Esercizi di analisi complessa

A cura di: Fabio Musso, Orlando Ragnisco.

1 Operazioni con i numeri complessi

I numeri complessi furono introdotti in matematica attraverso lo studio delle radici di polinomi cubici, quando Niccolò Tartaglia ($1500 - 1557$) sviluppò una formula per la soluzione delle equazioni di terzo grado. Infatti, in tale formula potevano apparire radici di numeri negativi, $a$nche nel caso in cui essa venisse applicata a polinomi cubici con le tre radici reali. È questo il caso, per esempio, dell'equazione di terzo grado

$$x^3 - x = 0, \tag{1}$$

che possiede le tre soluzioni reali

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1. \tag{2}$$

In questo caso la formula risolutiva di Tartaglia dà:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(\sqrt{-1}\right)^{1/3} + \frac{1}{\left(\sqrt{-1}\right)^{1/3}} \right) \tag{3}$$

Se si utilizzano per le radici dei numeri negativi le stesse proprietà che valgono per le radici dei numeri positivi ($(\sqrt{-a})^2 = -a$), possiamo scrivere formalmente le radici cubiche di $\sqrt{-1}$ come:

$$\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + \sqrt{-1}\right), \quad -\sqrt{-1}, \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{-1}\right). \tag{4}$$

Sostituendo le tre radici (4) nella formula risolutiva (3), otteniamo esattamente le tre radici reali (2).

Al tempo di Tartaglia le radici di numeri negativi erano considerate esclusivamente un artificio matematico per poter arrivare alle soluzioni reali. Cos'è che rende allora i numeri complessi qualcosa di più di un mero artificio? La proprietà fondamentale è che i numeri complessi formano un campo numerico, come i razionali ed i reali. Infatti, se definiamo i numeri complessi come l'insieme delle espressioni della forma:

$$z = x + iy \qquad \text{con } x, y \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

dove i è l'unità immaginaria ($i^2 = -1$), la somma di due complessi come

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{6}$$

e il loro prodotto come

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{7}$$

tutti gli assiomi di un campo numerico sono soddisfatti (i complessi sono chiusi sotto addizione e moltiplicazione, l'addizione e la moltiplicazione sono associative, commutative, dotate di elemento neutro e di inverso, e, infine, la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione).

Dalla definizione di numero complesso (5), segue che i numeri complessi sono in corrispondenza $1:1$ con le coppie di numeri reali (x, y), dove x prende il nome di "parte reale" del numero complesso z e si denota con $\mathrm{Re}\, z$ mentre y è la sua "parte immaginaria" e si denota con $\mathrm{Im}\, z$. Se immaginiamo tali coppie come punti di un piano (il cosiddetto "piano complesso"), possiamo passare alla rappresentazione polare di un numero complesso, infatti, ponendo

$$\begin{array}{ll} x = \rho\cos(\phi), & \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ y = \rho\sin(\phi), & \mathrm{tg}(\phi) = \dfrac{y}{x}. \end{array} \tag{8}$$

abbiamo:

$$z = x + iy = \rho\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right). \tag{9}$$

ρ prende il nome di "modulo" del numero complesso z (e si indica con $|z|$), e ϕ è il suo "argomento". Poiché ϕ è un angolo, è definito a meno di multipli di 2π. L'insieme dei possibili valori di ϕ si denota con $\mathrm{Arg}\, z$ e il valore per cui

$$0 \le \phi < 2\pi \tag{10}$$

con $\arg z$ e si chiama "determinazione principale" di $\mathrm{Arg}\, z$. Vale perciò la formula

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Introducendo il complesso coniugato $\bar{z}$ di un numero complesso z (5)

$$\bar{z} = x - iy,$$

possiamo scrivere il suo modulo anche nella forma

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}.$$

Utilizzando la formula di Eulero-de Moivre

$$\cos(\phi) + i\sin(\phi) = e^{i\phi} \tag{12}$$

è possibile scrivere la forma polare di un numero complesso come:

$$z = \rho e^{i\phi}, \qquad \rho = |z|, \qquad \phi = \arg z. \tag{13}$$

La formula (12) permette di estendere la definizione dell'esponenziale al campo complesso, avremo infatti:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right). \tag{14}$$

Diversamente dal caso reale, l'estrazione di radice e il logaritmo sono operazioni sempre lecite in campo complesso. Utilizzando la forma polare (13) e il fatto che l'angolo ϕ è definito a meno di multipli di 2π, abbiamo che:

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

L'argomento di $(z^{1/n})_k$ è compreso tra 0 e 2π per $k = 0, \ldots, n-1$, e, inoltre vale $(z^{1/n})_{k+n} = (z^{1/n})_k$ per ogni k, quindi l'equazione (15) definisce gli n punti del piano complesso:

$$w_{k+1} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{i\phi+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, \ldots, n-1, \tag{16}$$

ognuno dei quali è una radice $n-$esima di z.

Per il logaritmo complesso $\mathrm{Ln}(z)$ avremo invece:

$$\mathrm{Ln}(z)_k = \ln\left(\rho e^{i(\phi+2k\pi)}\right) = \ln(\rho) + i\,(\phi + 2k\pi)\,, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

In questo caso i punti del piano complesso definiti dalla (17) sono, in generale, tutti distinti e abbiamo infiniti valori possibili.

Esercizio 1.1 *Calcolare* $(1+i)/(1-i)$.

Per effettuare una divisione tra numeri complessi è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore. Nel nostro caso:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i.$$

Esercizio 1.2 *Calcolare* $\sqrt[3]{i}$.

Passiamo a coordinate polari. i ha modulo 1, quindi dobbiamo risolvere:

$$i = e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi) \Longrightarrow \cos(\phi) = 0 \quad \sin(\phi) = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Ora possiamo usare la formula per le radici ennesime di un numero complesso (16) che nel nostro caso dà le tre soluzioni:

$$w_{k+1} = \exp\left(i\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Abbiamo quindi le tre radici:

$$\begin{aligned}
w_1 &= e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\\
w_2 &= e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\\
w_3 &= e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.3 *Calcolare* $\mathrm{Ln}(-1-\sqrt{3}i)$.

Passiamo nuovamente a coordinate polari:

$$\begin{aligned}
&\rho = \sqrt{(-1-\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)} = 2,\\
&\cos(\phi) = -\frac{1}{2}, \qquad \sin(\phi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \phi = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

Usando la formula (17) per il logaritmo di un numero complesso:

$$\mathrm{Ln}(-1-\sqrt{3}i)_k = \ln(2) + i\left(\frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 1.4 *Calcolare* $(1+i)^i$.

L'elevazione a potenza in campo complesso è la generalizzazione naturale dell'elevazione a potenza in campo reale:

$$(z^w)_k = \exp\left(w\,\mathrm{Ln}(z)_k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Poichè la definizione (18) coinvolge il logaritmo, in generale i punti del piano complesso definiti dall'elevazione a potenza saranno infiniti.

Scriviamo $1+i$ in coordinate polari:

$$1+i = \rho e^{i\phi}$$

con

$$\rho = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{2}$$

Quindi ϕ deve soddisfare l'equazione:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi = \frac{1}{\rho}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

Da cui:

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

Utilizzando la definizione (18), abbiamo quindi

$$\left[(1+i)^i\right]_k = \exp\left[i\,\mathrm{Ln}\,(1+i)_k\right].$$

D'altra parte da (17)

$$\mathrm{Ln}(1+i)_k = \ln\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),$$

quindi

$$(1+i)^i = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\ln\left(\sqrt{2}\right)}.$$

2 Formule di Cauchy–Riemann e applicazioni

Consideriamo ora funzioni nel campo complesso, cioè leggi che associano ai punti di un certo sottoinsieme M del piano complesso, punti di un altro sottoinsieme N. Se z è un punto di M, $w \in N$ sarà la sua "immagine" sotto f se $w = f(z)$. Poiché w è un numero complesso, possiamo scriverlo nella forma $w = u + iv$, definendo in questo modo due funzioni reali delle due variabili reali x e y, che prendono il nome di parte reale e parte immaginaria della funzione $f(z)$:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{19}$$

Nel seguito restringeremo la nostra attenzione a funzioni definite su insiemi aperti e connessi, che prendono il nome di "domini" e che indicheremo con D. La funzione $f(z)$ è continua in $z_0 \in D$ se esiste il limite di $f(z)$ quando z tende a z_0, e questo limite è uguale a $f(z_0)$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{20}$$

Poichè tale limite deve esistere qualunque sia la direzione nel piano complesso lungo cui z tende a z_0, la continuità di $f(z)$ in z_0 implica la continuità di u e v in (x_0, y_0).

La funzione $f(z)$ si dirà derivabile in $z_0 \in D$ e indicheremo la sua derivata con $f'(z_0)$, se esiste, finito, il limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \tag{21}$$

L'esistenza del limite (21) è equivalente a richiedere che le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ siano differenziabili in (x_0, y_0) e vi soddisfino le "Condizioni di Cauchy-Riemann":

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \tag{22}$$

Le condizioni di Cauchy-Riemann (22) sono equivalenti all'annullarsi della derivata parziale di f rispetto al complesso coniugato di z, $\bar{z}$: $\partial f / \partial \bar{z} = 0$. Quindi $f(z)$ è analitica se non dipende da $\bar{z}$ e le sue parti reale e immaginaria sono derivabili.

Se una funzione $f(z)$ è derivabile in un dominio D, allora si dice che f è "analitica" (o "olomorfa") in D. La derivata $f'(z)$ di una funzione analitica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è anch'essa analitica, da cui segue l'esistenza delle derivate parziali seconde di $u(x, y)$, $v(x, y)$. Derivando le condizioni di Cauchy-Riemann, si ottiene che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono funzioni "armoniche":

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{24}$$

Viceversa, data una funzione reale di due variabili reali che sia armonica, è sempre possibile trovare una funzione analitica di cui questa sia la parte reale o immaginaria. Tale funzione è determinata a meno di una costante.

Le condizioni di Cauchy-Riemann implicano inoltre che le curve di livello $u(x,y) =$*cost.* e $v(x,y) =$*cost.* definiscono una rete ortogonale (infatti i gradienti di u e v, che sono ortogonali ai vettori tangenti alle curve di livello, sono ortogonali tra loro).

Esercizio 2.1 *Per quali valori del parametro α la funzione*

$$u(x,y) = \sin x \left(e^{-\alpha y} + e^{y}\right)$$

può essere considerata la parte reale di una funzione analitica $f(z)$? Determinare tali funzioni.

Sappiamo che $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ se e solo se $u(x,y)$ è una funzione armonica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\alpha^2 - 1) \sin x e^{-\alpha y} = 0$$

Quindi i valori ammissibili di α sono ± 1. Per $\alpha = 1$ abbiamo $u(x,y) = 2 \sin x \cosh y$ e risolvendo Cauchy–Riemann per $v(x,y)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow v = 2\cos x \sinh y + f(x) \\
&\frac{\partial v}{\partial x} = -2\sin x \sinh y + f'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2 \sin x \sinh y \Longrightarrow v = 2\cos x \sinh y + k
\end{aligned}$$

Sostituendo quest'espressione in $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ed esprimendo le funzioni trigonometriche e iperboliche in termini di esponenziali di variabile complessa, troviamo:

$$f(z) = i\left(e^{-i(x+iy)} - e^{i(x+iy)} + k\right) = 2\sin z + ik.$$

Se scegliamo $\alpha = -1$ otteniamo $u(x,y) = 2\sin x\, e^{y}$ e da Cauchy–Riemann:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x\, e^{y} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow v = 2\cos x\, e^{y} + f(x) \\
&\frac{\partial v}{\partial x} = -2\sin x\, e^{y} + f'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2\sin x\, e^{y} \Longrightarrow v = 2\cos x\, e^{y} + k
\end{aligned}$$

Sostituendo in $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ troviamo:

$$f(z) = 2e^{y}(\sin x + i\cos x) = 2ie^{y}(\cos x - i\sin x) = 2ie^{y}e^{-ix} = 2ie^{-i(x+iy)} = 2ie^{-iz}$$

Esercizio 2.2 *Dire se la funzione*

$$u(x,y) = e^{x}\frac{x\cos y + y\sin y}{x^2 + y^2}$$

può essere la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ e in caso affermativo determinare $f(z)$.

Notiamo che il denominatore è la parte reale di $z\bar{z}$. Dovrà quindi esistere una funzione $g(z)$, tale che:

$$u(x,y) = \text{Re}\left(\frac{g(z)\bar{z}}{z\bar{z}}\right),$$

così che $u(x,y)$ sia la parte reale di una funzione indipendente da $\bar{z}$. Uguagliando i numeratori:

$$e^x\left(x\cos y + y\sin y\right) = \text{Re}\ \left(g(x+iy)(x-iy)\right)$$

da cui segue:

$$g(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$$

Concludendo:

$$u(x,y) = \text{Re}\left(\frac{e^z}{z} + ik\right)$$

dove e^z/z è una funzione analitica in tutto il piano complesso privato dell'origine.

Esercizio 2.3 *Per quali valori del parametro α la funzione*

$$u(x,y) = e^{\alpha x}\left(\cos^2 y - \sin^2 y\right)$$

può essere considerata la parte reale di una funzione analitica $f(z)$? Determinare tali funzioni.

Esercizio 2.4 *Per quali valori reali di α la funzione*

$$u(x) \;\; = \;\; x^2 + \alpha y^2$$

è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$? Determinare $f(z)$ sapendo che $f(0) = 0$.

Esercizio 2.5 *Caratterizzare le curve di equazione $u(x,y) = c_1$ e quelle di equazione $v(x,y) = c_2$, con $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$, associate alla funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = z^2$.*

Abbiamo che

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Quindi dobbiamo risolvere per

$$u(x,y) = x^2 - y^2 = c_1, \qquad v(x,y) = 2xy = c_2.$$

Notiamo che se consideriamo una rotazione nel piano

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con $\theta = \pi/4$, otteniamo

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y), \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y).$$

Nelle nuove variabili possiamo scrivere la condizione su u nella forma:

$$u(x', y') = 2x'y' = c_1.$$

Vediamo quindi che le curve di livello per $u(x, y)$ sono anch'esse delle iperboli come quelle di $v(x, y)$ ma ruotate di un angolo $\pi/4$ in senso orario.

Risolvendo l'equazione per $u(x, y)$ otteniamo le curve:

$$y = \pm\sqrt{x^2 - c_1}.$$

L'equazione per $v(x, y)$ ci dà invece

$$y = \frac{c_2}{2x}.$$

Sappiamo, dalle formule di Cauchy-Riemann, che le curve di livello della parte reale e della parte immaginaria di una funzione analitica formano tra loro reti ortogonali. Verifichiamolo esplicitamente in questo caso usando le espressioni che abbiamo trovato per $u(x, y)$, $v(x, y)$. A questo scopo calcoleremo i vettori tangenti alle curve di livello nello stesso punto e mostreremo che sono ortogonali. Le curve di livello $u(x, y) = c_1$ hanno la forma parametrica:

$$\gamma_u(t; c_1) = \left(t, \pm\sqrt{t^2 - c_1}\right), \tag{25}$$

mentre quelle di $v(x, y) = c_2$ hanno la forma:

$$\gamma_v(t; c_2) = \left(t, \frac{c_2}{2t}\right). \tag{26}$$

Consideriamo un generico punto del piano complesso (x_0, y_0). La curva γ_u passa per (x_0, y_0) quando $t = x_0$, $c_1 = x_0^2 - y_0^2$ e dobbiamo scegliere il segno più o meno in (25) in accordo col segno di y_0. La curva $\gamma_v(t; c_2)$ passa per lo stesso punto quando $t = x_0$, $c_2 = x_0 y_0$. Il vettore tangente alla curva $\gamma_u(t)$ in (x_0, y_0) è quindi dato da:

$$\begin{aligned} \gamma_u'(t; c_1)|_{(x_0,y_0)} &= \left(1, \operatorname{sgn}(y_0)\frac{t}{\sqrt{t^2 - c_1}}\right)\Bigg|_{t=x_0, c_1=x_0^2-y_0^2} = \\ &= \left(1, \operatorname{sgn}(y_0)\frac{x_0}{|y_0|}\right) = \left(1, \frac{x_0}{y_0}\right) \end{aligned}$$

Il vettore tangente alla curva $\gamma_v(t)$ in (x_0, y_0) è invece dato da

$$\gamma_v'(t, c_2)|_{(x_0,y_0)} = \left(1, -\frac{c_2}{t^2}\right)\Bigg|_{t=x_0, c_2=x_0 y_0} = \left(1, -\frac{y_0}{x_0}\right).$$

Abbiamo quindi:

$$\gamma_u'(t, c_1)|_{(x_0,y_0)} \cdot \gamma_v'(t, c_2)|_{(x_0,y_0)} = 0.$$

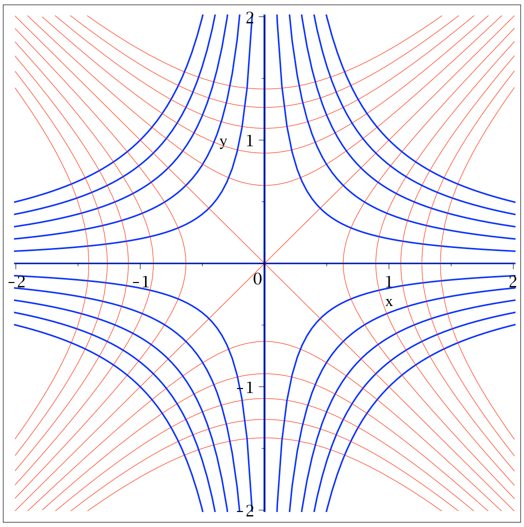


Figura 1: Alcune curve di livello per $u(x,y) = c$ (linee sottili) e $v(x,y) = c$ (linee spesse).

Esercizio 2.6 *Sia $f(z)$ una funzione intera e*

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u(x,y) = [x(\cos x - \sin x) - y(\cos x + \sin x)]e^{-y}.$$

Calcolare la funzione

$$g(z) = \frac{d}{dz} f(z).$$

Per ipotesi la funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è intera e quindi analitica in tutto il piano complesso. Ne segue che per ogni $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ il limite:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)} = f'(z_0)$$

sarà indipendente dalla direzione con la quale z tende a z_0. Possiamo quindi calcolare il limite lungo la direzione $y = y_0 = cost.$ parallela all'asse x:

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y_0) - v(x_0,y_0))}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Poichè $f(z)$ è analitica, varranno le condizioni di Cauchy–Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Utilizzando la seconda condizione, possiamo scrivere $f'(z_0)$ esclusivamente in funzione delle derivate prime di $u(x,y)$:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Nel nostro caso avremo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -(1+i)(x+iy-i)(\sin x - i\cos x)e^{-y}$$

Dalla formula di Eulero:

$$(\sin x - i\cos x) = -ie^{ix}$$

Quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = i(1+i)(x+iy-i)e^{i(x+iy)} = (1+i)(iz-1)e^{iz} = f'(z).$$

Esercizio 2.7 *Trovare la soluzione $u(x,y)$ del problema di Dirichlet:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (x^2+y^2 < R^2) \tag{27}$$

$$u(x,y) = \cos^2(\theta) \qquad \left(x^2+y^2 = R^2, \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \tag{28}$$

La condizione (27) ci dice che la funzione $u(x,y)$ è la parte reale di una funzione analitica per $|z| < R$, quindi se riuscissimo a scrivere $\cos^2(\theta)$ come la restrizione al cerchio di raggio R della parte reale di una funzione analitica avremmo risolto l'esercizio. Se $|z| = R$, possiamo scrivere

$$z = Re^{i\theta} = R\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

Elevando al quadrato

$$z^2 = R^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta\right) = R^2\left(2\cos^2\theta - 1 + 2i\cos\theta\sin\theta\right),$$

quindi

$$\operatorname{Re} z^2 = R^2\left(2\cos^2\theta - 1\right), \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = \operatorname{Re}\left(\frac{z^2+R^2}{2R^2}\right).$$

Ponendo $z = x + iy$ nella espressione per $\cos^2\theta$ otteniamo la soluzione del problema di Dirichlet:

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2+R^2}{2R^2}.$$

Esercizio 2.8 *Caratterizzare le curve di equazione $u =$ cost e quelle di equazione $v =$ cost associate alla funzione $f(z) = Ln(z)$.*

Esercizio 2.9 *Scrivere l'analogo delle condizioni differenziali di Cauchy–Riemann per le funzioni $f(\bar{z})$ della variabile complessa $\bar{z} = x - iy$. Sotto quali condizioni vale $f(\bar{z}) = \bar{f}(z)$? (specificare in termini di* $\operatorname{Re}(f)$ *e* $\operatorname{Im}(f)$*).*

Esercizio 2.10 *Per quali valori del parametro α le seguenti funzioni possono essere considerate la parte reale di una funzione analitica?*

1. $u_1(x, y) = \cosh(x)\cos(\alpha y)$
2. $u_2(x, y) = \dfrac{x^\alpha}{x^2 + y^2}$

Esercizio 2.11 *Dire se le funzioni di variabile complessa:*

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{x + 3iy}{x^2 + y^2}, \\ f_2(z) &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

sono analitiche.

