine $\hbar\omega_{ba} = -\hbar\omega$

$$\rightarrow E_b = E_a - \hbar\omega$$



emissione stimolata

Vediamo i due processi separatamente

1° termine, la probabilità di transizione sarà derivata da

$$|C_b^{(1)}(T)|^2 = \frac{e^2}{m^2} \left| \int_0^T d\omega A_0(\omega) M_{ba} e^{i\delta\omega} \int_0^t dt' e^{i(\omega_{ba} - \omega)t'} \right|^2 \quad (2.41)$$

con

$$M_{ba} = \langle \psi_b(\vec{r}) | e^{i\vec{r} \cdot \vec{\nabla}} | \psi_a(\vec{r}) \rangle \quad (2.42)$$

quindi

$$|C_b^{(1)}(T)|^2 = \frac{e^2}{m^2} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\omega' A_0(\omega) A_0(\omega') |M_{ba}|^2 e^{i(\delta\omega - \delta\omega')} \cdot \left| \int_0^T dt' e^{i(\omega_{ba} - \omega)t'} \right|^2 \quad (2.43)$$

Le due fasi $\delta\omega$ e $\delta\omega'$ sono indipendenti statisticamente

quindi

$$\langle e^{-i\delta\omega'} e^{i\delta\omega} \rangle = \delta(\omega - \omega')$$

e la (2.43) diventa

$$|C_b^{(1)}(T)|^2 = \frac{e^2}{m^2} \int_0^{\infty} d\omega A_0^2(\omega) |M_{ba}|^2 T(\omega_{ba} - \omega) \quad (2.44)$$

dove i definita

$$F(t, \tilde{\omega}) = \left| \int_0^t dt' e^{i \tilde{\omega} t'} \right|^2 \quad (2.45)$$

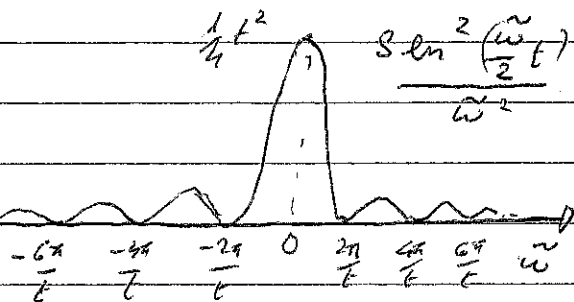
Calcoliamo

$$\int_0^t dt' e^{i \tilde{\omega} t'} \quad \text{con } x = i \tilde{\omega} t' \quad dx = i \tilde{\omega} dt'$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{i \tilde{\omega}} \int_0^{i \tilde{\omega} t} dx e^x = \frac{1}{i \tilde{\omega}} \left[e^{i \tilde{\omega} t} - 1 \right]$$

$$= \frac{2}{\tilde{\omega}} e^{i \tilde{\omega} t/2} \operatorname{sen} \left(\frac{\tilde{\omega} t}{2} \right)$$

$$F(t, \tilde{\omega}) = \frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\tilde{\omega} t}{2} \right)}{\tilde{\omega}^2} = t^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\tilde{\omega} t}{2} \right)}{(\tilde{\omega} t/2)^2} \quad (2.46)$$



L'area sotto la curva $\propto t$

La transizione da $a \rightarrow b$ è misurata in un tempo t

L'incertezza ΔE è data da $\Delta E \approx \hbar/t$

per $t \rightarrow \infty$ si può estendere l'integrazione

Nell'integrale in (2.44) se assumiamo che ha
 valore nullo per $\omega \neq \omega_{ba}$ possiamo integrare le (2.46)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t, \tilde{\omega}) d\tilde{\omega} = t^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\frac{\tilde{\omega}t}{2})}{(\tilde{\omega}t/2)} d\tilde{\omega}$$

$$= 2t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = 2\pi t \quad (2.45)$$

quindi $F(t, \tilde{\omega}) \approx 2\pi t \delta(\tilde{\omega})$ per $t \rightarrow \infty$ (2.46)

La probabilità di transizione (2.44) effettuando
 l'integrale in ω diventa

$$|c_b^{(1)}|^2 = 2\pi \left(\frac{e}{m}\right)^2 |M_{ba}|^2 A_0^2(\omega_{ba}) t \quad (2.47)$$

La probabilità di transizione per unità di tempo
 (transition rate) è data da

$$W_{ba} = \frac{d}{dt} |c_b^{(1)}|^2 = 2\pi \left(\frac{e}{m}\right)^2 |M_{ba}|^2 A_0^2(\omega_{ba}) \quad (2.48)$$

Se riprendiamo le (2.21) e la (2.18), l'intensità

$$I(\omega) = 2\varepsilon_0 c \omega^2 A_0^2(\omega)$$

la (2.48) diventa

$$W_{ba} = \frac{4\pi^2}{m^2 c} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{I(\omega_{ba})}{\omega_{ba}^2} |M_{ba}|^2 \quad (2.49)$$

Se guardiamo ora all'energia che l'atomo assorbe dal campo e, m . nel processo di ~~ass~~ transizione

essa sarà

$$\Delta U_{abs} = \hbar \omega_{ba} W_{ba} \Delta t$$

L'energia incidente, ricordando la (2.21) sarà

$$\Delta U_{inc} = I(\omega) S \Delta t, \text{ possiamo identificare}$$

l'area S con la sezione d'urto di assorbimento σ_{ba}

$$\text{Date che } \Delta U_{abs} = \Delta U_{inc}$$

abbiamo

$$\hbar \omega_{ba} W_{ba} \Delta t = \sigma_{ba} I(\omega_{ba}) \Delta t$$

da cui

$$\sigma_{ba} = \frac{\hbar \omega_{ba} W_{ba}}{I(\omega_{ba})} \quad (2.50)$$

Dalla (2.49)

$$\frac{W_{ba}}{I(\omega_{ba})} = \frac{4\pi}{m^2 c} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{\omega_{ba}^2} |M_{ba}|^2$$

La (2.50) si può riscrivere come

$$\sigma_{ba} = \frac{4\pi^2}{m^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 h c} \frac{h^2}{\omega_{ba}} |M_{ba}|^2$$

che ricordando la costante di struttura fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 h c} \quad \text{diventa}$$

$$\sigma_{ba} = \frac{4\pi^2 h^2 \alpha}{m^2 \omega_{ba}} |M_{ba}|^2 \quad (2.51)$$

Vediamo ora l'emissione stimolata.