Esercizio 2.12 *Dimostrare che la famiglia di curve:*

$$r^n \cos(n\theta) = cost$$
$$r^n \sin(n\theta) = cost$$

costituisce una rete ortogonale.

Esercizio 2.13 *Caratterizzare le curve di equazione $|w| = cost$ e quelle di equazione $arg(w) = cost$ associate alla funzione $w = e^z$. Costituiscono reti ortogonali?*

Esercizio 2.14 *Determinare la famiglia di funzioni analitiche la cui parte reale è data da:*

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 2.15 *Per quale valore del parametro α la seguente funzione è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$?*

$$u(x, y) = x\, \sin(x)\, \cosh(y) + \alpha\, y\, \cos(x)\, \sinh(y)$$

Determinare $f(z)$ a meno di una costante immaginaria e fissare tale costante richiedendo che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = 2 + i\pi$$

3 Integrali curvilinei

Consideriamo ora l'integrazione delle funzioni di variabile complessa su curve γ nel piano complesso che, se non altrimenti specificato, supporremo sempre rettificabili e prive di autointersezioni (curve di Jordan). Sia $z(t)$, $a \leq t \leq b$, l'equazione parametrica della curva γ e sia $t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$ una partizione del segmento $[a, b]$ cui corrisponde la partizione di γ in archi γ_k di estremi $z_{k-1} = z(t_{k-1})$ e $z_k = z(t_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Indichiamo con μ la massima ampiezza degli intervalli definiti su $[a, b]$:

$$\mu = \max_{k=1,\ldots,n} |t_k - t_{k-1}| \, ,$$

e con $\zeta_k = z(\tau_k)$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ un punto appartenente a γ_k. Allora l'integrale della funzione $f(z)$ lungo la curva γ è definito come:

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\mu\to 0} \sum_{k=1}^{n(\mu)} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}), \tag{29}$$

con $\mu \, n(\mu)$ limitato. L'integrale esiste se tale limite esiste ed è indipendente dalla scelta della partizione $t_0, \ldots, t_n$ e dei punti ζ_k. 0 In particolare, se la curva γ possiede lunghezza finita e la funzione $f(z)$ è continua su γ, l'integrale esiste sempre.

Se poniamo $f = u + iv$, $z_k = x_k + iy_k$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \lim_{\mu\to 0} \sum_{k=1}^{n(\mu)} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \\
&= \lim_{\mu\to 0} \sum_{k=1}^{n(\mu)} u(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) + \\
&\qquad + i \lim_{\mu\to 0} \sum_{k=1}^{n(\mu)} v(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) = \\
&= \int_\gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i \int_\gamma (v(x,y)dx + u(x,y)dy) \, . \qquad (30)
\end{aligned}$$

Vediamo quindi che l'integrazione lungo un cammino nel piano complesso si riduce all'integrazione lungo il corrispondente cammino mel piano reale di funzioni reali di due variabili reali. Inoltre, se la curva γ è derivabile a tratti, l'integrale (29) si riduce al calcolo di un integrale definito di una funzione complessa di variabile reale:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b \alpha(t)dt + i \int_a^b \beta(t)dt, \tag{31}$$

con

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t), \\
\beta(t) &= u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t).
\end{aligned}$$

Se la curva γ è chiusa, denotando con $I(\gamma)$ il dominio interno ad essa (cioè il dominio contenuto a sinistra della curva rispetto al verso di percorrenza) e assumendo che le funzioni u e v abbiano derivate prime continue, possiamo utilizzare per (30) il lemma di Green nel piano e ottenere:

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{I(\gamma)} dx \wedge dy \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i \int_{I(\gamma)} dx \wedge dy \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = $$
$$= \int_{I(\gamma)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge z. \tag{32}$$

L'equazione (32), oltre ad essere uno strumento utile per calcolare integrali complessi su curve chiuse, ci mostra che se $f(z)$ è analitica in $I(\gamma)$ e continua sulla curva, allora il suo integrale lungo γ si annulla. Questo segue dalle condizioni di Cauchy-Riemann (22).

Se denotiamo con $-\gamma$ la curva γ percorsa in verso opposto, ossia facendo variare t in $z(t)$ da b ad a, con L la sua lunghezza e denotiamo con $M = \max_{z\in\gamma} |f(z)|$, allora per l'integrale (29) (quando esiste) valgono le seguenti proprietà:

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz, \tag{33}$$
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M \cdot L. \tag{34}$$

La proprietà (34) è nota come "disuguaglianza di Darboux".

Una nozione particolarmente utile per l'integrazione di funzioni di variabile complessa è quella di "valor principale". Sia γ un arco di estremi α e β e sia $f(z)$ una funzione continua su γ ad eccezione di un punto interno $\zeta \in \gamma$ in cui $f(z)$ diverge. Consideriamo una circonferenza centrata in ζ di raggio ϵ abbastanza piccolo di modo che la circonferenza intersechi la curva γ nei due soli punti ζ'_ϵ e ζ''_ϵ, con ζ'_ϵ tale che ζ non è contenuto nel tratto dell'arco che va da α a ζ'_ϵ. L'integrale improprio di $f(z)$ su γ esiste se esistono separatamente i limiti

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\alpha^{\zeta'_\epsilon} f(z')dz', \qquad \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\zeta''_\epsilon}^{\beta} f(z')dz'.$$

Quando invece i due limiti divergono separatamente ma esiste il limite della loro somma, tale limite prende il nome di valor principale di $f(z)$ su γ:

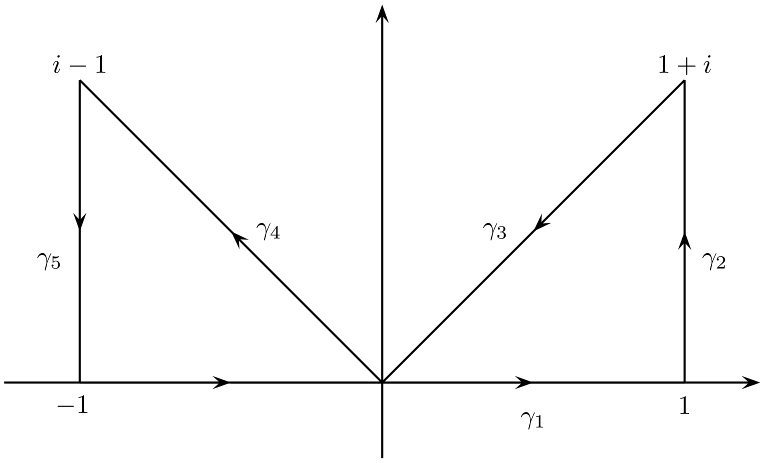
$$P\int_\gamma f(z')dz' := \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_\alpha^{\zeta'_\epsilon} f(z')dz' + \int_{\zeta''_\epsilon}^{\beta} f(z')dz'\right). \tag{35}$$

Esercizio 3.1 *Calcolare*

$$\oint_\Gamma dz\, |z|^2$$

dove Γ *il cammino chiuso, simmetrico rispetto all'asse immaginario e percorso in senso antiorario, definito dalle condizioni:*

$$\begin{array}{cc} y = 0 & -1 \leq x \leq 1, \\ x = 1 & 0 \leq y \leq 1, \\ y = x & 0 \leq x \leq 1, \\ y = -x & -1 \leq x \leq 0, \\ x = -1 & 0 \leq y \leq 1. \end{array}$$



Dividiamo la curva Γ nei cinque cammini differenziabili indicati in figura. L'equazione parametrica di γ_1 è:

$$z(t) = t, \qquad |z(t)|^2 = t^2, \qquad dz(t) = dt, \qquad -1 \le t \le 1, \tag{36}$$

quindi

$$\int_{\gamma_1} |z|^2 \, dz = \int_{-1}^{1} t^2 \, dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}. \tag{37}$$

Su γ_2 avremo:

$$z(t) = 1 + it, \qquad |z(t)|^2 = 1 + t^2, \qquad dz(t) = idt, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{38}$$

da cui

$$\int_{\gamma_2} |z|^2 \, dz = i \int_{0}^{1} (1 + t^2) \, dt = i \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{0}^{1} = \frac{4}{3} i. \tag{39}$$

Per γ_3 possiamo scrivere:

$$z(t) = (1 + i)t, \qquad |z(t)|^2 = 2t^2, \qquad dz(t) = (1 + i)dt, \qquad 1 \ge t \ge 0, \tag{40}$$

quindi

$$\int_{\gamma_3} |z|^2 \, dz = 2(i + i) \int_{1}^{0} t^2 \, dt = \frac{2}{3} (1 + i) t^3 \Big|_{1}^{0} = -\frac{2}{3} (1 + i). \tag{41}$$

La curva γ_4 è descritta da

$$z(t) = (i - 1)t, \qquad |z(t)|^2 = 2t^2, \qquad dz(t) = (i - 1)dt, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{42}$$

per cui

$$\int_{\gamma_4} |z|^2 \, dz = 2(i - 1) \int_{0}^{1} t^2 \, dt = \frac{2}{3} (i - 1) t^3 \Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3} (i - 1). \tag{43}$$

Infine, per la curva γ_5 abbiamo

$$z(t) = -1 + it, \qquad |z(t)|^2 = 1 + t^2, \qquad dz(t) = idt, \qquad 1 \ge t \ge 0, \tag{44}$$

quindi

$$\int_{\gamma_5} |z|^2 \, dz = i \int_1^0 (1+t^2)\, dt = i \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_1^0 = -\frac{4}{3} i. \tag{45}$$

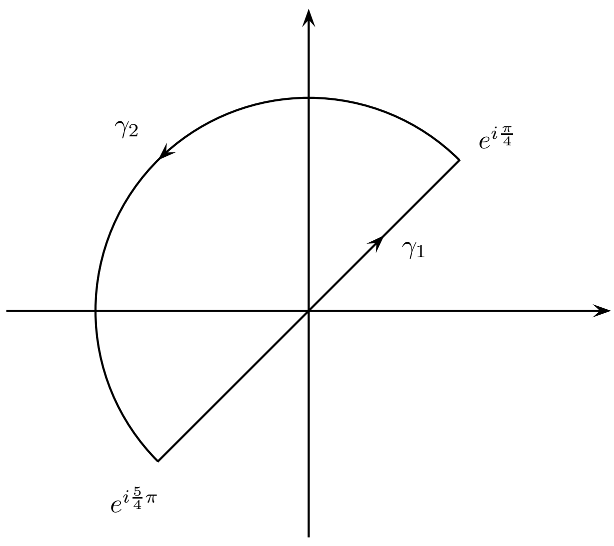
Sommando i cinque contributi otteniamo

$$\oint_\Gamma dz \, |z|^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} i - \frac{2}{3}(1+i) + \frac{2}{3}(i-1) - \frac{4}{3} i = -\frac{2}{3} \tag{46}$$

Esercizio 3.2 *Calcolare l'integrale*

$$\oint_\gamma dz \frac{\operatorname{Im} z}{4z^2+1}$$

sul cammino chiuso, percorso in senso antitorario, costituito dal segmento che congiunge i punti diametralmente opposti $\exp(i\pi/4), \exp(i5\pi/4)$ *del piano complesso e da una semicirconferenza di centro* O *e raggio* 1.



Possiamo dividere il cammino γ nei due cammini differenziabili γ_1 e γ_2. L'equazione parametrica della curva γ_1 è data da

$$z(t) = (1+i)t, \qquad dz = (1+i)dt, \qquad \operatorname{Im} z(t) = t, \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} \le t \le \frac{1}{\sqrt{2}},$$

quindi

$$\int_{\gamma_1} dz \frac{\operatorname{Im} z}{4z^2+1} = (1+i) \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt \left[\frac{t}{4\,(t+it)^2+1} \right]. \tag{47}$$

Poiché la funzione integranda è dispari, l'integrale su γ_1 si annulla.

Notiamo che su γ_2 abbiamo $z(\phi) = e^{i\phi}$ e quindi

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{48}$$

Possiamo quindi riscrivere l'integrale come:

$$\int_{\gamma_2} dz \frac{\operatorname{Im} z}{4z^2+1} = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_2} dz \left(z - \frac{1}{z}\right)\frac{1}{4z^2+1} \tag{49}$$

La funzione integranda nel lato destro dell'equazione (49) è analitica su γ_2, quindi esiste la funzione primitiva ed il valore dell'integrale dipende solo dagli estremi di integrazione, per cui possiamo scrivere:

$$\int_{\gamma_2} dz \left(z - \frac{1}{z}\right)\frac{1}{4z^2+1} = \int_{e^{i\frac{\pi}{4}}}^{e^{i\frac{5}{4}\pi}} dz \frac{z}{4z^2+1} - \int_{e^{i\frac{\pi}{4}}}^{e^{i\frac{5}{4}\pi}} dz \frac{1}{z(4z^2+1)} = I_1 - I_2 \tag{50}$$

Abbiamo che:

$$I_1 = \frac{1}{8}\ln\left(4z^2+1\right)\Big|_{e^{i\frac{\pi}{4}}}^{e^{i\frac{5}{4}\pi}} = 0. \tag{51}$$

Per calcolare I_2 sviluppiamo la funzione integranda in fratti, cioè cerchiamo due costanti A e B tali che:

$$\frac{1}{z(4z^2+1)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz}{4z^2+1} = \frac{z^2(4A+B)+A}{z(4z^2+1)}. \tag{52}$$

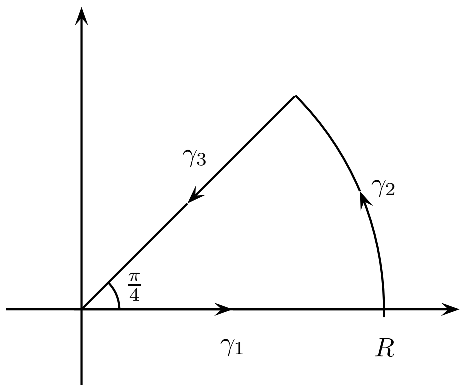
La soluzione di (52) è ovviamente $A = 1$, $B = -4$, quindi:

$$I_2 = \int_{e^{i\frac{\pi}{4}}}^{e^{i\frac{5}{4}\pi}} dz \left[\frac{1}{z} - \frac{4z}{(4z^2+1)}\right] = \ln(z) - \frac{1}{2}\ln(4z^2+1)\Big|_{e^{i\frac{\pi}{4}}}^{e^{i\frac{5}{4}\pi}} = i\pi. \tag{53}$$

Ricordando che l'integrale su γ_1 si annulla e utilizzando i valori trovati per I_1 (51) e I_2 (53), otteniamo infine:

$$\oint_{\gamma} dz \frac{\operatorname{Im} z}{4z^2+1} = \frac{1}{2i}(I_1 - I_2) = -\frac{\pi}{2} \tag{54}$$

Esercizio 3.3 *Integrare le funzione* $|z|$ *sullo spicchio di cerchio delimitato dal segmento di estremi* 0 *e* R *dell'asse reale e dalla bisettrice del I quadrante.*



Il cammino chiuso γ può essere separato nelle tre curve differenziabili γ_1, γ_2 e γ_3. L'equazione parametrica di γ_1 è $z(r) = r$, $0 \leq r \leq R$, per cui avremo $|z(r)| = r$, $dz = dr$, quindi

$$\int_{\gamma_1} |z| dz = \int_0^R r dr = \frac{R^2}{2}. \tag{55}$$

L'equazione parametrica di γ_2 è $z(\phi) = R\exp(i\phi)$, $0 \leq \phi \leq \pi/4$, per cui $|z(\phi)| = R$, $dz = iR\exp(i\phi)d\phi$, quindi

$$\int_{\gamma_2} |z| dz = i \int_0^{\pi/4} R^2 e^{i\phi} d\phi = R^2 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right). \tag{56}$$

Infine, l'equazione parametrica di γ_3 è $z(r) = r\exp(i\pi/4)$, $R \geq r \geq 0$, per cui $|z(r)| = r$, $dz = \exp(i\pi/4)dr$, quindi

$$\int_{\gamma_3} |z| dz = \int_R^0 r e^{i\frac{\pi}{4}} dr = -\frac{R^2}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}. \tag{57}$$

Sommando i tre integrali otteniamo:

$$\int_{\gamma} |z| dz = \frac{R^2}{2} + R^2 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right) - \frac{R^2}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{R^2}{2} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right) \tag{58}$$

Alternativamente, possiamo calcolare l'integrale utilizzando il lemma di Green (32). Nel caso di $|z|$ abbiamo $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = 0$, per cui sostituendo in (32)

$$\int_{\gamma} |z| dz = -\int_{I(\gamma)} dx \wedge dy \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \int_{I(\gamma)} dx \wedge dy \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{59}$$

Conviene passare a coordinate polari:

$$x = r\cos(\phi), \qquad y = r\sin(\phi) \qquad dx \wedge dy = r\, dr \wedge d\phi. \tag{60}$$

Sostituendo (60) dentro (59) e notando che $I(\gamma)$ si ottiene facendo variare r tra 0 e R e ϕ tra 0 e $\pi/4$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma |z|dz &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\phi)d\phi\int_0^R rdr + i\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\phi)d\phi\int_0^R rdr = \\ &= \frac{R^2}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{R^2}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right)\end{aligned}$$

Esercizio 3.4 *Determinare sotto quali condizioni su* $\mu,\ \beta \in \mathbb{C}$ *risulta definito il seguente integrale:*

$$I = \int_0^1 x^{\mu-1}\cos(\beta\ln x)\,dx$$

e calcolarne il valore.

Riscriviamo l'integrale nella forma:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{\mu-1}\cos(\beta\ln x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x}e^{\mu\ln x}\left(e^{i\beta\ln x} + e^{-i\beta\ln x}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 d(\ln x)e^{(\mu+i\beta)\ln x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}e^{(\mu-i\beta)\ln x}\right] &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Facciamo il cambiamento di variabile $\ln x = t$ e otteniamo:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 dt\left[e^{(\mu+i\beta)t} + e^{(\mu-i\beta)t}\right].$$

Dobbiamo ora determinare quando esiste il limite

$$\lim_{c\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{-c}^0 dt\left[e^{(\mu+i\beta)t} + e^{(\mu-i\beta)t}\right] = \frac{1}{2}\lim_{c\to-\infty}\left(\frac{e^{(\mu+i\beta t)}}{\mu+i\beta} + \frac{e^{(\mu-i\beta)t}}{\mu-i\beta}\right)\Bigg|_c^0. \quad (61)$$

Chiaramente se $\mu = \pm i\beta$, l'integrale è divergente. Il limite (61) esiste quando sono soddisfatte le due condizioni:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mu+i\beta) > 0 &\implies \mathrm{Re}\mu > \mathrm{Im}\beta \\ \mathrm{Re}(\mu-i\beta) > 0 &\implies \mathrm{Re}\mu > -\mathrm{Im}\beta\end{aligned}$$

Entrambe le condizioni possono essere riassunte nell'unica condizione $\mathrm{Re}\,\mu > |\mathrm{Im}\,\beta|$. Quando questa condizione è verificata, l'integrale vale:

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu+i\beta} + \frac{1}{\mu-i\beta}\right) = \frac{\mu}{\mu^2+\beta^2}.$$

Esercizio 3.5 *Calcolare l'integrale*

$$\oint_\gamma dz\frac{\mathrm{Re}\,z}{4z^2+1}$$

sul cammino chiuso costituito dal segmento $[-1,1]$ *dell'asse reale e dalla semicirconferenza di centro* O *e raggio* 1 *del semipiano superiore, percorso in senso antiorario.*

Esercizio 3.6 *Integrare la funzione $f(z) = 1/\bar{z}$ sul cammino dato dalla circonferenza di centro O e raggio 2 percorso in senso antiorario.*

Esercizio 3.7 *Integrare la funzione $|z|^2$ sullo spicchio di cerchio di centro 0 e raggio R delimitato dal segmento $[0, iR]$ dell'asse immaginario e dalla bisettrice del II quadrante.*

Esercizio 3.8 *Calcolare l'integrale delle funzioni:*

$$f_1(z) = \frac{\mathrm{Re}z}{z^2+1}; \quad f_2(z) = \frac{\mathrm{Im}z}{z^2+1}$$

sul cammino chiuso costituito dal segmento (-1,1) dell'asse reale e dai due segmenti congiungenti rispettivamente i punti -1 e 1 con il punto $\frac{3}{2}i$. Confrontare il risultato con il valore assunto, sullo stesso cammino dall'integrale della funzione $f(z) = (z^2+1)^{-1}$.

Esercizio 3.9 *Calcolare l'integrale delle funzioni*

$$F_1(z) = \frac{\mathrm{Re}\, z^2}{z}$$
$$F_2(z) = \frac{\mathrm{Im}\, z^2}{z}$$

sul cammino chiuso che si ottiene considerando gli archi di circonferenza di centro l'origine e raggi $r = 1$ e $r = 2$ e di aperture $\pi/2$ nel I quadrante, il segmento $(1, 2)$ sull'asse reale e il segmento $(2i, i)$ sull'asse immaginario.