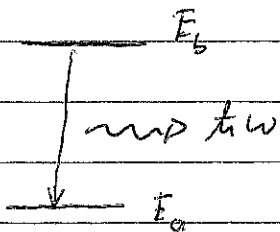
Dobbiamo guardare al secondo termine della

$|c_b^{(1)}(t)|^2$ (2.39). $t > 0$ descrive un

processo di emissione con $E_b = E_a - \hbar\omega$.

Conviene scambiare gli indici a e b in modo
che lo stato finale sia lo stato a , lo schema

diventa $(E_a = E_b - \hbar\omega)$



L'emissione è stimolata perché possiamo di-

eccitare gli atomi con una radiazione incidente,

poi osserviamo in direzione diversa l'emissione

dagli atomi. Si può comunque ripetere la

procedura precedente che ha portato alle (2.48)

tenendo presente che usiamo il secondo termine

della (2.39) che ora è $|c_a^{(1)}(t)|^2$.

Quindi abbiamo

$$W_{ab} = \frac{4\pi^2}{m^2 c} \frac{\rho^2}{4\pi\epsilon} \frac{I(\omega_{La})}{\omega_{La}^2} |M_{ab}|^2$$

Con

$$M_{ab} = \langle \psi_a | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{\epsilon} \cdot \nabla | \psi_b \rangle \quad (2.52)$$

Si può calcolare come

$$\int dx dy dz e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} \psi_a^*(\vec{r}),$$

$$\left[\epsilon_x \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi_b(\vec{r}) \quad (2.53)$$

Vediamo il termine con dx

$$\int dx e^{-ik_x x} \psi_a^*(\vec{r}) \epsilon_x \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(\vec{r}) \cdot \int dy dz e^{-i(k_y y + k_z z)}$$

$$\int dx e^{-ik_x x} \psi_a^*(\vec{r}) \epsilon_x \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(\vec{r}) =$$

$$= \epsilon_x \left[e^{-ik_x x} \psi_a^*(\vec{r}) \psi_b(\vec{r}) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \epsilon_x,$$

$$\int dx \psi_b(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-ik_x x} \psi_a^*(\vec{r}) \right]$$

$$\left[\dots \right]_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow 0$$

diventa

$$i \varepsilon_x k_x \int dx \psi_b(\vec{r}) e^{-ik_x x} \psi_a^*(\vec{r})$$

$$- \varepsilon_x \int dx \psi_b(\vec{r}) e^{-ik_x x} \frac{d}{dx} \psi_a^*(\vec{r})$$

Combinando con i termini in $dy dz$ la 2.53 diventa

$$\int dx \int dy \int dz e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} \psi_b(\vec{r})$$

$$\left\{ i (\varepsilon_x k_x + \varepsilon_y k_y + \varepsilon_z k_z) \psi_a^*(\vec{r}) \right.$$

$$\left. - \left[\varepsilon_x \frac{d}{dx} + \varepsilon_y \frac{d}{dy} + \varepsilon_z \frac{d}{dz} \right] \psi_a^*(\vec{r}) \right\}$$

ma $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = 0$ quindi

$$M_{ab} = - \int d\vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \psi_b(\vec{r}) \vec{\varepsilon} \cdot \nabla \psi_a^*(\vec{r})$$

Come conseguenza

$$M_{ab}^* = -M_{ba}$$

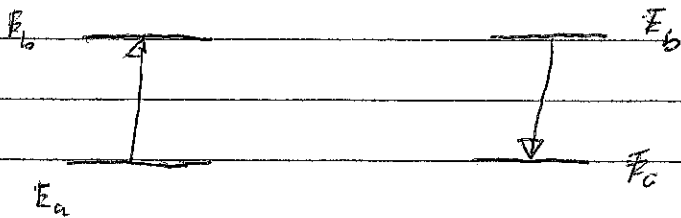
e quindi otteniamo

$$W_{ab}^{emi} = W_{ba}^{abs} \quad (2.54)$$

questo è detto principio del bilancio dettagliato

esso dice che la probabilità delle

transizioni $a \rightarrow b$ è la stessa di quella di $b \rightarrow a$



questo però è vero se si considerano gli

stati eccitati occupati come quello fondamentale.

Si trascuri l'effetto della temperatura e si

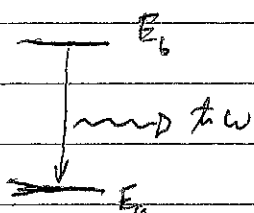
considera che l'emissione è stimolata.

Emissione spontanea

Per trattare l'emissione spontanea conviene

considerare nel calcolo di $|C^{(1)}(t)|^2$ non effettuare

l'integrazione su $\tilde{\omega}$ in (2.44) e usare le (2.46)



$$\tilde{\omega} = \omega_{ba} - \omega$$

$$\hbar\omega_{ba} = E_b - E_a$$

$$|C_a^{(1)}(t)|^2 \approx \frac{q^2}{m^2} A_0^2(\omega_{ba}) |M_{ba}|^2 2\pi t \delta(\omega_{ba} - \omega) \quad (2.55)$$

che è chiamata regola d'oro di Fermi, la (2.55) è

una delle forme della regola d'oro di Fermi.

Nel nostro caso si considera che viene emesso un

singolo fotone con una transizione rate "spontanea"

$$W_{ab}^{spo} = \frac{q^2 e^2}{m^2} A_0^2(\omega_{ba}) |M_{ba}|^2 \delta(\omega_{ba} - \omega) \quad (2.56)$$

$A_0^2(\omega)$ lo possiamo ottenere dalla densità di energia in base alla (2.18)

$$p(\omega) = 2 \epsilon_0 \omega^2 A_0^2(\omega)$$

Per l'emissione stimolata e l'assorbimento delle

(2.20) sappiamo che $A_0^2(\omega) \sim N(\omega)$,

Nel caso di un fotone singolo invece della (2.19)

abbiamo

$$p(\omega) = \frac{\hbar \omega}{V}$$

e quindi

$$A_0^2(\omega) = \frac{p(\omega)}{2 \epsilon_0 \omega^2} = \frac{\hbar}{2 \epsilon_0 \omega V}$$

Sostituendo in (2.56)

$$W_{ab}^{SP} = \frac{2\pi e^2}{m^2} \frac{\hbar \pi}{4\pi} \frac{\hbar}{2 \epsilon_0 \omega_{ba} V} |M_{ba}|^2 \delta(\omega_{ba} - \omega)$$

$$= \frac{4\pi^2}{m^2} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right) \frac{\hbar}{V \omega_{ba}} |M_{ba}|^2 \delta(\omega_{ba} - \omega) \quad (2.57)$$

Per avere la transizione rate per l'emissione

spontanea occorre sommare le (2.56) sugli stati

fotonici finali. Vogliamo trovare la probabilità

di transizione nell'angolo solido $d\Omega$ intorno alle

direzioni di propagazione \vec{k} , la densità degli stati

finali è data da

$$\frac{V}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 dk d\Omega$$

$$\text{con } \omega = ck \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{c^3} d\omega d\Omega \quad (2.58)$$

quindi il numero di stati è determinato da (2.58)

quindi

$$W_{ab}^{sp0}(\omega, \alpha) d\Omega = \frac{4\pi^2}{m^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\hbar}{V\omega_{ba}} |M_{ba}|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} d\Omega$$

$$\int d\omega \frac{\omega^2}{c^3} \delta(\omega_{ba} - \omega) =$$

$$= \frac{4\pi^2}{m^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\hbar}{(2\pi)^3 \omega_{ba}} \frac{\omega_{ba}^2}{c^3} |M_{ba}|^2 d\Omega$$

quindi avremo infine

$$\overline{W}^{s10}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \frac{\hbar}{2\pi m^2 c^3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \omega_{ba} |M_{ba}|^2 d\Omega \quad (2.59)$$

—

Approssimazione di dipolo

Nelle formule che determiniamo le probabilità

di assorbimento e di emissione compare l'elemento

di matrice (2.42)

$$M_{ba} = \langle \psi_b(\vec{r}) | e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{\epsilon} \cdot \nabla | \psi_a(\vec{r}) \rangle$$

La radiazione l.m. ha $k \approx 10^5 \text{ cm}^{-1}$ mentre

le lunghezze atomiche sono dell'ordine di 1 \AA ,

siamo quindi nel limite $k a \ll 1$ o $\lambda \gg a$

Si può quindi sviluppare $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} + \dots$$

approssimiamo $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1$

quindi

$$M_{ba} \approx \langle \psi_b(\vec{r}) | \hat{\epsilon} \cdot \nabla | \psi_a(\vec{r}) \rangle \quad (2.60)$$

con $\vec{p} = -i\hbar \nabla$

$$M_{ba} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi_b(\vec{r}) | \hat{\epsilon} \cdot \vec{p} | \psi_a(\vec{r}) \rangle \quad (2.61)$$

Neel nostro caso

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \quad V(r) \text{ è scalare}$$

$$[H_0, \vec{r}] = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m}, \vec{r} \right] = \frac{1}{2m} \left\{ \vec{p} [\vec{p}, \vec{r}] + [\vec{p}, \vec{r}] \vec{p} \right\}$$

$$= \frac{1}{2m} (-2i\hbar) \vec{p} = \frac{\hbar}{im} \vec{p}$$

Da qui otteniamo

$$M_{ba} = \frac{i}{\hbar} \frac{\hbar m}{\hbar} \hat{\epsilon} \cdot \langle \psi_b | [H_0, \vec{r}] | \psi_a \rangle$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2} \hat{\epsilon} \cdot \langle \psi_b | [H_0 \vec{r} - \vec{r} H_0] | \psi_a \rangle$$

$$= \frac{m}{\hbar^2} [E_a - E_b] \langle \psi_b | \hat{\epsilon} \cdot \vec{r} | \psi_a \rangle$$

$$M_{ba} = -\frac{\mu}{\hbar} \omega_{ba} \langle \psi_b | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | \psi_a \rangle \quad (2.62)$$

Definiamo il momento di dipolo elettrico

$$\vec{D} = -e \vec{r} \quad (2.63)$$

In approssimazione di dipolo

$$M_{ba}^D = \frac{\mu}{\hbar} \omega_{ba} \langle \psi_b | \vec{\epsilon} \cdot \vec{D} | \psi_a \rangle \quad (2.64)$$

Di conseguenza in questa approssimazione

$$W_{ba}^D = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} I(\omega_{ba}) |\vec{\epsilon} \cdot \vec{D}_{ba}|^2 \quad (2.65)$$

Con

$$\vec{D}_{ba} = -e \langle \psi_b | \vec{r} | \psi_a \rangle \quad (2.66)$$

Nell'approssimazione di dipolo è importante capire

quando $D_{ba} = 0 \rightarrow$ transizione proibita

$D_{ba} \neq 0 \rightarrow$ transizione permessa

Se $D_{ba} = 0$ si potrebbe guardare agli ordini

successivi, come il quadrupolo elettrico, la

probabilità di transizione è ovviamente più debole.

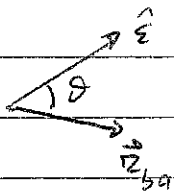
Nell'elemento di matrice (2.66)

$$\hat{\epsilon} \cdot \vec{D}_{ba} \Rightarrow \hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{ba}$$

nella (2.65) avremo un termine $|\hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{ba}|^2$

\vec{r}_{ba} è un vettore con modulo quadrato

$$|\vec{r}_{ba}|^2 = |x_{ba}|^2 + |y_{ba}|^2 + |z_{ba}|^2$$



$$\hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{ba} = r_{ba} \cos \theta$$

quindi

$$|\hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{ba}|^2 = |r_{ba}|^2 \cos^2 \theta \quad (2.67)$$

Sostituendo nella (2.65)

$$W_{ba}^{(D)} = \frac{4\pi^2}{c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) F(\omega_{ba}) |r_{ba}|^2 \cos^2 \theta$$

Se la radiazione non è polarizzata ma distribuita con direzioni di polarizzazione

casuale la media sugli angoli ci dà $\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{3}$

quindi

$$\overline{W_{ba}} = \frac{4\pi^2}{3c\hbar^2} \left(\frac{d^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \mp (\omega_{ba}) |R_{ba}|^2 \quad (2.68)$$

Regole di selezione.