4 Sviluppi in serie

Consideriamo una serie di funzioni analitiche in un dominio D semplicemente connesso, che denotiamo con $S(z)$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad z \in D, \qquad f_n(z) \text{ analitiche in } D. \tag{62}$$

Se la serie converge uniformemente, allora la funzione $S(z)$ è analitica in D, inoltre, se le funzioni $f_k(z)$ sono continue in $D \cup \partial D$ e la serie è uniformemente convergente anche su $D \cup \partial D$, allora può essere derivata indefinitamente termine a termine:

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=0} f_n^{(k)}(z). \tag{63}$$

Consideriamo una serie di potenze centrata nel punto z_0:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{64}$$

Ovviamente la (64) è un caso particolare della (62) e per essa valgono tutte le proprietà già menzionate, inoltre abbiamo che la serie (64) converge nel cerchio

$$|z - z_0| < R, \qquad \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{65}$$

e la convergenza è assoluta e uniforme in ogni dominio chiuso contenuto in tale cerchio e di conseguenza vi definisce una funzione analitica. Se invece $|z - z_0| > R$, la serie (64) è assolutamente divergente. La formula (65) per stimare il raggio di convergenza è nota come formula di Cauchy-Hadamard.

Un'altra maniera di stimare il raggio di convergenza di una serie di potenze è attraverso il criterio del rapporto: la serie $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

e diverge se invece tale limite è maggiore di 1. Utilizzando questo risultato per le serie di potenze (64), avremo che la serie converge quando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(z - z_0)^{n+1}|}{|c_n (z - z_0)^n|} < 1 \quad \Longrightarrow \quad |z - z_0| < \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = R. \tag{66}$$

Possiamo ora domandarci quando una funzione analitica possa essere rappresentata attraverso una serie di potenze. Sappiamo già che una funzione analitica è infinitamente derivabile nel suo dominio di analiticità; abbiamo inoltre che una funzione $f(z)$, analitica in un dominio D, ammette sviluppo di Taylor in ogni punto z_0 interno a D

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \frac{1}{2!}(z - z_0)^2 f''(z_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n \tag{67}$$

e il raggio R di convergenza della serie di potenze (67) può essere stimato, oltre che con la formula di Cauchy-Hadamard (65) o il criterio del rapporto (66), misurando la distanza tra il punto z_0 e il più vicino punto di singolarità della funzione $f(z)$. Per quanto detto a proposito delle serie di potenze, la serie di Taylor (67) converge assolutamente e uniformemente in ogni dominio chiuso contenuto nel cerchio di raggio R.

Se, dati r e R, la funzione $f(z)$ non è analitica nell'intorno circolare $|z-z_0| < r$ ma lo è nella corona circolare $C(r, R)$ definita da $r < |z-z_0| < R$, allora, per ogni $z \in C(r, R)$, $f(z)$ è sviluppabile in serie di Laurent secondo la formula:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \tag{68}$$

dove γ è un'arbitraria curva chiusa interna alla corona $C(r, R)$, e lo sviluppo è uniformemente convergente in ogni dominio chiuso ivi contenuto. Analogamente al caso analitico, r è la massima distanza tra z_0 e un punto di non analiticità z' di $f(z)$ tale che $|z'-z_0| < |z-z_0|$, mentre R è la minima distanza tra z_0 e un punto di non analiticità z'' di $f(z)$ tale che $|z''-z_0| > |z-z_0|$.

Esercizio 4.1 *Sviluppare in serie di potenze la funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{4z^2+1}$$

nei domini:

1. $|z| > 1/2$
2. $|z| < 1/2$
3. $|z - i/2| < 1$

specificando il raggio di convergenza.

Determiniamo innanzitutto i punti di non analiticità di $f(z)$, cioè gli zeri del suo denominatore.

$$4z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{\frac{-1}{4}} \quad \Rightarrow \quad z = \pm\frac{i}{2}$$

1. Se $|z| > 1/2$, allora varrà $|4z^2| > 1$ e invertendo:

   $$\left|\frac{1}{4z^2}\right| < 1.$$

   Conviene allora dividere numeratore e denominatore di $f(z)$ per $4z^2$ in modo da ricondursi alla somma della seria geometrica:

   $$f(z) = \frac{z}{4z^2+1} = \frac{z}{4z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{4z^2}} = \frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^{-2n-1}$$

   Poiché la serie geometrica converge uniformemente quando il suo argomento è di modulo minore di uno, lo sviluppo convergerà in tutto il dominio $|z| > 1/2$.

2. Se $|z| < 1/2$, allora varrà $|4z^2| < 1$ e utilizzando nuovamente la serie geometrica:

$$f(z) = \frac{z}{4z^2+1} = z\sum_{n=0}^{\infty}(-4z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n z^{2n+1}$$

La serie convergerà in tutto il dominio $|z| < 1/2$ per le ragioni esposte sopra.

3. Il punto $z = i/2$ è uno dei punti di non analiticità di $f(z)$ (è un polo del primo ordine). Dobbiamo quindi imporre $|z - i/2| > 0$. Notiamo che possiamo fattorizzare la funzione $f(z)$ nella forma:

$$f(z) = z\,\frac{1}{z-i/2}\,\frac{1}{z+i/2}$$

Dato che il dominio in cui dobbiamo sviluppare $f(z)$ è un anello centrato in $z = i/2$, dobbiamo scrivere la serie in potenze di $z - i/2$. Sviluppiamo ognuno dei tre fattori singolarmente:

$$z = (z - i/2) + i/2$$

Il secondo fattore è già nella forma voluta. Per quanto riguarda il terzo, ci riconduciamo nuovamente alla somma della serie geometrica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+i/2} &= \frac{1}{z-i/2+i} = \frac{-i}{1-i(z-i/2)} = -i\sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i/2)^n \\ &\text{per} \qquad |i(z-i/2)| = |z-i/2| < 1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f(z) &= ((z-i/2)+i/2)\,\frac{1}{z-i/2}\left(-i\sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i/2)^n\right) = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z-i/2)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{2}\,(z-i/2)^n \end{aligned}$$

e lo sviluppo converge nella corona circolare $0 < |z - i/2| < 1$.

Esercizio 4.2 *Usando la formula di Cauchy-Hadamard (**??**):*

1. *calcolare il raggio di convergenza della serie*

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$$

;

2. *dimostrare che vale l'equazione differenziale*

$$S''(z) + \frac{S'(z)}{z} = \frac{1}{z(1-z)}.$$

1. Dalla formula di Cauchy-Hadamard avremo:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln(\frac{1}{n^2})}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{2\ln(n)}{n}\right)$$

   Dimostriamo che vale:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \tag{69}$$

   da cui segue che varrà anche:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

   Per dimostrare (69) consideriamo la funzione:

$$\frac{\ln(x)}{x^k} \qquad 0 < k < 1$$

   e facciamo vedere che per x maggiore di un dato x_0 è limitata. Infatti:

$$\frac{d}{dx}\frac{\ln(x)}{x^k} = \frac{1 - k\ln(x)}{x^{k+1}} < 0 \qquad \text{per } x > e^{\frac{1}{k}}$$

   D'altra parte il logaritmo di x è positivo per $x > 1$ (e 1 è minore di $e^{1/k}$), quindi:

$$0 < \frac{\ln(x)}{x^k} < \left(\frac{1}{ke}\right) \qquad \text{per } x > e^{\frac{1}{k}}$$

   In conclusione:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^k}\frac{1}{x^{1-k}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^k} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-k}} = 0, \tag{70}$$

   perché abbiamo dimostrato che il primo limite nell'ultimo membro di (70) è finito ed il secondo tende a zero visto che $k < 1$. Quindi dalla formula di Cauchy-Hadamard segue che il raggio di convergenza della serie è $R = 1$.

2. Sappiamo che in qualunque dominio chiuso contenuto all'interno della circonferenza $|z| < 1$ la serie converge uniformemente. Per calcolare la derivata di $S(z)$ possiamo quindi derivare la serie termine a termine:

$$S'(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz}\frac{z^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

   Il raggio di convergenza di questa serie è ancora $R = 1$, quindi possiamo calcolare $S''(z)$ derivando termine a termine la serie di $S'(z)$ per $|z| < 1$:

$$S''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz}\frac{z^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} z^{n-2}$$

   Quindi, in qualunque dominio chiuso contenuto nel cerchio $|z| < 1$:

$$S''(z) + \frac{S'(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} z^{n-2} + \frac{z^{n-2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-2} = \frac{1}{z}\sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z}.$$

Esercizio 4.3 *Determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di $z_0 = 1$ della funzione:*

$$f(z) = \frac{z \sin(z\pi/2)}{z-1}.$$

Dire in quale regione del piano complesso lo sviluppo in serie converge.

$f(z)$ ha come unica singolarità al finito il punto $z = 1$. Il suo sviluppo di Laurent convergerà quindi in tutto il piano complesso aperto ad eccezione del punto $z_0 = 1$, ossia nella regione $|z-1| > 0$.

Dobbiamo scrivere $f(z)$ come una serie di potenze in $z-1$. Notiamo che il termine $(z-1)^{-1}$ è già nella forma desiderata. Lo sviluppo di Taylor di z nel punto $z_0 = 1$ è dato da:

$$z = 1 + (z-1)$$

Abbiamo quindi:

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\,(1 + (z-1)) \sin\left[\frac{(z-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$$

D'altra parte

$$\sin\left[\frac{(z-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[\frac{(z-1)\pi}{2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{1}{2n!}\,(z-1)^{2n}$$

In conclusione, per $|z-1| > 0$:

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{1}{2n!}\,(z-1)^{2n} = \sum_{n=-1}^{i} nftyc_n (z-1)^n$$

$$c_n = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} & \text{n dispari} \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n} \frac{1}{(n)!} & \text{n pari} \end{cases}$$

Esercizio 4.4 *Sviluppare in serie di Laurent:*

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) \sin z.$$

nell'intorno di $z = 0$.

Poiché:

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{z^{2m}}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1!}$$

avremo:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{z^{2m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{2n+1!} z^{2(n-m)+1}$$

Al posto dell' indice m introduciamo l'indice $k = n - m$. Per n e m che variano tra zero e infinito, k varierà tra $-\infty$ e $+\infty$. Prendiamo la sommatoria su k come sommatoria più esterna e prendiamo come secondo indice di somma ancora n. Dobbiamo ora valutare quali saranno gli estremi di variazione di n per k fissato. Abbiamo che $n = k + m$ e quindi il valore n non può essere più piccolo di k, visto che m è positivo. D'altra parte n non può assumere valori negativi e quindi l'estremo inferiore di variazione per n a k fissato sarà $n = \max(0, k)$. Per k fissato possiamo sempre far tendere $k + m$ ad infinito, quindi l'estremo superiore per n sarà ancora $+\infty$. In conclusione:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=\max(0,k)}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} \frac{1}{2n+1!} \right) z^{2k+1}.$$

Esercizio 4.5 *Determinare il dominio di convergenza nel piano z della serie:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right)^n .$$

Introducendo la variabile

$$z' = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

possiamo scrivere $f(z)$ come una serie di potenze in z':

$$f(z(z')) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 (z')^n .$$

Per calcolare il raggio di convergenza della serie (4) possiamo allora usare la formula di Cauchy-Hadamard:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(2 \frac{\ln(n+1)}{n} \right) = 1.$$

La serie convergerà quindi nel cerchio:

$$|z'| = \frac{|1+z^2|}{|1-z^2|} < 1. \tag{71}$$

Notiamo che la condizione (71) è equivalente a

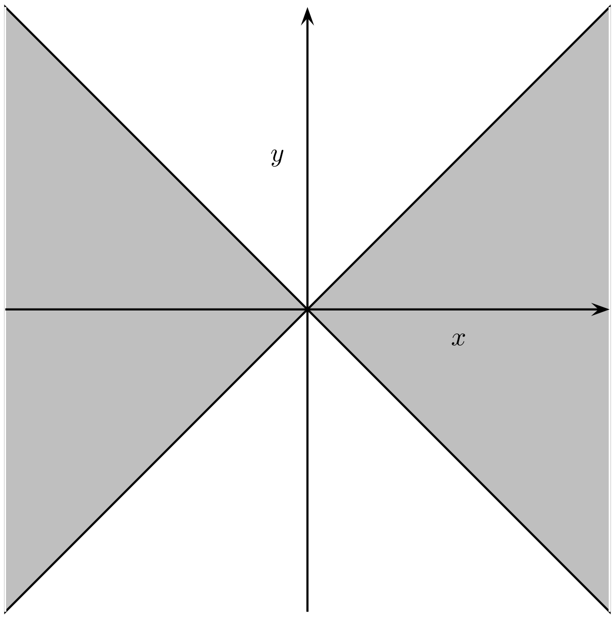
$$\frac{|1+z^2|^2}{|1-z^2|^2} < 1. \tag{72}$$

Ponendo $z = x + iy$ in (72) otteniamo la condizione

$$\frac{1 + 2x^2 - 2y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - 2x^2 + 2y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < 1. \tag{73}$$

Ossia,

$$x^2 < y^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -y < x < y. \tag{74}$$



Esercizio 4.6 *Determinare $Res_{z=a}[f(g(z))]$, sapendo che $g(z)$ è analitica in $z = a$, con derivata prima diversa da 0, mentre la funzione $f(\zeta)$ ha un polo del primo ordine in $\zeta = g(a)$, il cui residuo vale A.*

Nelle ipotesi dell'esercizio esisterà un intorno U di $\zeta = g(a)$ in cui lo sviluppo in serie di Laurent:

$$f(\zeta) = \frac{A}{\zeta - g(a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta - g(a))^n$$

converge uniformemente. Poiché $g(z)$ è analitica e quindi continua, esisterà un intorno V di a tale che per $z \in V$ valga: $g(z) - g(a) \in U$. In tale intorno potremo quindi scrivere:

$$f(g(z)) = \frac{A}{g(z) - g(a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(g(z) - g(a))^n$$

Visto che $f(g(z))$ ha un polo del primo ordine in $z = a$, il suo residuo sarà dato dalla formula:

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(g(z)) = \lim_{z \to a}(z-a) f(g(z)) = \lim_{z \to a}(z-a) \left(\frac{A}{g(z) - g(a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(g(z) - g(a))^n \right)$$

Ora, sfruttando l'uniforme convergenza della serie di potenze alla funzione $f(g(z))$ possiamo portare il limite all'interno della sommatoria e notare che tutti i termini si annullano. Avremo quindi:

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(g(z)) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{A}{g(z)-g(a)} = \frac{A}{g'(a)}$$

Esercizio 4.7 *Determinare il dominio di convergenza della serie*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n!+(n!)^2}{1+(n!)^3} 2^n \left(1+\frac{1}{z}\right)^n.$$

Introducendo la variabile

$$w = 1+\frac{1}{z}, \tag{75}$$

riscriviamo la serie come una serie di potenze in w

$$S(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n!+(n!)^2}{1+(n!)^3} 2^n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n.$$

Il raggio di convergenza di questa serie di potenze può essere calcolato attraverso la formula di Cauchy-Hadamard (**??**). Per $n\to\infty$ i termini 1 e $n!$ possono essere trascurati rispetto a $(n!)^2$ e $(n!)^3$, per cui

$$c_n \simeq \frac{2^n}{n!} \qquad n\to\infty.$$

Quindi

$$\sqrt[n]{c_n} \simeq 2\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 2\exp\left(-\frac{\ln n!}{n}\right). \qquad n\to\infty$$

Utilizziamo ora la formula di Stirling

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n\to\infty \tag{76}$$

da cui segue

$$\ln n! \simeq n\ln n - n \qquad n\to\infty.$$

Sostituendo nella formula di Cauchy-Hadamard otteniamo

$$\sqrt[n]{c_n} \simeq 2\exp(1-\ln n) = \frac{2e}{n} \qquad n\to\infty,$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = 0$$

e il raggio di convergenza della serie $S(w)$ è infinito. La corrispondente serie in z, $S(z)$, convergerà quindi in tutti i punti del piano complesso in cui il cambiamento di variabile (75) è definito. Ossia in tutto il piano complesso privato del punto $z=0$.

Esercizio 4.8 *Calcolare lo sviluppo in serie di potenze della funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{16z^4 + 1}$$

nell'intorno di $z_0 = 0$ *e determinarne il raggio di convergenza.*

Esercizio 4.9 *Sviluppare in serie di potenze la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z - b)} \quad (b, a \text{ reali; } b > a)$$

Nelle regioni:

1. $|z| < a$;
2. $a < |z| < b$;
3. $|z| > b$

Esercizio 4.10 *Sviluppare in serie di potenze la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z}$$

nelle regioni:

1. $0 < |z| < 3$,
2. $|z - 3/2| < 3/2$,
3. $|z| > 3$.

Esercizio 4.11 *Determinare la regione del piano complesso in cui converge lo sviluppo in serie di Laurent intorno a* $z = 0$ *della funzione:*

$$g(z) = \frac{1}{1 - z} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right).$$

Calcolare il coefficiente c_{-1} *di questo sviluppo.*

Esercizio 4.12 *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2},$$

svilupparla in serie di potenze nelle regioni:

1. $|z| > 2$;

2. $|z| < 1$;

3. $1 < |z| < 2$.

Esercizio 4.13 *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}$$

svilupparla in serie di potenze nelle regioni:

1. $|z| < 2$;

2. $|z| > 2$;

3. $1 < |z - 3| < 5$.

Esercizio 4.14 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 3}$$

nella regione $1 < |z| < 3$.

Esercizio 4.15 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)(z - 4)}$$

nella regione $2 < |z| < 4$.

Esercizio 4.16 *Data la funzione:*

$$f(z) = \frac{z - i}{z(z + i)}$$

scriverne lo sviluppo in serie di potenze nell'intorno dei punti:

1. $z_0 = 0$;

2. $z_0 = -i$;

3. $z_0 = -i/2$.

Specificare in tutti e tre i casi il dominio di convergenza.

Esercizio 4.17 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}$$

nelle regioni

1. $|z| < 1$;
2. $1 < |z| < 4$;
3. $|z| > 4$.

Esercizio 4.18 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$$

nelle regioni

1. $|z| < 1$,
2. $1 < |z| < 2$,
3. $|z| > 2$,
4. $0 < |z-1| < \sqrt(5)$.

Esercizio 4.19 *Sviluppare in serie di Laurent, nell'anello* $1 < |z| < 3$, *la funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z - 3}.$$

Esercizio 4.20 *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 1},$$

svilupparla in serie di potenze

1. *nel dominio* $0 < |z+1| < \sqrt{3}$;
2. *nel dominio* $|z| < 1$.

Esercizio 4.21 *Sviluppare in serie di Laurent nell'anello* $a - \sqrt{a^2-1} < |z| < a + \sqrt{a^2-1}$ *la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2az + 1}$$

Esercizio 4.22 *Sviluppare in serie di Laurent:*

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$$

nell'intorno di $z_1 = 1,\ z_2 = \omega = exp(2\pi i/3),\ z_3 = \omega^2,\ z_4 = 0$, *specificando in ognuno dei quattro casi il dominio di convergenza.*

Esercizio 4.23 *Sviluppare in serie di potenze la funzione*

$$\frac{\sin(z)}{z^2 - 1}$$

nei domini:

1. $|z| < 1$;
2. $2 > |z - 1| > 0$.

Esercizio 4.24 *Si determini lo sviluppo in serie di Laurent di centro* $z_0 = 1$ *della funzione*

$$f(z) = (z^2 + z^4)\ \exp\left(1 + \frac{1}{z - 1}\right)$$

Esercizio 4.25 *Sviluppare in serie di potenze:*

$$F(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 - 4)}$$

nelle regioni:

$$|z| < 1 \qquad 1 < |z| < 2 \qquad |z| > 2$$

Esercizio 4.26 *Sviluppare in serie di potenze almeno una, a scelta, tra le seguenti funzioni:*

$$F_1(z) = \frac{z}{z^3 + 1} \qquad \textit{nelle regioni:} \begin{cases} |z| < 1 \\ |z| > 1 \\ 0 < |z - \exp(\frac{i\pi}{3})| < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$F_2(z) = \frac{\cos(z)}{1 + z^2} \qquad \textit{nelle regioni:} \begin{cases} |z| < 1 \\ 0 < |z - i| < 2 \end{cases}$$

Giustificare, per ognuno dei casi considerati, il dominio di convergenza indicato.

Esercizio 4.27 *$f(z)$ è analitica in un anello di centro O e contenente al suo interno il cerchio unitario ($|z| = 1$). Quali condizioni debbono essere soddisfatte dai coefficienti del suo sviluppo di Laurent intorno a $z = 0$ affinché $f(z)$ assuma valori reali per $|z| = 1$?*

Esercizio 4.28 *Trovare i residui delle funzioni*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \\ g(z) &= \frac{e^z}{\sin^2 z} \end{aligned}$$

nei loro poli al finito.