Per capire quali transizioni sono permesse

conviene introdurre le componenti sferiche di \vec{E}

$$E_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + iE_y) \quad E_0 = E_z \quad E_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x - iE_y)$$

$$R_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (x + iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}} R \sin \theta e^{i\varphi} = R \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{1,1}(\theta, \varphi)$$

$$R_0 = z = R \cos \theta = R \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{1,0}(\theta, \varphi)$$

$$R_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - iy) = \frac{1}{\sqrt{2}} R \sin \theta e^{-i\varphi} = R \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{1,-1}(\theta, \varphi)$$

Consideriamo transizioni

$$a = (m, l, m) \rightarrow b = (m', l', m')$$

$$\hat{\Sigma} \cdot \vec{r}_{ba} = \sum_{q=0, \pm 1} \Sigma_q^* (r_q)_{ba}$$

Vediamo $(r_q)_{ba}$

$$\langle \psi_{m' l' m'} | r_q | \psi_{m l m} \rangle =$$

$$= \int dr r^2 R_{m' l' m'}(r) R_{m l m}(r)$$

(2.69)

$$\cdot \int d\Omega Y_{l' m'}^*(\vartheta, \varphi) \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} Y_{1, q}(\vartheta, \varphi) Y_{l, m}(\vartheta, \varphi)$$

$$\text{con } d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Ricordiamo che

$$Y_{l, m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{N}{l m}} (\vartheta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i m \varphi}$$

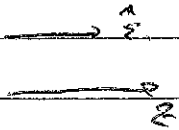
L' integrazione su $d\varphi$ nella (2.69) da'

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(-m'+q+m)\varphi}$$

questo integrale è diverso da zero solo se $m - m' + q = 0$

con $q = 0$ deve essere $m' = m$ (2.70)

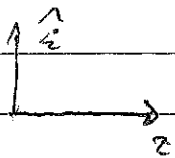
questa è m' onda polarizzata lungo z



$$\Delta m = 0$$

con $q = \pm 1$ deve essere $m' = m \pm 1$ (2.71)

onde polarizzate in direzione ortogonale a z



$$\Delta m = \pm 1$$

$$q = 1 \quad \Delta m = +1$$

$$q = -1 \quad \Delta m = -1$$

Le (2.70) e (2.71) sono le regole di selezione

che riguardano il numero quantico m .

Un primo risultato lo otteniamo considerando

$$A(l, m, l', m', q) = \int d\Omega y_{l', m'}^*(\vartheta, \varphi) y_{l, m}(\vartheta, \varphi) y_{l, m}(\vartheta, \varphi) \quad (2.71)$$

Sotto parità $\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$

$$\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta \quad \varphi \rightarrow \varphi + \pi \quad n \rightarrow n$$

$$P y_{l, m}(\vartheta, \varphi) \rightarrow (-1)^l y_{l, m}(\vartheta, \varphi)$$

quindi

$$A(l, m, l', m', q) = (-1)^{l'} (-1)^l (-1)^l A(l, m, l', m', q)$$

quindi deve essere

$$l + l' + 1 = \text{pari}$$

Per vedere in generale il risultato si può ~~anche~~ considerare

nella (2.71) $l y_{l, m}(\vartheta, \varphi)$ come

$$y_{l, m}(\vartheta, \varphi) = C_{l, m} P_l^m(\cos \vartheta) e^{i m \varphi}$$

dove $P_l^m(\cos \vartheta)$ sono i polinomi di Legendre,

$$\text{per } l_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \vartheta \quad y_{1, \pm 1} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \sin \vartheta e^{i \pm \varphi}$$

Pensiamo di aver effettuato gli integrali in φ
 e ottenuto le regole di selezione in m . A parte
 varie costanti in fronte agli integrali, dobbiamo
 calcolare:

$$q=0 \quad \int d(\cos\vartheta) \cos\vartheta P_{l'}^m(\cos\vartheta) P_l^m(\cos\vartheta)$$

$$\text{con } w = \cos\vartheta$$

$$\int dw w P_{l'}^m(w) P_l^m(w)$$

Sappiamo che

$$(2l+1)w P_l^m = (l'+1-m)P_{l'+1}^m + (l'+m)P_{l'-1}^m$$

a parte le costanti restano con due integrali

$$\int dw P_{l'+1}^m P_l^m = \delta_{l'+1, l}$$

$$\Delta l = \pm 1$$

$$\int dw P_{l'-1}^m P_l^m = \delta_{l'-1, l}$$

con $q = +1$ abbiamo

$$\int d(\cos\vartheta) \sin\vartheta P_l^{m+1}(\cos\vartheta) P_l^m(\cos\vartheta)$$

Sappiamo che (con $w = \cos\vartheta$)

$$(2l+1)(1-w^2)^{1/2} P_l^{m+1} = P_{l+1}^m - P_{l-1}^m$$

$$(1-w^2)^{1/2} = \sin\vartheta$$

quindi l'integrale si spezza in

$$\int dw P_l^{m+1} P_{l+1}^m = \delta_{l', l+1}$$

$$\Delta l = \pm 1$$

$$\int dw P_l^{m+1} P_{l-1}^m = \delta_{l', l-1}$$

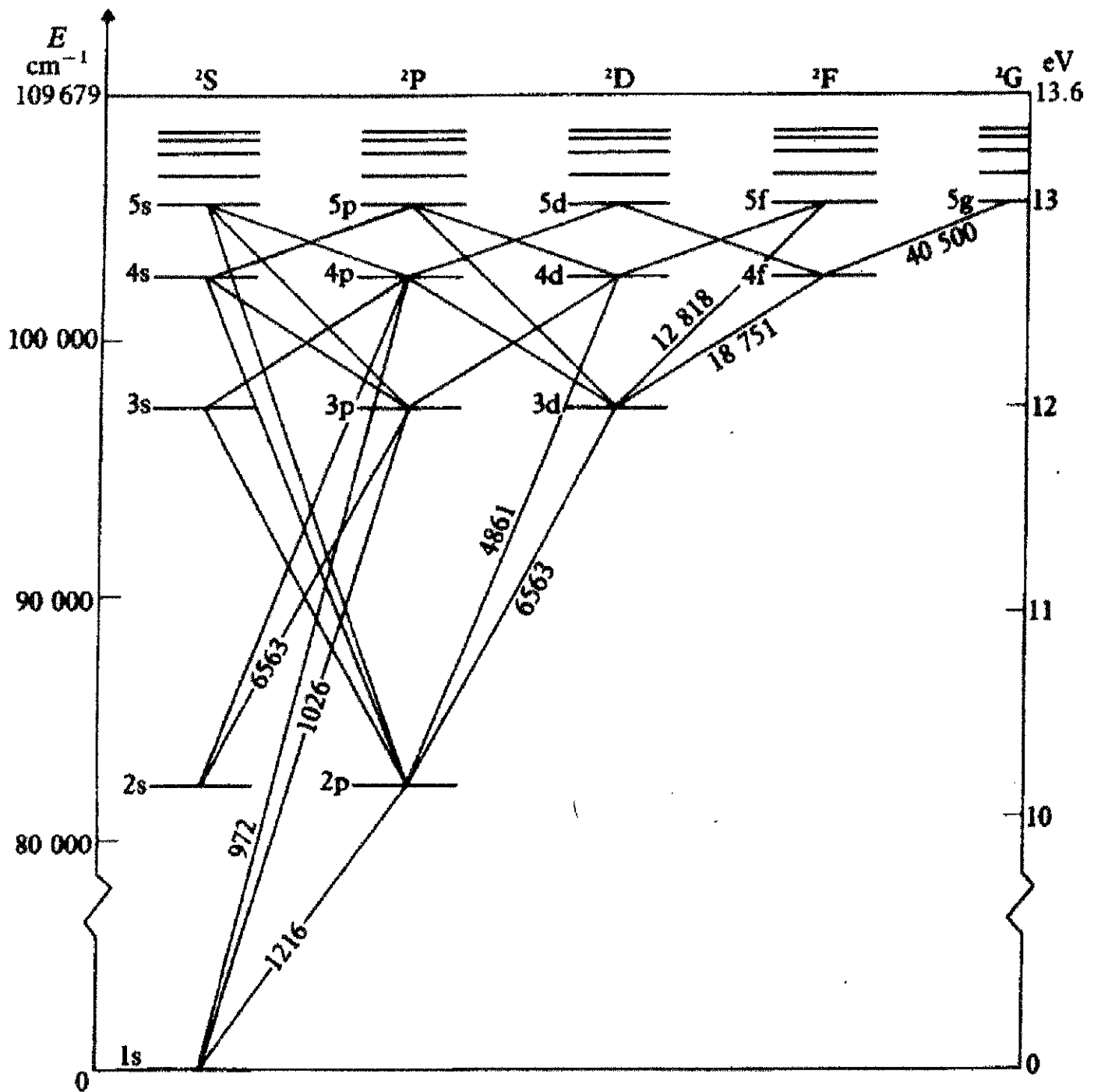
Nel caso $q = -1$ avviene

$$\int dw P_{l+1}^m P_l^m = \delta_{l', l+1, l}$$

$$\Delta l = \pm 1$$

$$\int dw P_{l-1}^m P_l^m = \delta_{l', l-1, l}$$

REGOLE DI SELEZIONE : $\Delta l = \pm 1$

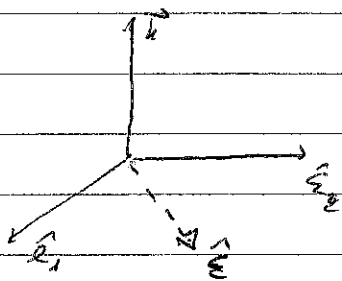


4.4 Term, or Grotrian diagram for atomic hydrogen. The ordinate shows the energy above the $1s$ ground state in cm^{-1} ($8065 \text{ cm}^{-1} \equiv 1 \text{ eV}$) on the left and in eV on the right and the energy levels are shown plotted against the orbital angular momentum. Transitions obeying the $\Delta l = \pm 1$ selection rule are indicated by solid lines. The numbers against the lines indicate the wavelength in angstrom units ($1 \text{ \AA} \equiv 10^{-8} \text{ cm}$). For clarity, only transitions between the lower-lying levels are shown, and the wavelengths are shown only for a selection of lines. The splitting due to fine structure is too small to be shown on a diagram of this scale.



Polarizzazione dell'onda e.m.

Un'onda piana che si propaga in direzione \vec{k} con polarizzazione perpendicolare a \vec{k} può essere descritta combinando due onde piane indipendenti polarizzate linearmente. Con due vettori \hat{e}_1, \hat{e}_2 ortogonali e in un piano perpendicolare a \vec{k}



$$\vec{k} = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$$

Una polarizzazione arbitraria si può scrivere come

$$\hat{\epsilon} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 \quad a_1^2 + a_2^2 = 1 \quad (2.73)$$

Si può anche impostare la descrizione introducendo due forme di onde polarizzate circolari con potenziale vettore polarizzato left \vec{A}^L e right \vec{A}^R .