5 Classificazione di singolarità

Consideriamo una sfera tangente al piano complesso nel punto S coincidente con l'origine del piano complesso. Sia N il punto sulla sfera diametralmente opposto a S. Possiamo definire un'applicazione biunivoca tra la sfera privata del punto N e il piano complesso attraverso la proiezione stereografica; ad ogni punto Z sulla sfera corrisponde il punto del piano complesso z_1 che si ottiene dall'intersezione tra il prolungamento del segmento congiungente N e Z ed il piano complesso. Se consideriamo un secondo piano complesso tangente alla sfera nel punto N coincidente con l'origine del piano complesso, possiamo considerare la proiezione stereografica dal punto S, ottenendo una seconda applicazione biunivoca tra la sfera privata del punto S e il piano complesso che fa corrispondere al punto Z un punto z_2. Sulla sfera munita di queste due applicazioni è possibile definire una struttura di varietà Riemanniana (sfera di Riemann), i due piani complessi tangenti alla sfera essendo le due carte della varietà con la funzione di transizione tra le due carte data da $z_2 = 1/z_1$. Nel piano complesso in cui S è identificato con l'origine il punto N corrisponde al punto all'infinito e viceversa. All'immagine di un intorno del punto all'infinito N (privato del punto N) secondo la prima proiezione corrisponderà un intorno dell'origine (privato dell'origine) secondo la seconda proiezione. Ne segue che le proprietà del punto all'infinito possono essere dedotte dalle proprietà dell'origine a seguito del cambio di variabile $z \to 1/z$.

Un punto di singolarità per una funzione $f(z)$ è un punto in cui la funzione non è analitica. Un punto z_0 è un punto di singolarità isolato per $f(z)$ se esiste un intorno I di z_0 tale che $f(z)$ è analitica in $I\backslash\{z_0\}$. Se il punto z_0 è un punto di singolarità isolato, allora appartiene a uno dei seguenti tre tipi

1. **Singolarità eliminabile**: se esiste finito il limite di $f(z)$ in z_0

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = c.$$

Definendo allora $f(z_0) = c$, $f(z)$ è analitica all'interno di I (incluso il punto z_0). Ciò implica che $f(z)$ ammette sviluppo in serie di Taylor centrato in z_0 nell'intorno I.

2. **Polo**: se

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty.$$

In questo caso la funzione $f(z)$ ammette sviluppo di Laurent centrato in z_0 in $I - z_0$ con parte principale finita:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{77}$$

e k prende il nome di ordine (o molteplicità) del polo. in tal caso, moltiplicando $f(z)$ per $(z - z_0)^k$ si ottiene una funzione analitica $\phi(z)$ in tutto l'intorno I incluso il punto z_0, con sviluppo di Taylor

$$\phi(z) = (z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k} z^n \tag{78}$$

Dalla formula per i coefficienti di Taylor di $\phi(z)$, otteniamo la seguente formula (alternativa alla (68)) per i coefficienti dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ in un intorno di z_0:

$$c_{n-k} = \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(z_0) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z-z_0)^k f(z)\Big|_{z=z_0}, \qquad n = 0, \dots, \infty. \quad (79)$$

Ricordiamo infine che se $f(z)$ ha un polo di ordine k in z_0, allora la sua inversa ha uno zero di ordine k in z_0 e viceversa. Infatti, dalla (78)

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^k}{\phi(z)},$$

con $\phi(z)$ analitica e diversa da zero in un intorno di z_0 ($\phi(z_0) = c_{-k}$).

3. **Singolarità essenziale**: se non esiste il limite di $f(z)$ per $z \to z_0$. In questo caso $f(z)$ ammette ancora sviluppo di Laurent centrato in z_0 in $I\backslash\{z_0\}$ ma la parte principale è costituita di infiniti termini:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \exists j < k\ :\ c_j \neq 0.$$

Un punto di singolarità può anche essere non isolato, è questo il caso di $z = 0$ per $\sin(1/z)$. Infatti i punti di singolarità (essenziali) $z_k = 1/(k\pi), k \in \mathbb{Z}$ si accumulano su $z = 0$ e la funzione non ammette sviluppo di Laurent centrato in tale punto. Un punto di diramazione per una funzione polidroma è un altro esempio di punto di singolarità non isolato. Infatti, se z_0 è un punto di diramazione, non esiste nessun suo intorno I tale che $f(z)$ sia analitica in $I\backslash\{z_0\}$ (per qualunque scelta dell'intorno I è infatti sempre possibile, partendo da un punto $z' \in I$, circuitare il punto di diramazione z_0 cambiando così il valore di $f(z')$ che quindi non può essere considerata continua e tantomeno analitica). In generale, per ridursi ad una funzione analitica, sarà necessario considerare un singolo ramo della funzione polidroma considerata ed escludere dall'intorno I, non il singolo punto z_0 ma una intera curva che ne impedisca la circuitazione. In generale, se la funzione $f(z)$ ha come punti di non analiticità un numero finito di punti di polidromia nel piano complesso (chiuso), è possibile definire una funzione analitica scegliendo uno dei rami della funzione $f(z)$ e "tagliando" il piano complesso lungo una o più curve che uniscono tra loro coppie di punti di polidromia (si considera cioè come dominio di $f(z)$ il piano complesso privato di tali curve).

Esercizio 5.1 *Determinare i punti di singolarità della funzione:*

$$F(z) = \frac{z^2-1}{z^n-1}$$

per n intero e maggiore di zero e specificarne il tipo.

Il denominatore della funzione $F(z)$ si annulla nelle radici $n-$esime dell'unità (vedi equazione (15))

$$z_k = \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right), \qquad k = 0, \dots, n-1. \quad (80)$$

La funzione

$$\frac{F(z)}{z^2-1} = \frac{1}{z^n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z-z_k}$$

ha quindi poli semplici (di ordine 1) nei punti z_k.

Il numeratore di $F(z)$ si annulla in $z=\pm 1$ dove ha degli zeri semplici. Quindi il punto $z_0 = 1$ è una singolarità eliminabile di $F(z)$. In effetti, utilizzando l'equazione:

$$z^n - 1 = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k,$$

abbiamo che

$$\lim_{z\to 1} F(z) = \left.\frac{z+1}{\sum_{k=0}^{n-1} z^k}\right|_{z=1} = \frac{2}{n}. \tag{81}$$

Alternativamente:

$$\lim_{z\to 1} F(z) = \lim_{z\to 1}(z+1)\frac{z-1}{z^n-1} = 2\frac{1}{g'(1)},$$

dove,

$$g(z) = z^n - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad g'(1) = n.$$

Il punto $z=-1$ fa parte dei punti z_k (80) quando n è pari e $k=n/2$. In tal caso anche il punto $z=-1$ corrisponde ad una singolarità eliminabile. Se ne conclude che se n è dispari, allora $F(z)$ possiede dei poli semplici nei punti $z_k,\ k=1,\ldots,n-1$ e una singolarità eliminabile in $z=1$, se invece è pari, allora $F(z)$ avrà dei poli semplici nei punti $z_k,\ k=1,\ldots,n-1,\ k\neq n/2$ e due singolarità eliminabili nei punti $z=\pm 1$.

Esercizio 5.2 *Identificare le singolarità della funzione*

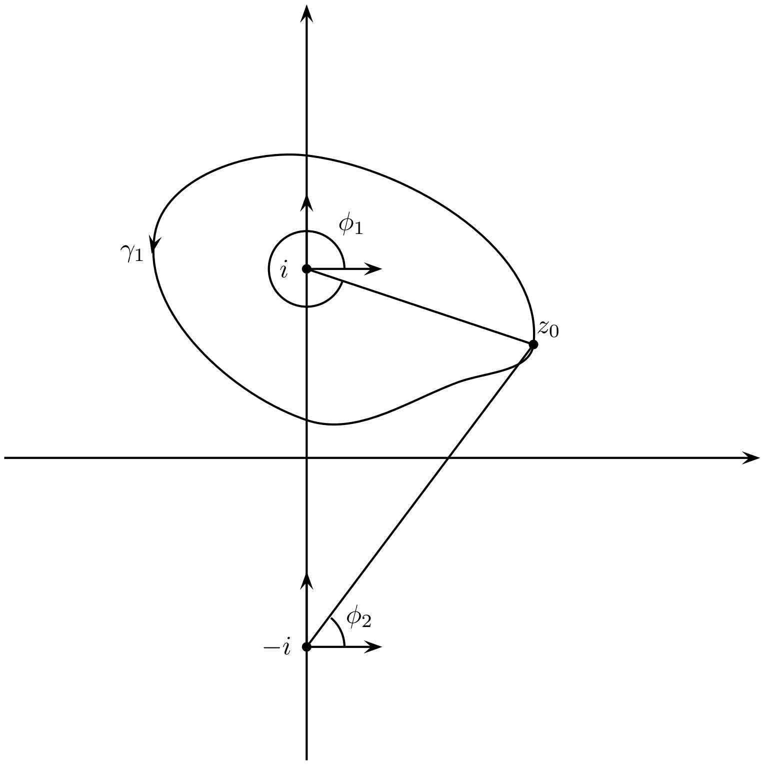
$$f(z) = \frac{(z^2+1)^{\frac{1}{2}} z}{\sinh(z)}.$$

Indicare anche un possibile modo per "tagliare" il piano complesso in modo che i diversi rami monodromi della funzione rimangano separati.

Scriviamo

$$f(z) = g(z)\cdot h(z), \qquad g(z) = (z^2+1)^{\frac{1}{2}} = (z-i)^{\frac{1}{2}}(z+i)^{\frac{1}{2}},\ h(z) = \frac{z}{\sinh(z)} \tag{82}$$

e consideriamo separatamente le funzioni $g(z)$ e $h(z)$. Sappiamo che l'estrazione di radice è una funzione polidroma quando il suo argomento è zero. I punti di polidromia di $g(z)$ saranno quindi gli zeri di z^2+1, cioè i punti $z_1 = i$, $z_2 = -i$. In effetti, consideriamo il cammino γ_1, mostrato in figura, che circuita il punto z_1 ma non il punto z_2:



Possiamo usare coordinate bipolari:

$$z - i = r_1 e^{i\phi_1}, \qquad z + i = r_2 e^{i\phi_2},$$

dove r_1 è la distanza tra il punto i e z_0 e r_2 quella tra $-i$ e z_0. Al compiere un giro intorno al punto i lungo la curva γ_1, l'argomento di $z - i$ aumenta in maniera continua, finchè, una volta raggiunto nuovamente il punto z_0, avremo

$$\arg(z_0 - i) \to \phi_1 + 2\pi.$$

Ovviamente il modulo di $z_0 - i$ non cambia, in quanto non cambia la distanza tra i e z_0:

$$|z_0 - i| \to r_1.$$

L'argomento di $z_0 + i$ invece, prima aumenta e poi diminuisce percorrendo la curva γ_1, di modo che

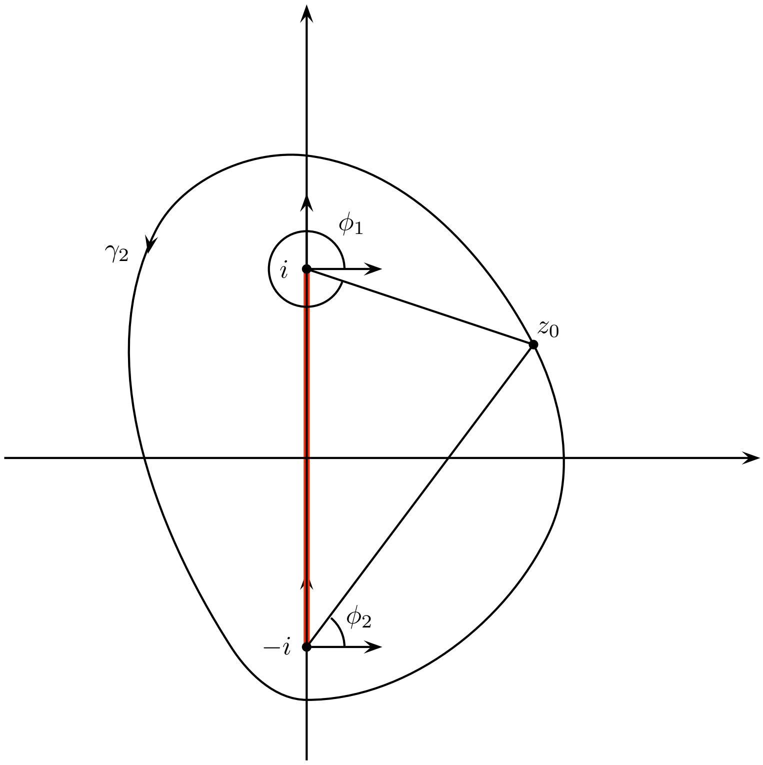
$$\arg(z_0 + i) \to \phi_2, \qquad |z_0 + i| \to r_2.$$

In conclusione,

$$\begin{cases} (z_0 - i)^{\frac{1}{2}} \to (z_0 - i)e^{i\pi} \\ (z_0 + i)^{\frac{1}{2}} \to (z_0 + i) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad g(z_0) \to g(z_0)e^{i\pi} = -g(z_0),$$

cioè siamo passati da una determinazione all'altra della funzione polidroma $g(z)$. Ovviamente, poichè il punto z_0 è arbitrario ciò vale per qualunque punto del piano complesso (esclusi i punti $\pm i$).

Con un ragionamento speculare, si dimostra che circuitando una volta il punto z_2 ma non z_1, si cambia la determinazione di $g(z)$. Ciò non accade se si taglia il piano complesso lungo una qualunque curva che unisce i punti di diramazione i e $-i$ (comprese quelle che passano per il punto all'infinito, come ad esempio la curva costituita dalle due semirette $z(t) = i\,t,\ t \geq 1$ e $z(t) = -i\,t,\ t \geq 1$). Infatti, su tale dominio è impossibile circuitare uno dei punti di diramazione senza circuitare anche l'altro, cosa che non cambia la determinazione di $g(z)$. Consideriamo ad esempio il piano complesso tagliato lungo il segmento $z(t) = i\,t,\ -1 \leq t \leq 1$ e la curva γ_2 indicata in figura



Percorrendo la curva γ_2, avremo che

$$\begin{cases} (z_0 - i)^{\frac{1}{2}} \to (z_0 - i)e^{i\pi} \\ (z_0 + i)^{\frac{1}{2}} \to (z_0 + i)e^{i\pi} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad g(z_0) \to g(z_0)e^{2i\pi} = g(z_0),$$

e la funzione $g(z)$ è ora monodroma e analitica in tutto il piano complesso (nel piano complesso chiuso dovremmo eliminare anche il punto all'infinito che è un polo semplice per $g(z)$).

Passiamo ora a studiare le singolarità della funzione $h(z)$. Per prima cosa determiniamo gli zeri del denominatore di $h(z)$:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{2z} = 1 \quad \Longrightarrow \quad z_k = k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{83}$$

Tutti gli zeri di $\sinh(z)$ (83) sono semplici (ad eccezione del punto all'infinito che è una singolarità essenziale); infatti, per $k \in \mathbb{Z}$

$$|\sinh(z)'|_{z=k\pi i} = \cosh(k\pi i) = -1 \neq 0. \tag{84}$$

Quindi $h(z)$ possiede una singolarità eliminabile in $z = 0$ e poli semplici nei punti

$$z_k = k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0. \tag{85}$$

Nel piano complesso privato del segmento $z(t) = i\,t,\ -1 \leq t \leq 1$ e dei punti z_k (85), entrambe le funzioni $g(z)$ e $h(z)$ sono analitiche, per cui, essendo il prodotto di due funzioni analitiche, lo è anche $f(z)$ (82).

Esercizio 5.3 *Classificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$$

e sviluppare i suoi rami monodromi in serie di potenze nell'intorno di $z = 0$. Qual è il raggio di convergenza?

Le uniche singolarità di $f(z)$ sono in $z = \pm 1$, che sono punti di diramazione per il denominatore. La funzione $f(z)$ sarà quindi analitica nel cerchio $|z| < 1$ e il raggio di convergenza della sua serie di Taylor sarà di conseguenza $R = 1$.

Scegliamo il ramo positivo della radice, poniamo $z^2 = w$ e sviluppiamo

$$g(w) = \frac{1}{+\sqrt{1-w}}$$

nell'intorno di $w = 0$. I coefficienti dello sviluppo sono dati da:

$$\begin{aligned}
c_0 &= g(0) = \frac{1}{+\sqrt{1}} = 1 \\
c_1 &= g'(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-w)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{w=0} = \frac{1}{2} \\
c_2 &= \frac{1}{2}g''(0) = \frac{3}{8}\frac{1}{(1-w)^{\frac{5}{2}}}\bigg|_{w=0} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Per induzione si dimostra che:

$$c_k = \frac{1}{n!}\frac{d^k}{dw^k}g(w)\bigg|_{w=0} = \frac{1}{k!}\prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{1}{(1-w)^{n+\frac{1}{2}}}\bigg|_{w=0} = \frac{1}{k!}\prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}+n\right) \qquad k \geq 1$$

Quindi:

$$g(w) = \frac{1}{+\sqrt{1-w}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}+n\right)\right)w^k \qquad |w| < 1$$

Sostituendo $w = z^2$ e moltiplicando per z, troviamo lo sviluppo di $f(z)$:

$$f(z) = \frac{z}{+\sqrt{1-z^2}} = z + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}+n\right)\right)z^{2k+1} \qquad |z| < 1$$

Se scegliamo il ramo negativo della radice, dalla formula per il generico coefficiente c_k otteniamo:

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dw^k}g(w)\bigg|_{w=0} = \frac{1}{k!}\prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{1}{(1-w)^{n+\frac{1}{2}}}\bigg|_{w=0} = -\frac{1}{k!}\prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}+n\right) \qquad k \geq 1$$

Cioè tutti i coefficienti cambiano segno e avremo:

$$f(z) = \frac{z}{-\sqrt{1-z^2}} = -z - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}+n\right)\right)z^{2k+1} \qquad |z| < 1$$

Esercizio 5.4 *Data la funzione*

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) :$$

1. *se ne individuino e classifichino le singolarità (tenendo conto anche del punto all'infinito);*
2. *se ne determini lo sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di* $z = 0$*;*
3. *se ne calcoli il residuo all'infinito.*

Esercizio 5.5 *Data la funzione:*

$$f(z) \;=\; \frac{\sin z}{z^3}$$

1. *Se ne classifichino le singolarità, tenendo anche conto del punto all'infinito*
2. *Se ne costruisca lo sviluppo di Laurent in* $z = 0$*, indicandone il dominio di convergenza.*

Esercizio 5.6 *Siano* $f_+(z)$ *e* $f_-(z)$ *i due rami monodromi della funzione*

$$f(z) \;=\; z^{\frac{1}{2}}\mathrm{sech} z$$

che si ottengono tagliando il piano complesso lungo il semiasse reale positivo. Calcolare:

$$R_+ = Res(f_+(z))|_{z=i\pi/2}; \quad R_- = Res(f_-(z))|_{z=-i\pi/2}$$

Esercizio 5.7 *Classificare le singolarità della funzione:*

$$f(z) = \sqrt{z}\tan z.$$

Esercizio 5.8 *Classificare le singolarità della funzione:*

$$f(z) = z^{3/2}\frac{\mathrm{Log}(z^3 - 1)}{\sinh z}.$$

Esercizio 5.9 *Classificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \mathrm{Log}(z^2 + a^2)\frac{z}{\tanh z}.$$

Esercizio 5.10 *Determinare in tutto il piano complesso chiuso le singolarità della funzione:*

$$f(z) = z\mathrm{Log}(z^2 - 1).$$

Indicare una maniera di "tagliare" il piano complesso in modo da mantenere distinti i diversi rami della funzione.

Esercizio 5.11 *Classificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1}$$

tenendo conto anche del punto all'infinito.

Esercizio 5.12 *Classificare le singolarità della funzione:*

$$f(z) = \mathrm{sech}\, z\sqrt{z^2 - 1}.$$

Esercizio 5.13 *Dire come bisogna tagliare il piano complesso affinché sia olomorfa la funzione*

$$h(z) = \ln[z(1 - z)],$$

considerando la determinazione principale del logaritmo.

Determinare, poi, nel piano complesso tagliato, posizione e tipo delle singolarità di

$$f(z) = \frac{h(z)}{\sin^2(i\pi z)}.$$

6 Ricostruzione di funzioni

Strumenti fondamentali per questo tipo di problemi sono i due teoremi di Liouville:

1. Se $f(z)$ è analitica e limitata nell'intero piano complesso, allora è una costante.

2. Se $f(z)$ è analitica in ogni dominio limitato del piano complesso e il suo modulo non cresce più rapidamente di $M|z|^m$, $M > 0$, allora $f(z)$ è un polinomio di grado m.

Ovviamente il primo teorema è un caso particolare del secondo (corrisponde al caso $m = 0$).

Supponiamo che la funzione $f(z)$ sia analitica in tutto il piano complesso ad eccezione che nelle singolarità isolate z_i, $i = 1, \ldots, N$ in cui conosciamo le parti principali del suo sviluppo di Laurent (con k_i eventualmente infinito)

$$\sum_{n_i=-k_i}^{0} c_{n_i}^{(i)}(z - z_i)^{n_i}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Supponiamo di conoscere anche la parte principale dello sviluppo in serie di $f(z)$ nell'intorno del punto all'infinito:

$$f(z) = \sum_{j=1}^{M} c_j^{(\infty)} z^j + O(1), \qquad \text{per } z \to \infty.$$

Allora, la funzione

$$f(z) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{n_i=-k_i}^{0} c_{n_i}^{(i)}(z - z_i)^{n_i} + \sum_{j=1}^{M} c_j^{(\infty)} z^j \tag{86}$$

è analitica e limitata in tutto il piano complesso, e quindi costante. Ne consegue che la conoscenza delle parti principali di $f(z)$ e del suo valore in un punto, determinano $f(z)$ univocamente.