\vec{A}^L e \vec{A}^R hanno componenti

$$A_x^L = A_x^R = \sqrt{2} A_0(\omega) \cos(kz - \omega t + \delta_\omega)$$

$$A_y^L = -A_y^R = -\sqrt{2} A_0(\omega) \sin(kz - \omega t + \delta_\omega) \quad (2.74)$$

$$A_z^L = A_z^R = 0$$

Nelle gauge di Coulomb $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ quindi

$$E_x^L = E_x^R = -\sqrt{2} \omega A_0(\omega) \sin(kz - \omega t + \delta_\omega)$$

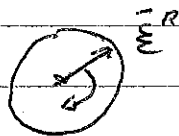
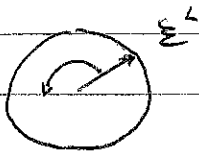
$$E_y^L = -E_y^R = -\sqrt{2} \omega A_0(\omega) \cos(kz - \omega t + \delta_\omega)$$

$$E_z^L = E_z^R = 0$$

I campi \vec{E}^L e \vec{E}^R corrispondono ad

onde polarizzate circolarmente in verso orario

antiorario (L) e orario (R)



restano perpendicolari a \hat{k}

Consideriamo \vec{A}^L , le sue componenti sono

$$A_x^L = \sqrt{2} A_0(\omega) \frac{1}{2} \left[e^{i(kz - \omega t + \delta_\omega)} + e^{-i(kz - \omega t + \delta_\omega)} \right] \rightarrow \hat{x}$$

$$A_y^L = \sqrt{2} A_0(\omega) \frac{i}{2} \left[e^{i(kz - \omega t + \delta_\omega)} - e^{-i(kz - \omega t + \delta_\omega)} \right] \rightarrow \hat{y}$$

Combinando

$$\vec{A}^L = \frac{1}{\sqrt{2}} A_0(\omega) \left[e^{i(kz - \omega t + \delta_\omega)} (\hat{x} + i\hat{y}) + e^{-i(kz - \omega t + \delta_\omega)} (\hat{x} - i\hat{y}) \right]$$

Definiamo

$$\hat{e}^L = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad \hat{e}^R = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}) \quad (2.75)$$

$$\vec{A}^L = A_0(\omega) \left[e^{i(kz - \omega t + \delta_\omega)} \hat{e}^L + e^{-i(kz - \omega t + \delta_\omega)} \hat{e}^R \right]$$

↓
assorbimento

↓
emissione

analoga mente

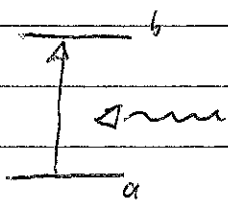
$$\vec{A}^R = A_0(\omega) \left[e^{i(kz - \omega t + \delta_\omega)} \hat{e}^R + e^{-i(kz - \omega t + \delta_\omega)} \hat{e}^L \right]$$

In approssimazione di dipolo avremo per l'ascorbimento
dei termini in polarizzazioni L e R

$$L: \hat{e}^L \cdot \vec{R}_{ba}$$

$$\Delta l = \pm 1$$

$$R: \hat{e}^R \cdot \vec{R}_{ba}$$



$$\begin{array}{c} \text{⊙} \text{ L} \\ (\hat{x} + i\hat{y}) \cdot \vec{R}_{ba} \end{array}$$

$$\downarrow \\ q=1 \quad \text{quindi} \quad \Delta m = +1$$

$$\text{⊙} \text{ R} \quad (\hat{x} - i\hat{y}) \cdot \vec{R}_{ba}$$

$$\downarrow \\ q=-1 \quad \Delta m = -1$$

Si definisce una elicità del fotone corrispondente

al suo spin del fotone, e il fotone che dà il

contributo per il salto del numero quantico m

$$S_{\text{fotone}} \rightarrow S^2 \rightarrow \hbar^2 S(S+1) \quad S_z = \pm \hbar$$

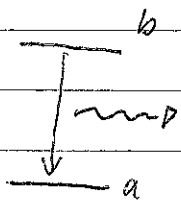
quindi il fotone ha elicità $+\hbar$ con
polarizzazione L e $-\hbar$ con polarizzazione R

Assorbimento

L: $\Delta m = +1$ elicità $+\hbar$

R: $\Delta m = -1$ elicità $-\hbar$

Nel processo di emissione

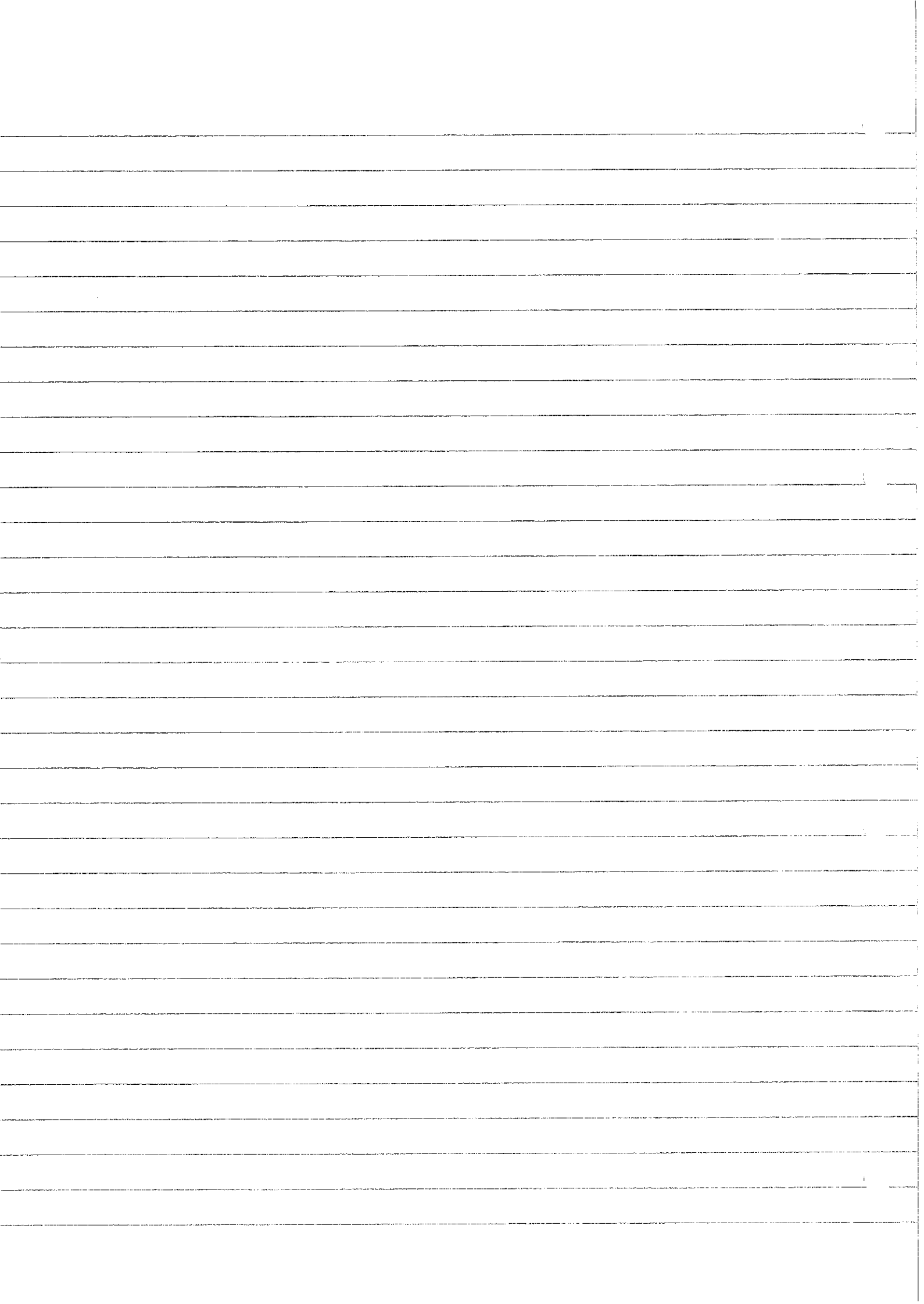


L: $\Delta m = -1$ elicità $+\hbar$

R: $\Delta m = +1$ elicità $-\hbar$

In questo caso il fotone si porta $\pm \hbar$

in corrispondenza con ~~transizione~~ $\Delta m = \mp 1$



Coefficienti di Einstein.

Si vuole descrivere l'equilibrio termodinamico fra radiazione e materia.

Seguiamo l'idea di Einstein e introduciamo dei coefficienti B_{abs} , B_{em} che rappresentano le probabilità per unità di tempo di avere una transizione tra due stati $a \leftrightarrow b$ con $E_b > E_a$ e un coefficiente A_{sp} , la probabilità che lo stato b decada in a .

Con $\rho(\omega_{ba})$ la densità di energia del campo e.m.

con $\omega_{ba} = (E_b - E_a)/\hbar$ il numero di atomi per unità di tempo che compiono la transizione $a \rightarrow b$ sarà dato da

$$\dot{N}_{ba} = N_a B_{abs} \rho(\omega_{ba})$$

con N_a il numero di atomi nel livello a .

Invece il numero di atomi che compiono

La transizione $b \rightarrow a$ sarà nell'unità di tempo

$$\dot{N}_{ab} = N_b A_{sp} + N_b B_{em} g(w_{ba})$$

All'equilibrio

$$\dot{N}_{ba} = \dot{N}_{ab}$$

quindi

$$N_a B_{abs} g(w_{ba}) = N_b A_{sp} + N_b B_{em} g(w_{ba})$$

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{B_{abs} g(w_{ba})}{B_{em} g(w_{ba}) + A_{sp}}$$

Ora vediamo l'effetto della temperatura.

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-E_b/k_B T}}{g_a e^{-E_a/k_B T}} \quad (2.26)$$

dove g_a e g_b sono le degenerazioni dei livelli,

indichiamo con $\beta = 1/k_B T$ il fattore dovuto alle

temperature, abitualmente

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-\beta(E_b - E_a)} = \frac{g_b}{g_a} e^{-\beta \hbar \omega_{ba}}$$

da cui

$$\frac{g_b}{g_a} e^{-\beta \hbar \omega_{ba}} = \frac{B_{abs} \rho(\omega_{ba})}{B_{em} \rho(\omega_{ba}) + A_{sp}}$$

$$B_{em} \rho(\omega_{ba}) + A_{sp} = \frac{g_a}{g_b} e^{\beta \hbar \omega_{ba}} B_{abs} \rho(\omega_{ba})$$

$$\rho(\omega_{ba}) = \frac{A_{sp}}{B_{abs} \frac{g_a}{g_b} e^{\beta \hbar \omega_{ba}} - B_{em}} \quad (2.77)$$

I atomi d'altra parte sono distribuiti

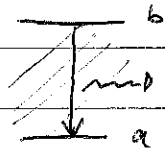
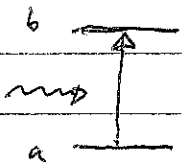
secondo la distribuzione di Planck

$$\rho(\omega_{ba}) = \frac{\hbar \omega_{ba}^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{ba}} - 1} \quad (2.78)$$

$$\rho(\omega_{ba}) = \frac{A_{sp}}{B_{abs} \frac{g_a}{g_b}} \left[\frac{1}{e^{-\frac{h\nu}{kT}} - \frac{g_b}{g_a} \frac{B_{emi}}{B_{abs}}} \right] \quad (2.79)$$

da cui

$$g_a B_{abs} = g_b B_{emi} \quad (2.80)$$



$$A_{sp} = \frac{h \nu_{ba}^3}{\pi^2 c^3} B_{emi} \quad (2.81)$$

Tempo di vita dei livelli, funzione delle energie.

Ogni livello ha un tempo di occupazione finito, detto

life-time. Esiste infatti un' emissione spontanea

determinata dalle probabilità di emissione spontanee del

livello designato b ai possibili livelli k determinata

da W_{kb}^{sp} . Possiamo assumere che il numero di

atomi nel livello b decada come

$$\frac{dN_b(t)}{dt} = -N_b(t) \sum_k W_{kb}^{sp} \quad (2.82)$$

Dal punto di vista fenomenologico si può replicare

la trattazione introducendo il life-time τ

$$\frac{1}{\tau} = \sum_k W_{kb}^{sp} \quad (2.83)$$

dalla (2.83) vediamo che più alta è la probabilità

di transizione più piccolo è il tempo di vita.