Esercizio 6.1 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. $f(0) = 0$*;*

2. *come uniche singolarità al finito ha* 3 *poli semplici nelle radici cubiche dell'unità, tutti con residuo uguale a* 1*;*

3. $\lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 1.$

Consideriamo la funzione:

$$h(z) = f(z) - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)} - \frac{1}{z - \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)}$$

ottenuta sottraendo da $f(z)$ le sue parti singolari al finito. $h(z)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso; consideriamo, infatti, il punto $z = 1$ e calcoliamo:

$$\lim_{z\to 1} h(z)$$

Per le ipotesi su $f(z)$ (polo semplice in $z = 1$ con residuo pari a 1) avremo che in un intorno di $z = 1$ varrà lo sviluppo di Laurent:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n$$

Quindi:

$$\lim_{z\to 1} h(z) = \lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)} - \frac{1}{z - \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)} \right) =$$
$$= c_0 - \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)} - \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)}$$

e $z = 1$ non è un punto di singolarità per $h(z)$. Analogamente si dimostra l'esistenza del limite nei punti $z = \exp(2\pi i/3)$ e $z = \exp(4\pi i/3)$.

Dalla terza condizione su $f(z)$ segue:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{h(z)}{z} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 1$$

Quindi $h(z)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso che all'infinito cresce come z. Dal secondo teorema di Liouville segue che $h(z)$ è un polinomio del primo ordine:

$$h(z) = a + z$$

La costante a è determinata dalla seconda condizione su $f(z)$:

$$f(0) = a - 1 - \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}\right) - \exp\left(\frac{-4\pi i}{3}\right) = a = 0.$$

In conclusione:

$$f(z) = z + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z - \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)} + \frac{1}{z - \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)}.$$

Esercizio 6.2 *La funzione $f(z)$ ha un polo del primo ordine all'infinito, dove si ha:*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 1;$$

essa inoltre vale 0 nell'origine e non ha altre singolarità ad eccezione dei punti $z_1 = i$, $z_2 = -i$, dove ha due poli semplici con residui $r_1 = 2$, $r_2 = -2$. Determinare $f(z)$.

La condizione sul punto all'infinito ci dice che

$$f(z) = z + O(1) \qquad \text{per } z \to \infty. \tag{87}$$

Le parti principali dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ in $z = i$ e in $z = -i$ sono date rispettivamente da

$$\frac{2}{z-i} \qquad \frac{-2}{z+i}. \tag{88}$$

Quindi

$$f(z) = z + \frac{2}{z-i} + \frac{-2}{z+i} + \alpha, \tag{89}$$

con α costante complessa. Poichè sappiamo che $f(z)$ si annulla nell'origine,

$$f(0) = 4i + \alpha = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -4i. \tag{90}$$

Esercizio 6.3 *Determinare la funzione razionale $R(z)$ caratterizzata dalle seguenti proprietà:*

1. *ha N poli semplici al finito nei punti $z_k = \exp(2k\pi i/N)$, $k = 0, \ldots, N-1$ con residui $(-1)^k$;*
2. *$R(0) = 0$;*
3. *La parte principale del suo sviluppo di Laurent all'∞ vale z^2.*

Dalle condizioni 1. e 3. segue che

$$R(z) = z^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{z - \omega^k} + \alpha, \tag{91}$$

con α costante complessa e $\omega = \exp(2\pi i/N)$.

Sostituendo la condizione 2. in (91), otteniamo:

$$R(0) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{k+1} \omega^{-k} + \alpha = 0.$$

D'altra parte

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{k+1} \omega^{-k} = \frac{(-1)^N \omega^{-N} - 1}{1 + \omega^{-1}} = \frac{(-1)^N - 1}{1 + \omega^{-1}}. \tag{92}$$

Quindi $\alpha = 0$ se N è pari. Se invece N è dispari, avremo:

$$\alpha = \frac{2}{1 + e^{-2\pi i/N}} \frac{e^{\pi i/N}}{e^{\pi i/N}} = \frac{e^{\pi i/N}}{\cos(\pi/N)} = -1 + i \tan(\pi/N).$$

Esercizio 6.4 *Determinare la funzione razionale $f(z)$ sapendo che:*

1. $\lim_{z\to\infty}\left(f(z)-1-z^2\right)=0$

2. *$f(z)$ ha, al finito, come unica singolarità un polo di ordine 3 nell'origine; i coefficienti della parte principale del corrispondente sviluppo di Laurent sono individuate dalle relazioni:*

   (a) $\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = 1,$

   (b) $\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z^3 f(z)) = 0,$

   (c) $\lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}(z^3 f(z)) = -2.$

Determiniamo la parte principale dello sviluppo di Laurent in $z = 0$ servendoci delle condizioni $(a), (b), (c)$ e dell'equazione (79). Abbiamo:

$$c_{-3} = \lim_{z\to 0} z^3 f(z) = 1, \tag{93}$$

$$c_{-2} = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z^3 f(z)) = 0, \tag{94}$$

$$2c_{-1} = \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}(z^3 f(z)) = -2. \tag{95}$$

La prima condizione ci dice che la parte regolare dello sviluppo di $f(z)$ in $z = 0$ è $1 + z^2$, quindi:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z} + 1 + z^2.$$

Esercizio 6.5 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. *ha uno zero doppio nell'origine;*

2. *si annulla all'infinito ed e' analitica in tutto il piano complesso, compreso il punto all'infinito, ad eccezione dei punti z_k tali che $z_k^3 = 1$ dove ha poli semplici;*

3. *il suo residuo all'infinito vale -1;*

4. $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Abbiamo

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi k}{3}\right), \qquad k = 1, 2, 3.$$

La condizione 2. ci dice che la funzione $f(z)$ è della forma

$$f(z) = frac r_1 z - z_1 + \frac{r_2}{z - z_2} + \frac{r_3}{z-1} + a.$$

Dalla condizione 4. segue immediatamente che $a = 0$. Il residuo all'infinito è uguale a meno la somma dei residui al finito, per cui la condizione 3. ci dà

$$r_1 + r_2 + r_3 = 1. \tag{96}$$

Dalla condizione 1. otteniamo le due ulteriori equazioni

$$f(0) = -\left(\frac{r_1}{z_1} + \frac{r_2}{z_2} + r_3\right) = 0, \tag{97}$$

$$f'(0) = \frac{r_1}{z_1^2} + \frac{r_2}{z_2^2} + r_3 = \frac{r_1}{z_2} + \frac{r_2}{z_1} + r_3 = 0. \tag{98}$$

Sommando (97) con (98) e sfruttando il fatto che $1/z_1 = z_2$, $1/z_2 = z_1$, otteniamo $r_2 = r_1$. Dalla (96) otteniamo $r_3 = 1 - 2r_1$. Infine dalla (97) otteniamo $r_1 = 1/3$. Quindi la funzione $f(z)$ sarà data da

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - 1}\right).$$

Esercizio 6.6 *Utilizzando il teorema dei residui, dimostrare la formula:*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{z - z_i} = \frac{P^{(N-1)}(z)}{Q^{(N)}(z)}$$

dove:

$$Q^{(N)}(z) = \prod_{i=1}^{N}(z - z_i), \quad P^{(N-1)}(z) = \prod_{i=1}^{N-1}(z - \mu_i), \quad r_i = \frac{\prod_{j=1}^{N-1}(z_i - \mu_j)}{\prod_{k \neq i}(z_i - z_k)},$$

essendo gli zeri $\{z_i\}$, $i = 1^N$ di $Q^{(N)}(z)$ tutti distinti tra loro ($z_i \neq z_j$, $i \neq j$) e distinti dagli zeri $\{\mu_i\}$, $i = 1^N$ di $P^{(N-1)}(z)$ ($z_i \neq \mu_j$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N-1$).

Sotto le ipotesi dell'esercizio, la funzione $P^{(N-1)}(z)/Q^{(N)}(z)$ ha N poli semplici al finito nei punti $\{z_i\}$, $i = 1, \dots, N$. I residui in tali punti sono dati da:

$$\mathrm{Res}_{z=z_i} \frac{P^{(N-1)}(z)}{Q^{(N)}(z)} = \lim_{z=z_i} (z - z_i) \frac{P^{(N-1)}(z)}{Q^{(N)}(z)} = r_i.$$

La funzione

$$f(z) = \frac{P^{(N-1)}(z)}{Q^{(N)}(z)} - \sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{z - z_i}$$

è quindi analitica in ogni dominio limitato del piano complesso. Poiché il polinomio $Q^{(N)}(z)$ ha grado maggiore di $P^{(N-1)}(z)$, $f(z)$ è anche analitica all'infinito. Dal primo teorema di Liouville segue che $f(z)$ è una costante e visto che

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0,$$

se ne conclude $f(z) = 0$.

Esercizio 6.7 *Determinare la funzione $f(z)$ sapendo che:*

1. *è analitica in ogni dominio limitato del piano complesso ad eccezione dei punti $z_1 = 1,\ z_2 = -1$ in cui ha poli semplici con residui $r_1 = 1/2,\ r_2 = -1/2$;*
2. *vale* $\lim_{|z|\to\infty} \dfrac{f(z)}{z^2} = 1$;
3. $f(0) = f'(0) = 0$.

Esercizio 6.8 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. *ha uno zero doppio nell'origine;*
2. *è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti z_k tali che $z_k^3 = 1$, dove ha poli semplici;*
3. $\mathrm{Res} f(z)|_{z=\infty} = -1$.
4. $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Esercizio 6.9 *Determinare la funzione razionale di variabile complessa che gode delle seguenti proprietà:*

1. *la parte principale del suo sviluppo di Laurent nell'intorno del punto all'infinito vale $2z^3$;*
2. *ha due poli semplici nei punti $z_1 = 3,\ z_2 = 4i$ con residui $r_1 = 1,\ r_2 = 1/2$;*
3. *vale 1 nell'origine.*

Esercizio 6.10 *Determinare la funzione $f(z)$ analitica in ogni dominio limitato del piano complesso ad eccezione dei punti $z_1 = i,\ z_2 = -i$, in cui ha poli semplici con residui rispettivamente $r_1 = 3,\ r_2 = 5$, sapendo che:*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) - 1 - z^2 = 0.$$

Esercizio 6.11 *Determinare la funzione $f(z)$, analitica in tutto il piano complesso chiuso ad eccezione del punto $z = 0$, in cui ha un polo doppio, e del punto all'infinito, in cui ha un polo semplice, sapendo che:*

$$lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 1; \qquad lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 2$$

e che $f(z)$ ha due zeri semplici nei punti $z_\pm = \pm i$.

Esercizio 6.12 *Determinare la funzione razionale $f(z)$ che ha due zeri doppi nei punti ± 1, due poli doppi nei punti $\pm i$ e tende a 1 quando $z \to \infty$.*

Esercizio 6.13 *Determinare la funzione razionale che gode delle seguenti proprietà:*

1. *ha un polo doppio nell'origine con residuo nullo e un polo doppio all'infinito;*
2. $lim_{z \to 0} z^2 f(z) = lim_{z \to \infty} z^{-2} f(z) = 1$;
3. $f(1) = f'(1) = 0$.

Esercizio 6.14 *Determinare $f(z)$ sapendo che:*

1. $f(0) = 0$;
2. $\lim_{z \to \infty} f(z)/z = 1$;
3. *$f(z)$ ha due poli doppi in -1 e $+1$ con residui $r_{-1} = 0$ e $r_{+1} = 1$;*
4. $\lim_{z \to \pm 1} (z \mp 1)^2 f(z) = 2$.

Esercizio 6.15 *Determinare la funzione razionale $f(z)$ che:*

1. *ha un polo semplice in $z = 0$ con residuo 1 e un polo doppio in $z = 1$ con residuo 0;*
2. *ha uno zero doppio in $z = -1$ e uno zero semplice in $z = i$;*
3. *e' tale che $\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$.*

Esercizio 6.16 *Determinare la funzione $f(z)$ sapendo che è una funzione analitica in tutto il piano complesso, ad eccezione del punto all'infinito, in cui ha un polo del II ordine, e delle radici quadrate di -1, in cui ha poli semplci con residui ± 1, e che per essa valgono le formule*

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$$
$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$

Esercizio 6.17 *Determinare $g(z)$ tale che:*

1. *ha soltanto un polo semplice in* z_0*;*
2. *ha soltanto uno zero semplice in* z_0^{-1}*;*
3. $\lim_{z\to\infty} g(z) = 1$.

Esercizio 6.18 *Si ricostruisca la funzione razionale* $f(z)$*, sapendo che:*

- $f(0)$ *vale* 1*;*
- *la funzione ha due poli, uno semplice in* $z = -1$*, con residuo* 1*, e uno doppio, in* $z = 1$*, con residuo pure uguale a* 1*;*
- *la funzione tende al valore* 2 *per* $z \to \infty$*.*

Esercizio 6.19 *La funzione* $f(z)$ *ha un polo del terzo ordine all'infinito, due soli zeri di uguale molteplicità in* $z = \pm i$*, e un polo semplice con residuo* 1 *nell'origine e vale*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^3} = 1.$$

Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{f(x)}.$$

Esercizio 6.20 *Determinare la funzione razionale* $f(z)$ *sapendo che:*

1. *Ha un polo semplice in* $z = -1$ *con residuo* 1*, uno doppio in* $z = 1$ *con residuo* i*, e vale la formula* $\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = 2$.
2. $f(0) = 0$ *e* $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 1$.

Esercizio 6.21 *Determinare la funzione meromorfa* $f(z)$ *sapendo che:*

1. $f(0) = 0$
2. $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = 1$
3. $f(z)$ *ha due poli semplici in* $z = -1$ *e* $z = +1$ *con residui* $r_{-1} = 0$ *e* $r_{+1} = 1$

Esercizio 6.22 *Determinare la funzione razionale* $f(z)$ *che ha poli semplici in* $z = \pm a$*, con residui* $\pm r$*, e tale che*

$$f(0) = 1$$
$$\lim_{z\to\infty} f'(z) = 0$$

7 Integrali di funzioni razionali di funzioni trigonometriche sul periodo

Se una funzione $f(z)$ ha una singolarità isolata in un punto z_0, definiamo come "residuo" della funzione $f(z)$ in z_0 l'integrale:

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz, \tag{99}$$

dove γ è una qualunque curva chiusa percorsa in senso antiorario intorno al punto z_0 e contenuta nel dominio di analiticità di $f(z)$. Poiché l'integrale (99) è indipendente dalla scelta della curva γ, possiamo sceglierla in modo che sia contenuta nel dominio $0 < |z - z_0| < r$, dove r è il raggio di convergenza della serie di Laurent di $f(z)$ in z_0. Possiamo allora sostituire nell'integrale (99) a $f(z)$ il suo sviluppo in serie e, in virtù dell'uniforme convergenza, scambiare la serie con l'integrale. Infine, sfruttando il fatto che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (z - z_0)^k dz = \delta_{k,-1}, \tag{100}$$

possiamo concludere:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oint_\gamma c_k (z - z_0)^k = c_{-1}. \end{aligned} \tag{101}$$

Nel caso che la curva γ contenga al suo interno $I(\gamma)$ un numero finito di singolarità isolate $z_1, \ldots, z_N$ (se fossero infinite ne esisterebbe almeno una non isolata), è ancora possibile sostituire la curva γ con N curve $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, ognuna delle quali circonda il punto z_j ed è contenuta nel dominio di convergenza dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ in z_j:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{N} \oint_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Su ogni γ_j vale il discorso fatto sopra per z_0, per cui

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}_{z=z_j} f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} c_{-1}^{(j)}, \tag{102}$$

dove $c_{-1}^{(j)}$ è il coefficiente di $(z - z_j)^{-1}$ dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ in z_j. Il risultato (102) è noto come teorema dei residui.

Grazie al teorema dei residui, possiamo calcolare integrali reali di funzioni trigonometriche sull'intervallo $[0, 2\pi]$ passando al campo complesso. Infatti, ponendo $z = \exp(i\theta)$, l'integrale sul periodo si trasforma nell'integrale sul cerchio unitario e dalle formule di Eulero (12) abbiamo

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{z + z^{-1}}{2}, \tag{103}$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{z - z^{-1}}{2i}. \tag{104}$$

Quindi, integrali, ad esempio, di funzioni razionali delle funzioni $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ si trasformano in integrali di funzioni meromorfe della variabile z sul cerchio unitario e possono essere risolti utilizzando il teorema dei residui (102).

Una formula utile per calcolare il residuo quando si ha a che fare con un polo semplice è la seguente, Supponiamo che $F(z)$ sia una funzione meromorfa $F(z) = f(z)/g(z)$ ($f(z)$ e $g(z)$ funzioni analitiche), che $g(z)$ abbia uno zero semplice isolato in $z = z_0$ e $f(z)$ sia analitica in un intorno di z_0, allora

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} F(z) = \mathrm{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{105}$$

Definiamo il residuo all'infinito come

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z) dz, \tag{106}$$

dove C_R è un cerchio di raggio R sufficientemente grande da contenere tutte le singolarità al finito percorso in senso orario. Utilizzando la trasformazione $z = 1/t$, il cerchio C_R è mappato in un cerchio C_ϵ, $\epsilon = 1/R$ nel piano t, centrato nell'origine e percorso in senso antiorario. Sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

lo sviluppo di Laurent di $f(z)$ in un intorno dell'infinito. Allora, utilizzando la trasformazione $z = 1/t$ l'integrale (106) diventa

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\epsilon} -\frac{dt}{t^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^{-n} = -c^{-1}.$$

Quindi il residuo all'infinito è ancora il coefficiente c_{-1} del corrispondente sviluppo di Laurent, ma cambiato di segno.

Se $f(z)$ è analitica nel piano complesso, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate $z_1, \ldots, z_n$, allora vale:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_j} f(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Esercizio 7.1 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\cos^2(\theta)}{2 + \sin(\theta)}$$

Facendo il cambiamento di variabile

$$z = e^{i\theta} \qquad dz = i\, e^{i\theta} d\theta \quad \Rightarrow \quad d\theta = -i \frac{dz}{z}, \tag{107}$$

ed utilizzando le equazioni (103) e (104), possiamo riscrivere l'integrale come un integrale in campo complesso sulla circonferenza di raggio $|z| = 1$ percorsa in senso antiorario:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\cos^2(\theta)}{2+\sin(\theta)} = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} dz \frac{z^2+2+z^{-2}}{z^2+4iz-1}. \tag{108}$$

Il denominatore della funzione integranda ha due zeri semplici nei punti $z = -(\sqrt{3}+2)i$ (esterno alla circonferenza di raggio 1) e $z = (\sqrt{3}-2)i$ (questo invece interno). La funzione integranda (108) ha quindi un polo semplice in $z = (\sqrt{3}-2)i$ e uno doppio in $z = 0$. Per il teorema dei residui varrà:

$$I = \pi i \left[\mathrm{Res}_{z=(\sqrt{3}-2)i} \frac{z^2+2+z^{-2}}{z^2+4iz-1} + \mathrm{Res}_{z=0} \frac{z^2+2+z^{-2}}{z^2+4iz-1} \right]. \tag{109}$$

Consideriamo il primo residuo in (109), dalla formula (79), avremo:

$$\mathrm{Res}_{z=(\sqrt{3}-2)i} \frac{z^2+2+z^{-2}}{z^2+4iz-1} = \left. \frac{z^2+2+z^{-2}}{z+\left(\sqrt{3}+2\right)i} \right|_{z=(\sqrt{3}-2)i} = 2i\sqrt{3}. \tag{110}$$

Per il secondo, sempre utilizzando la formula (79), avremo

$$\mathrm{Res}_{z=0} \frac{z^2+2+z^{-2}}{z^2+4iz-1} = \left. \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{z^2+2+z^{-2}}{z^2+4iz-1} \right) \right|_{z=0} = 4i. \tag{111}$$

Sostituendo i due residui (110) e (111) in (109), otteniamo infine:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\cos^2(\theta)}{2+\sin(\theta)} = \pi\left(4-2\sqrt{3}\right).$$

Esercizio 7.2 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{R^2+r^2-2rR\cos\theta}, \qquad r < R.$$

Facendo il cambiamento di variabile (107) avremo

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$
$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{R^2+r^2-2rR\cos\theta} = -i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(R^2+r^2)z - rR\left(z^2+1\right)}$$

Dividendo numeratore e denominatore della funzione integranda per $-rR$ otteniamo:

$$I = \frac{i}{rR}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - \frac{(R^2+r^2)}{rR}z + 1} = \frac{i}{rR}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-\frac{R}{r})(z-\frac{r}{R})}$$

La funzione integranda ha quindi due poli in $r_1 = r/R$ e in $r_2 = R/r$, con r_1 interna e r_2 esterna alla circonferenza $|z| < 1$. Usando il teorema dei residui avremo quindi:

$$\frac{i}{rR}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-\frac{R}{r})(z-\frac{r}{R})} = -\frac{2\pi}{rR}\mathrm{Res}_{z=r/R}\frac{1}{(z-\frac{R}{r})(z-\frac{r}{R})} = \frac{2\pi}{R^2-r^2}.$$

Esercizio 7.3 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k) = \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta) - k\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + k\sin^2(\theta)}d\theta$$

con k reale positivo.