Quindi la (2.82) diventa

$$\frac{dN_s}{dt} = -\frac{N_s}{\tau} \quad (2.84)$$

con soluzione

$$N_s(t) = N(0) e^{-t/\tau} \quad (2.85)$$

τ non dipende dal numero quantico m , per dato l

in s e con m

in 10^{-8} s (per l'atomo di idrogeno)

	3s	4s	2p	3p	4p
τ	16	23	0.16	0.54	1.24

Il livello 2s dell'atomo di idrogeno ha un tempo di

vita macroscopico di $\frac{1}{4}$ s, questo è dovuto al fatto

che non può decadere in approssimazione di dipolo

al livello 1s.

Le linee dello spettro di assorbimento o di
emissione a risonanza risente con allargamento intereso
al valore ω_{ba} , perché le energie dei livelli sono
indeterminante secondo un valore \hbar/τ , quindi

$\hbar\omega \approx E_b - E_a$ ci aspettiamo che possa variare in
un range $\frac{\hbar}{\tau_a} + \frac{\hbar}{\tau_b}$.

Per esempi nel trattare una transizione di livelli dove
 $b \rightarrow a$ abbiamo assunto che lo stato di partenza

abbia $C_k(0) = \delta_{bk}$ e sia costante, in realtà:

per $t > 0$ $C_b(t) \approx e^{-t/\tau_b}$, questo

compete che la risonanza di emissione finale

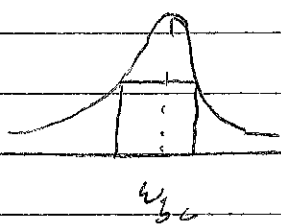
abbia un allargamento per $t \gg \tau_b$ è

la sua forma è proporzionale alla

funzione lorentziana

$$f(\omega) = \frac{\Gamma_b^2 / 4\pi^2}{(\omega - \omega_{b0})^2 + \Gamma_b^2 / 4\pi^2}$$

dove $\Gamma_b = \hbar / \tau_b$



larghezza a semi altezza

$$\Gamma_b / 4\pi$$

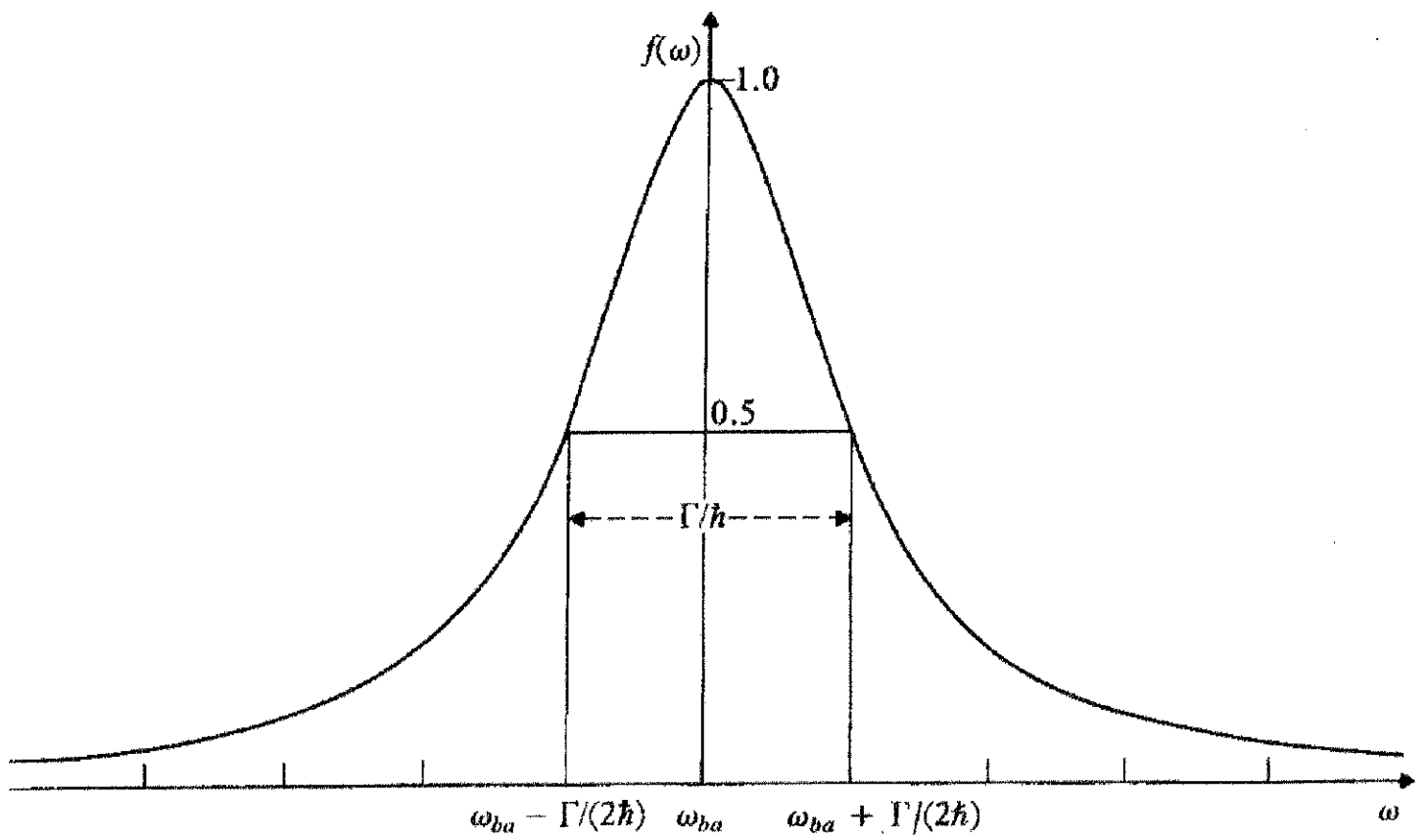
$f(\omega) = \frac{1}{2}$ quando $\omega = \omega_{b0} \pm \frac{1}{2\tau}$

L'allargamento delle righe dipende anche dalle

condizioni di temperatura e pressione che determinano

la frequenza di collisione degli atomi;

Anche l'effetto Doppler contribuisce all'allargamento.



4.5 A plot of the Lorentzian intensity distribution