Innanzitutto notiamo che la funzione integranda è pari in θ, per cui possiamo scrivere

$$I(k) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(\theta) - k\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + k\sin^2(\theta)}d\theta.$$

Facciamo ora il cambiamento di variabile (107) e otteniamo:

$$I(k) = -\frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{z^4(1+k) + 2z^2(1-k) + 1 + k}{z^4(1-k) + 2z^2(1+k) + 1 - k}\frac{dz}{z} = \oint_{z=1}\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{dz}{z}$$

Per $k = 1$ il polinomio $Q(z)$ si riduce a $Q(z) = 4z^2$, la funzione integranda ha quindi un polo del terzo ordine in $z = 0$

$$\frac{P(z)}{zQ(z)} = \frac{1}{2}\left(z + z^{-3}\right),$$

con residuo nullo. Se $k \neq 1$, le 4 radici del polinomio $Q(z)$ sono tutte distinte e sono date da:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k-1}}, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k-1}} = -z_1, \\ z_3 &= \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k-1}} = \frac{1}{z_1}, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k-1}} = \frac{1}{z_2} = -\frac{1}{z_1}. \end{aligned} \tag{112}$$

$P(z)$ e $Q(z)$ non hanno zeri comuni, quindi i punti (112) sono poli del primo ordine per la funzione integranda. Verifichiamo quando tali poli sono interni al cerchio unitario. Per $0 < k < 1$ abbiamo:

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{k + 2\sqrt{k} + 1}{1-k} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{k} < 1,$$

che è sempre verificata. Se invece $k > 1$, abbiamo

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{k + 2\sqrt{k} + 1}{k-1} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{k} + 1 < 0,$$

che non lo è mai. Determiniamo ora per quali valori di k le altre due radici giacciono all'interno del cerchio unitario. Poiché

$$z_3 = \frac{1}{z_1}, \qquad z_4 = \frac{1}{z_2},$$

z_3 e z_4 saranno contenute nel cerchio unitario quando z_1 e z_2 non lo sono e viceversa. Quindi, la funzione integranda ha, all'interno del cerchio unitario,

1. tre poli semplici in $z = 0,\ z = z_1,\ z = z_2$, per $k < 1$;
2. un polo di ordine 3 in $z = 0$ con residuo nullo per $k = 1$;
3. tre poli semplici in $z = 0,\ z = z_3,\ z = z_4$ per $k > 1$.

Nel primo e nel terzo caso il residuo in $z = 0$ varrà

$$\mathrm{Res}_{z=0} \frac{P(z)}{zQ(z)} = \frac{P(0)}{Q(0)} = \frac{1+k}{1-k}.$$

Per calcolare il residuo nei punti z_1, z_2, z_3 e z_4 sfruttiamo l'equazione (105) che nel nostro caso dà:

$$\mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{P(z)}{zQ(z)} = \left.\frac{z^4(1+k) + 2z^2(1-k) + (1+k)}{4\left[z^4(1-k) + z^2(1+k)\right]}\right|_{z=z_1} = \frac{\sqrt{k}}{1-k}.$$

Poiché $P(z)/(zQ'(z))$ è una funzione pari in z e $z_2 = -z_1$, il residuo in $z = z_2$ avrà esattamente lo stesso valore di quello in $z = z_1$. Analogamente

$$\mathrm{Res}_{z=z_3} \frac{P(z)}{zQ(z)} = \mathrm{Res}_{z=z_4} \frac{P(z)}{zQ(z)} = \left.\frac{z^4(1+k) + 2z^2(1-k) + (1+k)}{4\left[z^4(1-k) + z^2(1+k)\right]}\right|_{z=z_1} = \frac{\sqrt{k}}{1-k}.$$

Utilizzando il teorema dei residui possiamo quindi concludere:

$$I(k) = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta - k\sin^2\theta}{\cos^2\theta + k\sin^2\theta} d\theta = \begin{cases} \pi\left(\dfrac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right) & 0 < k < 1, \\ 0 & k = 1, \\ \pi\left(\dfrac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right) & k > 1. \end{cases}$$

Esercizio 7.4 *Calcolare la successione di funzioni $I_n(\rho)$, ($n \in \mathbb{N},\ \rho \in \mathbb{R},\ \rho \neq 0,\ \rho^2 \neq 1$) definita dalle formule:*

$$I_n(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\theta)} d\theta$$

e la somma delle serie

$$S(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\rho).$$

Se consideriamo l'integrale

$$K_n(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta)} d\theta,$$

avremo che $I_n(\rho) = \mathrm{Re}\, K_n(\rho)$. Al solito introduciamo il cambiamento di variabile (107) in $K_n(\rho)$:

$$K_n(\rho) = -i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{z^n}{1+\rho^2-\rho\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{i}{\rho} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{z^n}{(z-\rho)\left(z-\frac{1}{\rho}\right)}.$$

Se $|\rho| < 1$, la funzione integranda avrà un polo del primo ordine all'interno del cerchio unitario nel punto $z = \rho$, con residuo

$$\mathrm{Res}_{z=\rho} \frac{z^n}{(z-\rho)\left(z-\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{\rho^{n+1}}{\rho^2-1}.$$

Se, viceversa $|\rho| > 1$, la funzione integranda avrà un polo del primo ordine all'interno del cerchio unitario nel punto $z = \rho^{-1}$, con residuo

$$\mathrm{Res}_{z=\rho^{-1}} \frac{z^n}{(z-\rho)\left(z-\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{1}{\rho^{n-1}(1-\rho^2)}.$$

In conclusione, abbiamo che

$$K_n(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1-\rho^2}\rho^n & \text{se } \rho^2 < 1, \\ \dfrac{2\pi}{\rho^2-1}\dfrac{1}{\rho^n} & \text{se } \rho^2 > 1. \end{cases}$$

Poiché $K_n(\rho)$ è una funzione reale, avremo $I_n(\rho) = K_n(\rho)$. La serie S varrà:

$$S(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1-\rho^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \dfrac{2\pi}{1-\rho^3} & \text{se } \rho^2 < 1, \\ \dfrac{2\pi}{\rho^2-1} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\rho^n} = \dfrac{2\pi\rho}{\rho^3-1} & \text{se } \rho^2 > 1. \end{cases}$$

Esercizio 7.5 *Calcolare i seguenti integrali ($p \in \mathbb{R}$):*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} dx\, \exp(-p\cos x)\, \cos(p\sin x) \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} dx\, \exp(p\sin x)\, \cos(p\cos x) \end{aligned}$$

Per I_1 avremo:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx\ \exp(-p\cos x)\ (\exp(ip\sin x) + \exp(-ip\sin x)) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx\ \exp(-p(\cos x - i\sin x)) + \exp(-p(\cos x + i\sin x)) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx\ \exp(-p(\cos x - i\sin x) + \exp(-p(\cos x + i\sin x)) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx\left[\exp(-pe^{-ix}) + \exp(-pe^{ix})\right]
\end{aligned}$$

Utilizziamo ora il cambiamento di variabile (107),

$$I_1 = -\frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}\left(e^{-\frac{p}{z}} + e^{-pz}\right)$$

e sviluppiamo in serie

$$I_1 = -\frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{p}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-pz)^n}{n!}\right).$$

Dal teorema dei residui otteniamo infine $I_1 = 2\pi$. Il secondo integrale I_2 si ottiene dal primo traslando la variabile di integrazione $x \to x - \pi/2$. Poiché l'integrale è sull'intero periodo della funzione integranda, la traslazione non cambia il valore dell'integrale. Avremo quindi $I_2 = I_1 = 2\pi$.

Esercizio 7.6 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\,\frac{\cos(n\theta)}{1 + q\,\cos(\theta)} \qquad q < 1$$

Esercizio 7.7 *Calcolare per $|\zeta| \neq 1$ l'integrale:*

$$I(\zeta) = \int_0^{2\pi} d\theta\frac{\sin(n\theta)}{1 - \zeta\exp(i\theta)}$$

e discuterne le proprietà di analiticità nella variabile ζ.

Esercizio 7.8 *Calcolare per $|a| \neq 1$ l'integrale:*

$$I = \int_0^{\pi} d\theta\frac{\cos(n\theta)}{1 + a\sin^2(\theta)}.$$

Esercizio 7.9 *Calcolare l'integrale* $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 1)$*:*

$$\int_0^\pi d\theta\, \frac{\cos(\theta) + b}{1 + a\cos(n\theta)}$$

Esercizio 7.10 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\pi d\theta \frac{1}{1 + 2\cos^2(\theta)}.$$

Esercizio 7.11 *Dimostrare che gli integrali:*

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{a\exp(in\theta) - 1} \qquad 0 < a < 1$$

sono nulli per ogni intero n *non nullo.*

Esercizio 7.12 *Calcolare per* $0 < a < 1,\ n \in \mathbb{N}$*, l'integrale:*

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos(n\theta)}{1 + a\sin(\theta)}$$

Esercizio 7.13 *Calcolare per* $\zeta \neq -1,\ n \in \mathbb{N}$*, l'integrale:*

$$I(\zeta) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\exp(in\theta)}{1 + \zeta\cos(\theta)}.$$

Discutere le proprietà di analiticità di $I(\zeta)$*.*

Esercizio 7.14 *Calcolare gli integrali:*

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta \frac{[\sin(\theta)]^{2n}}{1 + a\ \cos(\theta)}; \quad |a| < 1.$$

Esercizio 7.15 *Calcolare l'integrale*

$$I \ = \ P\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos(\theta)}{1 - \sin(\theta)}.$$

Esercizio 7.16 *Calcolare l'integrale*

$$I(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta - \cos\alpha}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta.$$

Esercizio 7.17 *Calcolare col metodo dei residui l'integrale*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\sin(\theta)}.$$

Esercizio 7.18 *Calcolare l'integrale:*

$$I_k = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\sin(k\theta)}{1 + b\cos\theta}; \qquad 0 < b < 1.$$

Esercizio 7.19 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos^2(\theta)}{2 + \sin(\theta)}.$$

Esercizio 7.20 *Calcolare gli integrali:*

$$\begin{aligned} R_n &= \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\cos(n\theta)}{1 + a\ \cos(\theta)} \\ I_n &= \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\sin(n\theta)}{1 + a\ \cos(\theta)} \end{aligned}$$

con $0 < a < 1$.

Esercizio 7.21 *Calcolare il seguente integrale:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(3\theta)}{1 + a\ \cos(\theta)} \, d\theta \qquad 0 < a < 1$$

8 Integrali di funzioni meromorfe

Il teorema dei residui si rivela utile anche per calcolare integrali definiti di funzioni razionali di variabile reale. Per effettuare questi integrali è spesso necessario calcolare integrali su archi infiniti e infinitesimi. Nel caso di archi infinitesimi abbiamo il seguente lemma:

Lemma 8.1 *Sia $C_{\epsilon,\phi}$ l'arco di circonferenza (percorso in senso antiorario) di raggio ϵ, centrato in z_0 e che descrive l'angolo tra ϕ_0 e $\phi_0 + \phi$*

$$C_{\epsilon,\phi} = \{z_0 + \epsilon\, e^{i\theta},\ \phi_0 \leq \theta \leq \phi_0 + \phi\},$$

allora

1. *se $(z - z_0)f(z)$ tende a zero uniformemente su $C_{\epsilon,\phi}$ per $\epsilon \to 0$ vale*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_{\epsilon,\phi}} f(z)dz = 0; \tag{113}$$

2. *se $f(z)$ ha un polo semplice in $z = z_0$ vale*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_{\epsilon,\phi}} f(z)dz = i\phi\, \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z). \tag{114}$$

Il caso degli archi infiniti si ottiene dal lemma precedente facendo il cambiamento di variabile $z' = 1/z$:

Lemma 8.2 *Sia $C_{R,\phi}$ l'arco di circonferenza percorso in senso antiorario di raggio R, centrato nell'origine e che descrive l'angolo tra ϕ_0 e $\phi_0 + \phi$*

$$C_{R,\phi} = \{R\, e^{i\theta},\ \phi_0 \leq \theta \leq \phi_0 + \phi\},$$

allora

1. *se $zf(z)$ tende a zero uniformemente su $C_{R,\phi}$ per $R \to \infty$ vale*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_{R,\phi}} f(z)dz = 0; \tag{115}$$

2. *se $f(z)$ ha uno zero semplice nel punto all'infinito vale*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_{R,\phi}} f(z)dz = i\phi\, \mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = -i\phi\, c_{-1}, \tag{116}$$

   dove c_{-1} è il coefficiente di $1/z$ nello sviluppo di Laurent di $f(z)$ nel punto all'infinito.

Esercizio 8.1 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{x^2}{x^4 + 1}$$

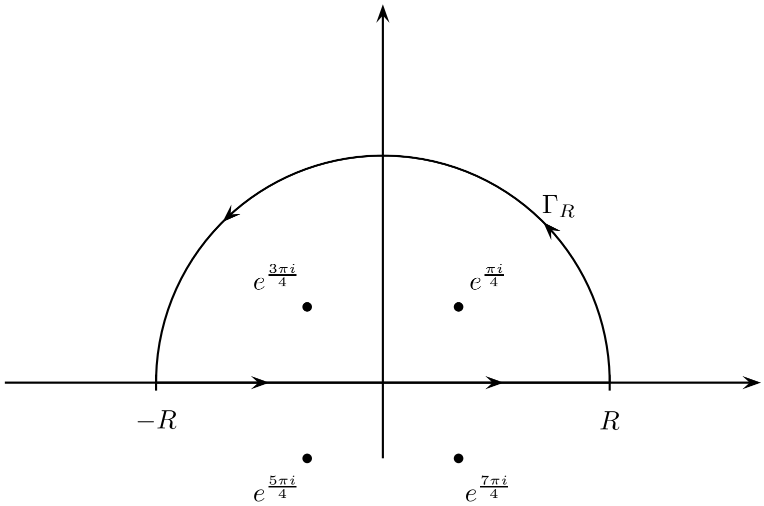
Notiamo innanzitutto che la funzione integranda è pari, quindi:

$$I = \int_0^\infty dx \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{x^4+1}$$

Passiamo al campo complesso e consideriamo l'integrale:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} dz \frac{z^2}{z^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{x^4+1} + \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} dz \frac{z^2}{z^4+1}$$

lungo la curva C_R mostrata in figura.



Per il teorema dei residui, tale integrale sarà pari a $2\pi i$ volte la somma dei residui corrispondenti alle singolarità della funzione integranda all'interno della curva C_R. D'altra parte avremo residui non nulli solo negli zeri di z^4+1 che si trovano nel semipiano superiore (come mostrato in figura). Quindi, per R abbastanza grande:

$$\oint_{C_R} dz \frac{z^2}{z^4+1} = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=\exp(\frac{\pi i}{4})} + \mathrm{Res}_{z=\exp(\frac{3\pi i}{4})}\right) \frac{z^2}{z^4+1}$$

I punti $z = \exp(\frac{\pi i}{4})$ e $z = \exp(\frac{3\pi i}{4})$ sono dei poli semplici e quindi possiamo utilizzare l'equazione (105)

$$\mathrm{Res}_{z=\exp(\frac{\pi i}{4})} \frac{z^2}{z^4+1} = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=\exp(\frac{\pi i}{4})} = \frac{1}{4}\exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right)$$

$$\mathrm{Res}_{z=\exp(\frac{3\pi i}{4})} \frac{z^2}{z^4+1} = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=\exp(\frac{3\pi i}{4})} = \frac{1}{4}\exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right)$$

Quindi:

$$\oint_{C_R} dz \frac{z^2}{z^4+1} = \frac{1}{2}\pi i \left(e^{\frac{7\pi i}{4}} + e^{\frac{5\pi i}{4}}\right) = \sqrt{2}\pi$$

Il contributo dell'integrale su Γ_R si annulla nel limite $R\to\infty$, poiché:

$$\lim_{R\to\infty} R \left|\frac{R^2 e^{2i\theta}}{R^4 e^{4i\theta}+1}\right| < \lim_{R\to\infty} \frac{R^3}{R^4-1} = 0$$

Quindi:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 8.2 *La funzione $f(z)$ è continua e non nulla sulla curva chiusa γ, e nel dominio interno ad essa è analitica ovunque ad eccezione di un numero P di poli (non necessariamente distinti). Siano N i suoi zeri (anch'essi, non necessariamente distinti). Dimostrare la formula (teorema dell'incremento logaritmico):*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P$$

Nelle ipotesi dell'esercizio possiamo applicare il teorema dei residui:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_k \mathrm{Res}_{z=z_k} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

dove la somma è su tutti i punti di non analiticità della funzione integranda. Tali punti sono precisamente gli zeri e i poli di $f(z)$. Dimostriamo ora che il residuo di $f'(z)/f(z)$ in uno zero di $f(z)$ è pari all'ordine dello zero mentre in un polo di $f(z)$ è pari all'ordine del polo cambiato di segno.

Se $f(z)$ ha uno zero di ordine m in z_j, $f'(z)$ ne avrà uno di ordine $m-1$ e il loro rapporto $f'(z)/f(z)$ avrà un polo del primo ordine. Inoltre esisterà un $r > 0$ per il quale lo sviluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_j)^n$$

convergerà uniformemente nel dominio $|z - z_j| < r$. Potremo quindi derivare lo sviluppo termine a termine e scrivere:

$$f'(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n\, c_n (z - z_j)^{n-1}$$

Il residuo di $f'(z)/f(z)$ in $z = z_j$ sarà quindi dato da:

$$\mathrm{Res}_{z=z_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z\to z_j} (z - z_j)\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z\to z_j} (z - z_j)\frac{\sum_{n=m}^{\infty} n\, c_n (z-z_j)^{n-1}}{\sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-z_j)^n} =$$
$$= \lim_{z\to z_j} (z - z_j)\frac{m\, c_m (z-z_j)^{m-1} + O((z-z_j)^m)}{c_m (z-z_j)^m + O((z-z_j)^{m+1})} = m$$

Consideriamo ora il caso in cui z_j è un polo di ordine m per $f(z)$. Allora $f'(z)$ avrà in $z = z_j$ un polo di ordine $m+1$ e quindi il rapporto $f'(z)/f(z)$ avrà nuovamente un polo del primo ordine. Di nuovo esisterà un $r > 0$ tale che lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_j)^n$$

converga uniformemente per $0 < |z - z_k| < r$ e potremo derivare lo sviluppo termine a termine:

$$f'(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} n\, c_n (z - z_j)^{n-1}$$

Il residuo sarà in questo caso:

$$\mathrm{Res}_{z=z_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \to z_j} (z - z_j) \frac{f'(z)}{f(z)} =$$
$$\lim_{z \to z_j} (z - z_j) \frac{-m\, c_{-m}(z - z_j)^{-m-1} + O((z - z_j)^{-m})}{c_{-m}(z - z_j)^{-m} + O((z - z_j)^{-m+1})} = -m$$

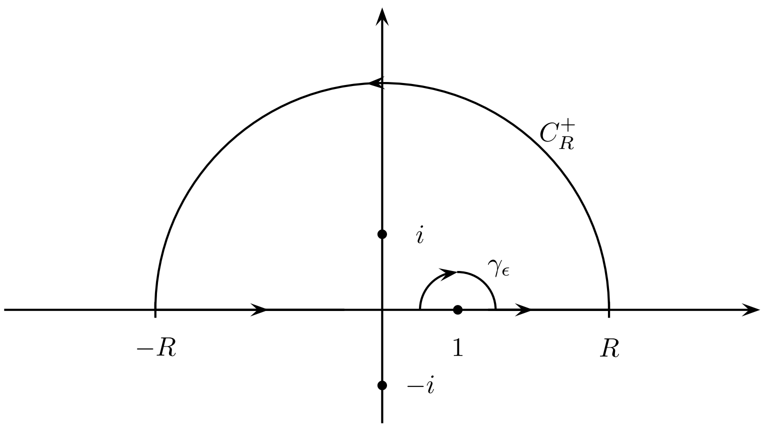
Esercizio 8.3 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

Passiamo al campo complesso e consideriamo l'integrale

$$\oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} dz \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}$$

sul cammino $\Gamma_{R,\epsilon}$ definito in figura



Avremo che

$$\lim_{R \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} dz \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} +$$
$$+ \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} dz \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} + \lim_{R \to \infty} \int_{C_R^+} dz \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} \tag{117}$$

Nel limite $\epsilon \to 0$, la curva γ_ϵ è un arco infinitesimo di ampiezza π intorno a $z = 1$ (che è un polo semplice della funzione integranda) percorso in senso orario, per cui

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} dz \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = -\pi i\, \mathrm{Res}_{z=1} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = -\frac{\pi i}{2}.$$

Sulla semicirconferenza centrata nell'origine C_R^+ il modulo della funzione integranda tende a zero come $1/R^3$ per $R \to \infty$, per cui

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} dz \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = 0.$$

L'integrale sul cammino chiuso $\Gamma_{R,\epsilon}$ è uguale a $2\pi i$ per la somma dei residui della funzione integranda contenuti all'interno del cammino di integrazione. Nel nostro caso la funzione integranda ha tre poli semplici in $z = 1$, $z = -i$, $z = i$, di cui solo quest'ultimo è contenuto nel cammino di integrazione. Quindi

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} dz \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=i} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = \pi \frac{1+i}{2}.$$

Dalla (117) otteniamo infine:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \pi \frac{1+i}{2} - \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 8.4 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \oint_C dz\, w(z)$$

con C circonferenza di centro $z_0 = 0$ e raggio $R = 1$ e $w(z)$ la funzione:

$$w(z) = \sum_{m=-a}^{a} (-1)^m z^m \sum_{n=-b}^{b} n^3 z^n, \qquad b < a - 2.$$

La funzione $w(z)$ è scritta come una somma di potenze centrata in zero. Per calcolare l'integrale di $w(z)$ è quindi sufficiente identificare il coefficiente di z^{-1}. A tal scopo riscriviamo $w(z)$ nella forma:

$$w(z) = \sum_{m=-a}^{a} \sum_{n=-b}^{b} (-1)^{m+n} z^{m+n} (-1)^n n^3.$$

Introduciamo ora il nuovo indice di sommatoria $k = m+n$. Ovviamente k varia tra $-a-b$ e $a+b$. Poiché $n = k - m$, l'indice n varierà, al variare di k tra $k-a$ e $k+a$, sempre che tali valori siano compresi tra $-b$ e b. In altre parole, al variare di k l'indice n assumerà i valori compresi tra

$$\max(-b, k-a) < n < \min(b, k+a).$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}
k < a - b \quad &\Longrightarrow \quad \max(-b, k-a) = -b,\\
k > a - b \quad &\Longrightarrow \quad \max(-b, k-a) = k - a,\\
k < b - a \quad &\Longrightarrow \quad \min(b, k+a) = k + a,\\
k > b - a \quad &\Longrightarrow \quad \min(b, k+a) = b.
\end{aligned}$$

Nel nostro caso, poiché $b-a < a-b$, gli estremi di variazione per n cambieranno quando il valore di k passa da $b-a$ a $b-a+1$ e quando passa da $a-b$ a $a-b+1$. Al passare agli indici k e n, dovremo quindi spezzare la sommatoria in tre parti:

$$
\begin{aligned}
w(z) &= \sum_{k=-b}^{b-a} (-1)^k z^k \sum_{n=-b}^{k+a} (-1)^n n^3 + \\
&+ \sum_{k=b-a+1}^{a-b} (-1)^k z^k \sum_{n=-b}^{b} (-1)^n n^3 + \sum_{k=a-b+1}^{a+b} (-1)^k z^k \sum_{n=k-a}^{b} (-1)^n n^3.
\end{aligned}
$$

La condizione $b < a-2$ ci dice che la potenza z^{-1} è contenuta nella somma centrale e quindi il suo coefficiente è:

$$c_{-1} = \sum_{n=-b}^{b} (-1)^n n^3 = \sum_{1}^{b} (-1)^{-n} (-n)^3 + \sum_{1}^{b} (-1)^n n^3 = 0.$$

Quindi l'integrale I si annulla.

Esercizio 8.5 *Sia $P(z)$ un polinomio di grado n, con zeri $\{z_j\}_{j=1}^n$ non nulli. Dimostrare la formula:*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^k}{P'(z_j)} = 0; \quad k = 0, \ldots, n-2.$$

Sia C una circonferenza di raggio abbastanza grande da contenere tutti gli zeri $\{z_j\}_{j=1}^n$ di $P(z)$ (percorsa in senso antiorario). Allora, per $k \geq 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^k}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_j} \frac{z^k}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^k}{P'(z_j)},$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla formula (105). Per definizione, avremo anche

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^k}{P(z)} = -\mathrm{Res}_{z=\infty} \frac{z^k}{P(z)}.$$

Ma

$$\frac{z^k}{P(z)} \simeq z^{k-n} \qquad z \to \infty,$$

quindi, per $k \leq n-2$, lo sviluppo in serie di Laurent di $z^k/P(z)$ nell'intorno dell'infinito non contiene il termine z^{-1} e il corrispondente residuo si annulla. Concludiamo quindi

$$0 = -\mathrm{Res}_{z=\infty} \frac{z^k}{P(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^k}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^k}{P'(z_j)}.$$

Esercizio 8.6 *Senza effettuare l'integrale, dimostrare la formula:*

$$\oint_{C_R} dz \frac{1}{z^4 + 8z - 9} = 0, \tag{118}$$

dove C_R *è un cerchio di centro l'origine e raggio* $R > 3$.

Quando $R > 3$ la circonferenza C_R contiene tutti i poli della funzione integranda. Infatti vale:

$$|z^4 + 8z - 9| > |z^4| - 8|z| - 9 > 3^4 - 8 \cdot 3 - 9 = 48.$$

Quindi la funzione $z^4 + 8z - 9$ non può mai annullarsi quando $|z| > 3$. Per definizione l'integrale (118) sarà allora pari a $-2\pi i$ volte il residuo della funzione integranda nel punto all'infinito. Poiché il termine dominante dello sviluppo di Laurent di $1/(z^4 + 8z - 9)$ nell'intorno dell'infinito è $1/z^4$, tale residuo è nullo e la formula (118) è dimostrata.

Esercizio 8.7 *Calcolare l'integrale* $(a, b \in \mathbb{R})$*:*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x + a}{x^4 + b^4} \quad (b > 0)$$

Esercizio 8.8 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_{\gamma_k} dz \frac{\cos z}{z^2(z-1)}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

dove γ_k *sono le curve chiuse orientate positivamente, e così definite:*

1. $\gamma_1 : \; |z| = 1/3$;
2. $\gamma_2 : \; |z - 1| = 1/3$;
3. $\gamma_3 : \; |z| = 2$.

Esercizio 8.9 *Calcolare l'integrale*

$$I = \oint_C dz \frac{1}{\sin^2 z},$$

dove C *è il cerchio centrato nell'origine di raggio* $r = 3/2\pi$ *percorso in senso antiorario.*

Esercizio 8.10 *Calcolare l' integrale:*

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\exp(1/z)}{z + 1} dz$$

Esercizio 8.11 *Calcolare l'integrale*

$$I = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} dz \frac{z^4 + 13z^3 + 802z}{53z^5 + 1044}$$

dove C_R *è una circonferenza di centro l'origine e raggio* R *percorsa in senso antiorario.*

Esercizio 8.12 *Calcolare l'integrale*

$$I = \oint_C dz \frac{\exp(z^2)}{(z^2 - 1)^2 \sin(\pi z)}$$

dove C *è la circonferenza di equazione* $|z - 1/2| = 1$ *percorsa in senso antiorario.*

Esercizio 8.13 *Calcolare l'integrale:*

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} dz \frac{z^3}{2z^4 + 5z^3 + 27},$$

dove C_R *è la circonferenza di raggio* R*, centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.*

Esercizio 8.14 *Calcolare il residuo in* $z = 0$ *delle seguenti funzioni:*

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2}; \quad f_2(z) = \frac{1}{\sinh z} - \frac{1}{z}; \quad f_3(z) = \exp(1/z).$$

Calcolare poi gli integrali $\oint_{|z|=3\pi/2} f_i(z)$.

Esercizio 8.15 *Calcolare*

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \, \frac{\zeta^n}{\zeta - z} \qquad (|z| \neq 1)$$

con n *intero positivo, nullo o negativo.*

Esercizio 8.16 *Date le funzioni*

1. $\dfrac{1}{(z-1)^2}$

2. $\dfrac{1}{(z^2-1)}$

3. $\dfrac{1}{z^2}$

Dire quali di esse è integrabile su $|z| = 1$, quale è integrabile solo nel senso del valor principale e quale non è integrabile. Laddove gli integrali esistono, se ne fornisca il risultato.

Esercizio 8.17 *Determinare zeri e poli della funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{\sinh(z)}$$

e calcolare

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz$$

Dove Γ la curva chiusa composta dal segmento $(-3\pi/2,\, 3\pi/2)$ e dalla semicirconferenza $|z| = 3\pi/2$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ percorsa in senso antiorario.

Il punto all'infinito è una singolarità isolata? Motivare la risposta.

Esercizio 8.18 *Calcolare gli integrali:*

$$I_1 = \int_{|z|=2} \frac{z\ \exp(tz)}{(z+1)^3}\, dz$$

$$I_2 = \int_{|z|=2} \frac{\exp(1/z)}{z+1}\, dz$$

9 Integrali di tipo Fourier

Strumento essenziale per calcolare integrali di tipo Fourier è il lemma di Jordan

Lemma 9.1 *Sia $C_{R,\phi}$ un arco di circonferenza di raggio R e ampiezza ϕ interamente contenuto nel semipiano superiore del piano complesso* $\mathrm{Im}\, z \geq 0$. *Supponiamo che $f(z)$ si annulli uniformemente su $C_{R,\phi}$ per $R \to \infty$, allora per $k > 0$*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_{R,\phi}} e^{ikz} f(z) dz = 0. \tag{119}$$

Se $k < 0$ l'equazione (119) vale quando $C_{R,\phi}$ è contenuta nel semipiano inferiore $\mathrm{Im}\, z \leq 0$

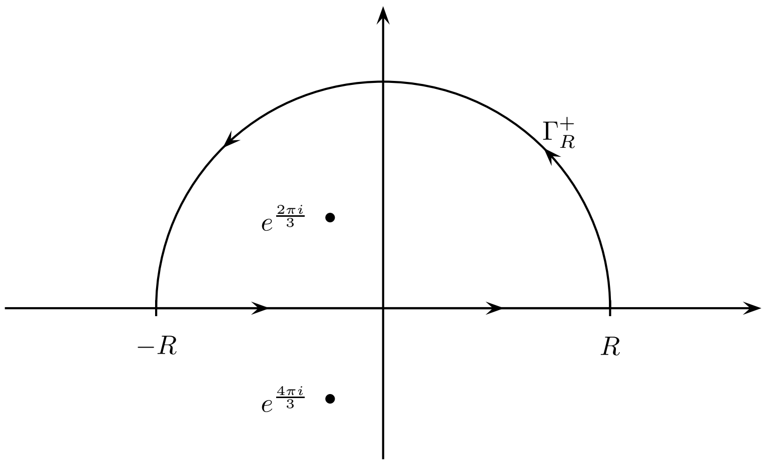
Esercizio 9.1 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp(ikx)}{x^2 + x + 1} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

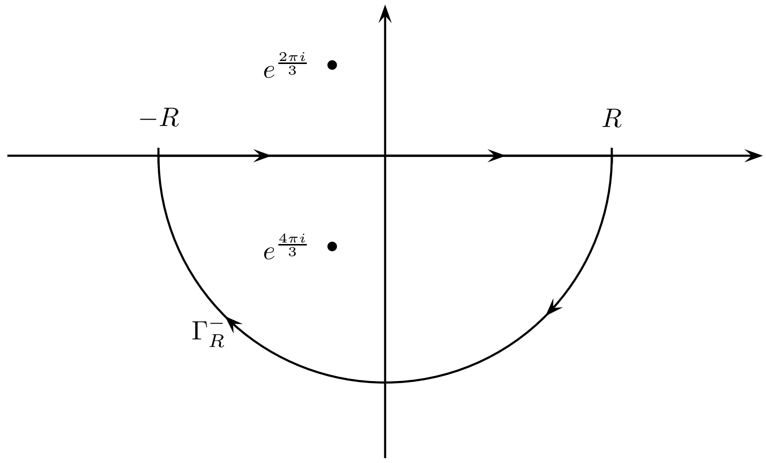
Passiamo al campo complesso e consideriamo gli integrali

$$I_+(k) = \oint_{C_R^+} dz \frac{\exp(ikz)}{z^2 + z + 1} \quad (k \geq 0)$$
$$I_-(k) = \oint_{C_R^-} dz \frac{\exp(ikz)}{z^2 + z + 1} \quad (k < 0)$$

dove C_R^+ è la curva:



e C_R^- è la curva:



Gli zeri del polinomio z^2+z+1 sono riportati in figura. Usando il teorema dei residui, abbiamo:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R^+} dz\frac{\exp(ikz)}{z^2+z+1} = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=e^{\frac{2\pi i}{3}}}\frac{\exp(ikz)}{z^2+z+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(\frac{-k}{2}(\sqrt{3}+i)\right)$$
$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R^-} dz\frac{\exp(ikz)}{z^2+z+1} = -2\pi i \mathrm{Res}_{z=e^{\frac{4\pi i}{3}}}\frac{\exp(ikz)}{z^2+z+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(\frac{k}{2}(\sqrt{3}-i)\right)$$

La funzione $1/(z^2+z+1)$ ha sulla circonferenza di raggio R l'andamento asintotico

$$\left|\frac{1}{R^2e^{2i\theta}+Re^{i\theta}+1}\right| \underset{R\to\infty}{\sim} \frac{1}{R^2}$$

Dal lemma di Jordan segue che gli integrali su Γ_R^+ (per $k>0$) e su Γ_R^- (per $k<0$) si annullano nel limite $R\to\infty$, mentre per $k=0$ l'integrale si annulla sia su Γ_R^+ che Γ_R^-. In conclusione abbiamo:

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\exp(ikx)}{x^2+x+1} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(\dfrac{-k}{2}(\sqrt{3}+i)\right) & k\geq 0 \\[2ex] \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(\dfrac{k}{2}(\sqrt{3}-i)\right) & k<0 \end{cases}$$

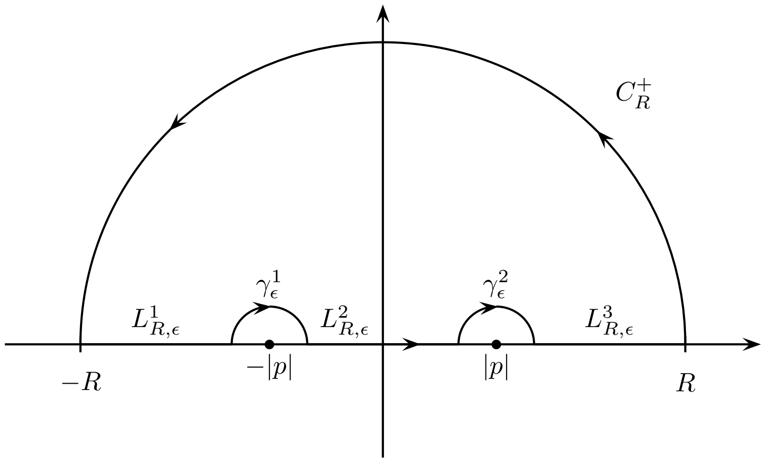
Esercizio 9.2 *Calcolare l'integrale ($p, x \in \mathbb{R}$))*

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{p^2-k^2}dk.$$

Consideriamo separatamente i due casi $x\geq 0$ e $x<0$. Se $x>0$ consideriamo l'integrale

$$\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma_{R,\epsilon}^+}\frac{e^{izx}}{p^2-z^2}dz,$$

dove $\Gamma^+_{R,\epsilon}$ è il cammino chiuso indicato in figura



$\Gamma^+_{R,\epsilon}$ è l'unione delle 6 curve $L^1_{R,\epsilon}, L^2_{R,\epsilon}, L^3_{R,\epsilon}, \gamma^1_\epsilon, \gamma^2_\epsilon, C^+_R$, dove $\gamma^1_\epsilon, \gamma^2_\epsilon$ sono semicirconferenze di raggio ϵ centrate rispettivamente in $-|p|$ e $|p|$ e percorse in senso orario. Poiché dentro $\Gamma_{R,\epsilon}$ la funzione integranda è analitica, avremo che

$$\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{e^{izx}}{p^2 - z^2} dz = 0.$$

Nel limite $R \to \infty$ anche l'integrale su C^+_R si annulla (per il lemma di Jordan se $x > 0$ e perché la funzione integranda tende a zero uniformemente su C^+_R se $x = 0$).

Per definizione

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{p^2 - k^2} dk = \lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0} \oint_{L^1_{R,\epsilon}+L^2_{R,\epsilon}+L^3_{R,\epsilon}} \frac{e^{izx}}{p^2 - z^2} dz$$

Infine

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\gamma^1_\epsilon+\gamma^2_\epsilon} \frac{e^{izx}}{p^2 - z^2} dz &= -\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=-p} \left(\frac{e^{izx}}{p^2 - z^2} \right) + \mathrm{Res}_{z=p} \left(\frac{e^{izx}}{p^2 - z^2} \right) \right] = \\ &= -\pi \frac{\sin(px)}{p} \end{aligned}$$

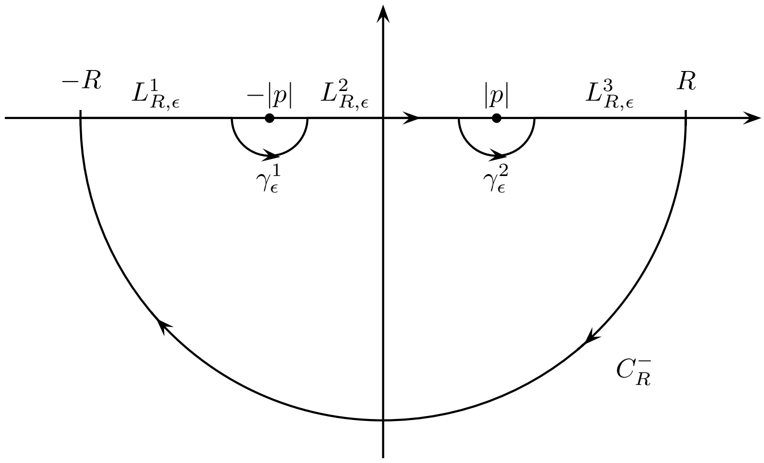
Quindi

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{p^2 - k^2} dk = \pi \frac{\sin(px)}{p}, \qquad x \geq 0.$$

Passiamo ora al caso $x < 0$. In questo caso consideriamo l'integrale

$$\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma^-_{R,\epsilon}} \frac{e^{izx}}{p^2 - z^2} dz$$

sulla curva $\Gamma^-_{R,\epsilon}$ descritta in figura



Di nuovo la funzione integranda è analitica all'interno di Γ^-_R, per cui il corrispondente integrale si annulla. Il lemma di Jordan ci assicura che si annulla anche l'integrale su C^-_R, mentre l'integrale su γ^1_ϵ e γ^2_ϵ semplicemente cambia di segno, visto che le curve girano ora in senso antiorario intorno alle singolarità. Quindi

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{p^2-k^2}dk = -\pi\frac{\sin(px)}{p}, \qquad x < 0.$$

In conclusione

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{p^2-k^2}dk = \pi\frac{\sin(p|x|)}{p}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 9.3 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\sin^4(x)}{x^4}.$$

Scriviamo l'integrale nella forma:

$$I = \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R dx\frac{\sin^4(x)}{x^4}$$

Usando la parità della funzione integranda:

$$I = \frac{1}{2}\left(\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-R}^{-\epsilon} dx\frac{\sin^4(x)}{x^4} + \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R dx\frac{\sin^4(x)}{x^4}\right)$$

Passiamo al campo complesso aggiungendo al cammino di integrazione una semicirconferenza Γ_ϵ congiungente i punti $(-\epsilon,\epsilon)$. Poiché $\sin^4 z/z^4$ ha una singolarità eliminabile in $z=0$, avremo che:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} dz\frac{\sin^4(z)}{z^4}dz = 0$$

Scriviamo la funzione seno in termini di esponenziali complessi:

$$\sin^4 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4iz} - 4e^{2iz} + 6 - 4e^{-2iz} + e^{-4iz}}{16}$$

Per il lemma di Jordan:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{4iz} - 4e^{2iz} + 6}{16z^4} dz = 0$$

sulla semicirconferenza $\Gamma_R^+ = Re^{i\theta},\ \theta \in [0, \pi]$ e

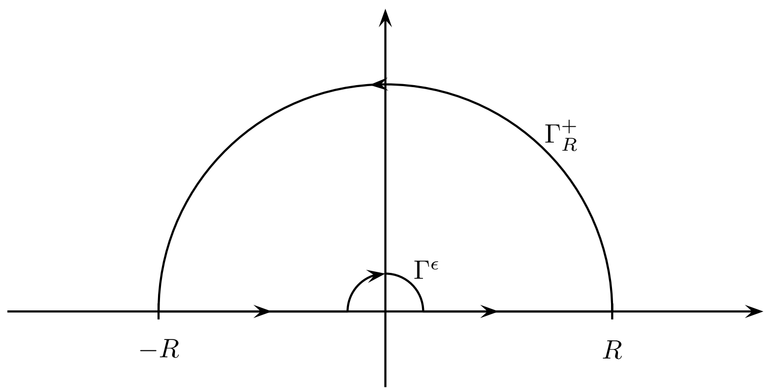
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{-4iz} - 4e^{-2iz}}{16z^4} dz = 0$$

sulla semicirconferenza $\Gamma_R^- = Re^{i\theta},\ \theta \in [\pi, 2\pi]$.

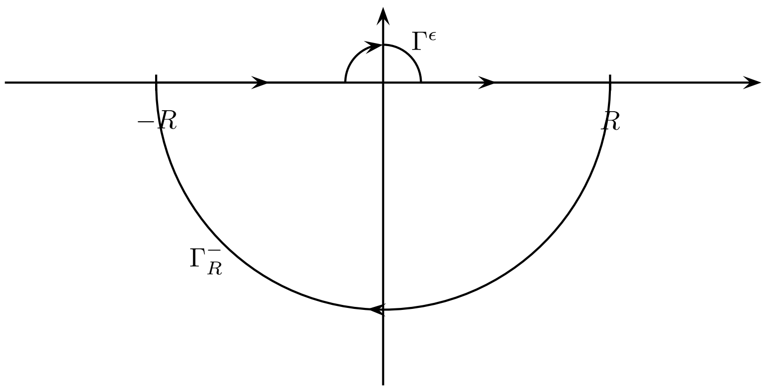
Possiamo quindi riscrivere il nostro integrale nella forma:

$$I = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \left(\lim_{\epsilon\to 0} \oint_{C_{R,\epsilon}^+} \frac{e^{4iz} - 4e^{2iz} + 6}{16z^4} dz + \oint_{C_{R,\epsilon}^-} = I_+ + I_-, \frac{e^{-4iz} - 4e^{-2iz}}{16z^4} dz \right)$$

dove $C_{R,\epsilon}^+$ è la curva:



e $C_{R,\epsilon}^-$ è la curva:



I_+ si annulla perché il cammino di integrazione non contiene il punto $z = 0$ che è l'unica singolarità al finito della funzione integranda. Per I_- avremo invece che (il segno meno è dovuto al fatto che la curva $C_{R,\epsilon}^-$ è percorsa in senso orario):

$$I_- = -\pi i \text{Res}_{z=0}\left(\frac{e^{-4iz} - 4e^{-2iz}}{16z^4}\right)$$

In $z = 0$ abbiamo un polo del quarto ordine, quindi:

$$I = I_- = -\pi i \lim_{z\to 0} \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left(z^4 \frac{e^{-4iz} - 4e^{-2iz}}{16z^4}\right) = -\frac{\pi i}{96}(64i - 32i) = \frac{\pi}{3}$$

Esercizio 9.4 *Si considerino le funzioni $g_\pm(t)$ così definite:*

$$g_\pm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ixt}}{x - x_0 \pm i\epsilon}$$

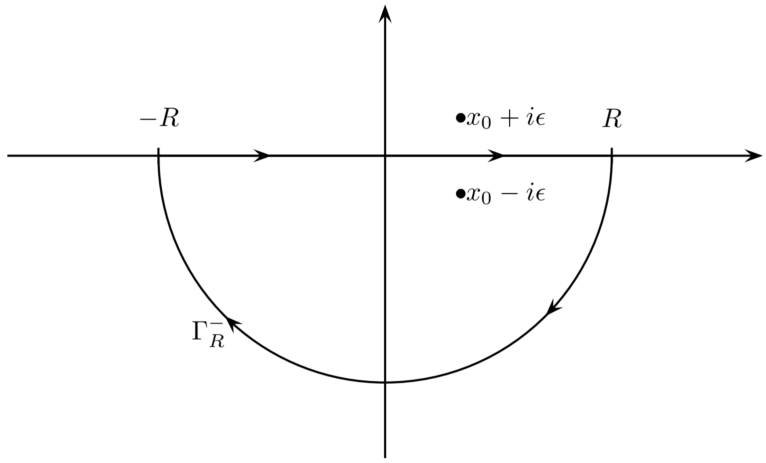
dove $\epsilon > 0, x_0, t \in \mathbb{R}$.
Dimostrare che

$$g_\pm(t = 0^+) - g_\pm(t = 0^-) = -2\pi i.$$

Consideriamo prima il caso $t > 0$. Passiamo al campo complesso e consideriamo l'integrale

$$\oint_{C_R^-} dz \frac{e^{-izt}}{z - x_0 \pm i\epsilon},$$

dove C_R^- è la curva



Per R che va a infinito, la funzione integranda in $g_+(t)$ possiede un polo semplice all'interno di C_R^- con residuo

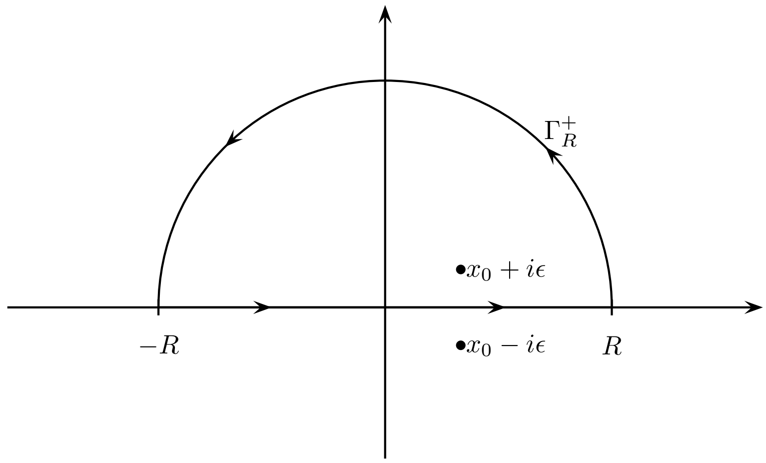
$$\text{Res}_{z=x_0-i\epsilon}\frac{e^{-izt}}{z-x_0+i\epsilon} = e^{(\epsilon-ix_0)t},$$

mentre la funzione $g_-(t)$ non possiede nessuna singolarità all'interno di C_R^-. Dal lemma di Jordan segue che l'integrale su Γ_R^- si annulla nel limite $R\to\infty$ e quindi utilizzando il teorema dei residui avremo che

$$\begin{aligned} g_+(t) &= \lim_{R\to\infty}\oint_{C_R^-} dz\frac{e^{-izt}}{z-x_0+i\epsilon} = -2\pi i e^{-(\epsilon+ix_0)t} \qquad t>0, \\ g_-(t) &= \lim_{R\to\infty}\oint_{C_R^-} dz\frac{e^{-izt}}{z-x_0-i\epsilon} = 0 \qquad t>0, \end{aligned}$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che la curva C_R^- è percorsa in senso orario.

Passiamo ora al caso $t<0$ e consideriamo la curva C_R^+



Utilizzando gli stessi argomenti esposti nel caso $t > 0$, concludiamo che

$$\begin{aligned} g_+(t) &= \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R^+} dz \frac{e^{-izt}}{z - x_0 + i\epsilon} = 0 \qquad t < 0, \\ g_-(t) &= \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R^+} dz \frac{e^{-izt}}{z - x_0 - i\epsilon} = 2\pi i e^{(\epsilon - ix_0)t} \qquad t < 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} g_+(t) = -2\pi i, &\quad \lim_{t\to 0^-} g_+(t) = 0, \\ \lim_{t\to 0^+} g_-(t) = 0, &\quad \lim_{t\to 0^-} g_-(t) = 2\pi i. \end{aligned}$$

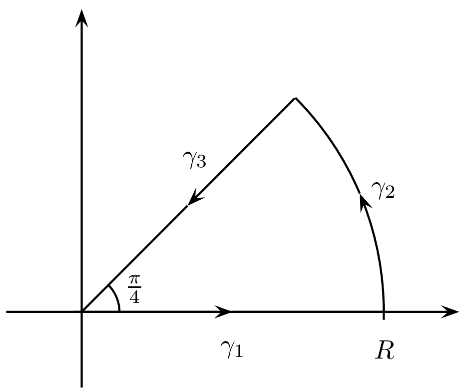
Esercizio 9.5 *Calcolare "l'integrale di Fresnel"*

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx \tag{120}$$

Consideriamo l'integrale

$$\oint_{\Gamma_R} e^{iz^2} dz \tag{121}$$

lungo il cammino chiuso Γ_R mostrato in figura



Poiché la funzione e^{iz^2} è analitica nell'intero piano complesso, il suo integrale su un cammino chiuso è identicamente nullo, quindi

$$\oint_{\Gamma_R} e^{iz^2} dz = 0.$$

L'integrale lungo l'arco γ_1 nel limite $R \to \infty$ è esattamente l'integrale di Fresnel (120).

L'arco γ_2 puó essere parametrizzato come $z = Re^{i\theta}, \; 0 < \theta < \pi/4$, quindi

$$\int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz = i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(R^2 e^{2i\theta}\right) Re^{i\theta} d\theta = \frac{i}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(R^2 e^{i\phi}\right) Re^{i\frac{\phi}{2}} d\phi,$$

avendo introdotto la nuova variabile $\phi = 2\theta$. Prendiamo ora il modulo di questo integrale

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz\right| &= \frac{1}{2}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(R^2 e^{i\phi}\right) Re^{i\frac{\phi}{2}} d\phi\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\exp\left(R^2 e^{i\phi}\right) Re^{i\frac{\phi}{2}} d\phi\right| = \\
&= \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-R^2 \sin\phi) d\phi \leq \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2R^2\phi}{\pi}\right) d\phi = \\
&= -\frac{\pi}{4R}\exp\left(-\frac{2R^2\phi}{\pi}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza $\sin\phi \geq 2\phi/\pi$, valida per $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Ne segue che l'integrale lungo l'arco γ_2 si annulla nel limite $R \to \infty$.

L'arco γ_3 può essere parametrizzato come $z = xe^{\frac{i\pi}{4}}, \; R \geq x \geq 0$, quindi

$$\int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz = e^{\frac{i\pi}{4}} \int_R^0 \exp\left(x^2 e^{\frac{i\pi}{2}}\right) dx = e^{\frac{i\pi}{4}} \int_R^0 e^{-x^2} dx.$$

Prendiamo ora il limite $R \to \infty$ in (121) e otteniamo

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} e^{iz^2} dz = \int_0^\infty e^{ix^2} dx - e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Calcoliamo l'integrale gaussiano

$$I_G = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Abbiamo che

$$I_G^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right).$$

Se consideriamo le variabili x e y come gli assi coordinati del piano, possiamo scrivere

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx \wedge dy.$$

Introduciamo ora coordinate polari r, θ

$$r = x^2 + y^2, \qquad dx \wedge dy = r\, dr \wedge d\theta$$

e otteniamo

$$I_G^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr \wedge d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr = -\frac{\pi}{4}\, e^{-r^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

In conclusione

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{\frac{i\pi}{4}} I_G = e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Esercizio 9.6 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^{\infty} dx \frac{1-\cos(kx)}{x^2(x^2+a^2)}$$

Esercizio 9.7 *Calcolare gli integrali:*

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{\cos(kx)}{x^2+a^2},$$
$$\int_0^{+\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x(x^2+a^2)}.$$

Esercizio 9.8 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\cos(2x)-1}{x^2}$$

Esercizio 9.9 *Calcolare l'integrale*

$$F(x) \;=\; \int_0^{\infty} dt \; \frac{\cos xt}{1+t^2}$$

.

Esercizio 9.10 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_0^{\infty} dt \, \frac{\sin t}{t(t^4+1)}$$

Esercizio 9.11 *Calcolare l'integrale ($a \in \mathbb{R}$):*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1-\cos x}{x^2(x^2-a^2)}$$

Esercizio 9.12 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k) = P \int_0^{+\infty} dx \frac{\sin^2(kx)}{(x^2-1)(x^2+1)}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 9.13 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos^3 x}{1+x^2}.$$

Esercizio 9.14 *Calcolare l'integrale:*

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x) - \sin(\beta x)}{x} dx, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 9.15 *Calcolare l'integrale*

$$I = P \int_0^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x(x^2 - a^2)}, \qquad k, a \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 9.16 *Calcolare l'integrale*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{x^4 - 1} dx \qquad k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 9.17 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_0^{\infty} dx \, \frac{\sin^4(x)}{x^4}$$

Esercizio 9.18 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_1^{\infty} dx \, \frac{e^{ix}}{(x-1)^2 + 4}$$

Esercizio 9.19 *Calcolare il seguente integrale:*

$$P \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin(kx)}{x+a} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 9.20 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = P \int_0^{\infty} dx \, \frac{\cos(\gamma x)}{x^2 - a^2} \qquad \gamma, a \in \mathbb{R}$$

10 Integrali con funzioni razionali di funzioni iperboliche

Un ulteriore classe di funzioni di variabile reale che è possibile integrare sull'asse reale attraverso il teorema dei residui è quella delle funzioni razionali di funzioni iperboliche. Questo perchè le funzioni iperboliche nel piano complesso sono periodiche nella direzione dell'asse immaginario. Si considera quindi, in genere, un cammino rettangolare Γ_R costituito dal segmento L_1 che va da $-R$ a R dell'asse reale, dal segmento L_3, traslato di una quantità iy rispetto al primo, che va da $R + iy$ a $-R + iy$ e dai due segmenti L_2 e L_4 che vanno da R a $R + iy$ e da $-R + iy$ a $-R$. La quantità iy è scelta in maniera tale che la funzione integranda assuma gli stessi valori (o valori proporzionali) su $-L_3$ e su L_1 (cosa che è appunto possibile per la periodicità delle funzioni iperboliche rispetto alla direzione dell'asse immaginario). Quando consideriamo il limite $R \to \infty$, l'integrale su Γ_R sarà uguale a $2\pi i$ volte la somma dei residui della funzione integranda contenuti dentro Γ_R e, in generale, le condizioni di integrabilità sull'asse reale garantiranno che gli integrali su L_2 e L_4 si annullino. Questo procedimento ci permetterà quindi di desumere il valore dell'integrale della nostra funzione sull'asse reale dalla conoscenza dei suoi residui contenuti all'interno del rettangolo Γ_R.

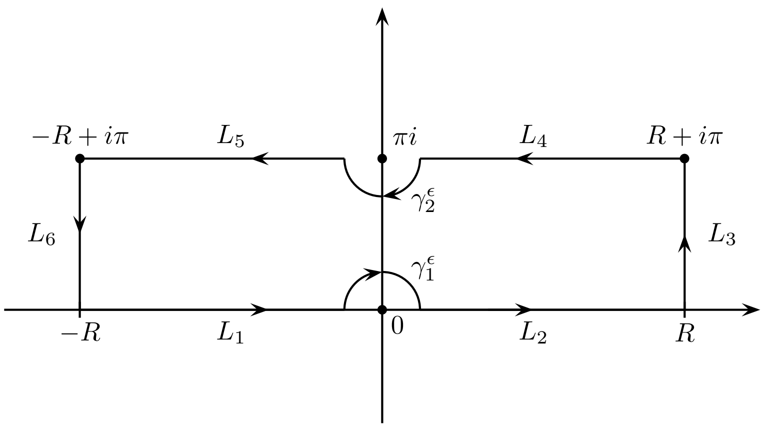
Esercizio 10.1 *Calcolare il seguente integrale:*

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{e^{\nu x}}{\sinh(x)} \qquad -1 < \mathrm{Re}\, \nu < 1$$

Consideriamo l'integrale

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma_R} dz \, \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)}$$

dove il cammino Γ_R è indicato in figura



I poli della funzione integranda si trovano nei punti $z_k = k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$, nessuno dei quali è compreso nel cammino d'integrazione Γ_R. Di conseguenza, per il teorema dei residui, l'integrale su Γ_R si annulla.

Il cammino Γ_R è suddiviso negli 8 cammini $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, \gamma_1^\epsilon, \gamma_2^\epsilon$, con γ_1^ϵ e γ_2^ϵ semicirconferenze di raggio ϵ che contornano, rispettivamente, l'origine ed il punto $z = \pi i$. Per definizione, avremo che

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{L_1 \cup L_2} dz\, \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{\nu x}}{\sinh(x)}.$$

L'integrale su $L_4 \cup L_5$ è uguale a quello su $L_1 \cup L_2$ cambiato di segno e con la variabile x traslata di $i\pi$:

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{L_4 \cup L_5} dz\, \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} = -P \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{\nu(x+i\pi)}}{\sinh(x+i\pi)}.$$

Ma $\sinh(x + i\pi) = -\sinh(x)$, quindi

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{L_4 \cup L_5} dz\, \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} = e^{i\nu\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{\nu x}}{\sinh(x)}.$$

L'integrale su L_3 si annulla nel limite $R \to \infty$, infatti

$$\int_{L_3} dz\, \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} = 2i \int_0^\pi dy \frac{e^{\nu(R+iy)}}{e^{R+iy} - e^{-R-iy}}.$$

Notiamo ora che

$$\left| \frac{e^{\nu(R+iy)}}{e^{R+iy} - e^{-R-iy}} \right| = \frac{e^{\mathrm{Re}(\nu)R} e^{-\mathrm{Im}(\nu)y}}{\left|e^{R+iy} - e^{-R-iy}\right|}.$$

Poiché

$$\left|e^{R+iy} - e^{-R-iy}\right| \geq \left|e^{R+iy}\right| - \left|e^{-R-iy}\right| = e^R - e^{-R} \geq e^R,$$

possiamo scrivere

$$\left| \int_{L_3} dz\, \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} \right| \leq \int_0^\pi dy \frac{e^{\mathrm{Re}(\nu)R} e^{-\mathrm{Im}(\nu)y}}{e^{-R}} \leq \pi e^{(\mathrm{Re}(\nu)-1)R}.$$

Quest'ultima quantità si annulla per $R \to \infty$ dato che $\mathrm{Re}\,\nu < 1$.

In maniera perfettamente analoga si dimostra che l'integrale su L_6 si annulla grazie alla condizione $\mathrm{Re}\,\nu > -1$. Rimangono da calcolare gli integrali su $\gamma_1^\epsilon, \gamma_2^\epsilon$. Entrambe le curve circuitano in senso orario un polo semplice della funzione integranda e sottendono un arco di ampiezza π, per cui nel limite $\epsilon \to 0$ tali integrali sono pari a $-\pi i$ volte il residuo della funzione integranda calcolato nel polo corrispondente

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_1^\epsilon} dz\, \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} &= -\pi i\, \mathrm{Res}_{z=0} \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} = -\pi i\, \left.\frac{e^{\nu z}}{\cosh(z)}\right|_{z=0} = -\pi i \\
\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_2^\epsilon} dz\, \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} &= -\pi i\, \mathrm{Res}_{z=\pi i} \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} = -\pi i\, \left.\frac{e^{\nu z}}{\cosh(z)}\right|_{z=\pi i} = \pi i\, e^{\nu\pi i}
\end{aligned}$$

Sommando tutti i contributi otteniamo infine

$$0 = \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma_R} dz\, \frac{e^{\nu z}}{\sinh(z)} = \left(1+e^{i\nu\pi}\right) P \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{\nu x}}{\sinh(x)} - \pi i \left(1-e^{i\nu\pi}\right),$$

da cui

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{\nu x}}{\sinh(x)} = \pi i \frac{1-e^{i\nu\pi}}{1+e^{i\nu\pi}} = -\pi i \tanh\left(\frac{\nu\pi}{2}\right).$$

Esercizio 10.2 *Calcolare l'integrale:*

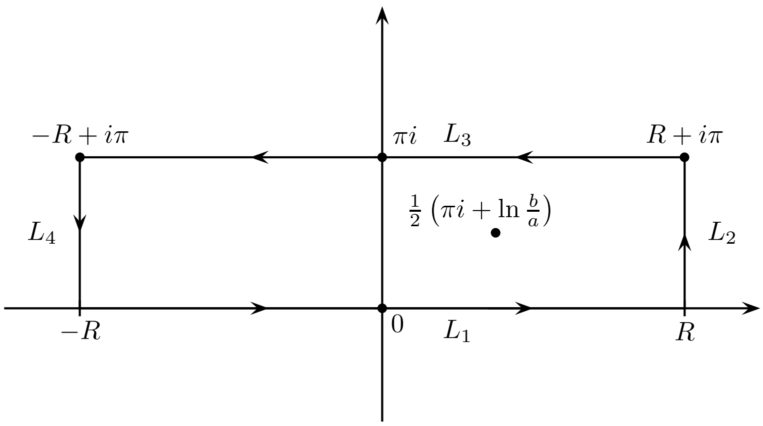
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{ae^{x}+be^{-x}},$$

con a e b reali positivi.

Consideriamo l'integrale

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} dz \frac{z}{ae^{z}+be^{-z}},$$

lungo il cammino Γ_R indicato in figura



La funzione integranda possiede dei poli semplici nei punti

$$ae^{z}+be^{-z}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{2z} = -\frac{b}{a} \quad\Rightarrow\quad z_k = \frac{1}{2}\left[\pi i + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] + k\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}$$

L'unico di questi poli contenuto nel cammino Γ_R (per R sufficientemente grande) è

$$z_0 = \frac{1}{2}\left(\pi i + \ln\frac{b}{a}\right).$$

Dal teorema dei residui otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} dz\frac{z}{ae^z+be^{-z}} = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=z_0}\left(\frac{z}{ae^z+be^{-z}}\right) = \\
&= 2\pi i\,\frac{z}{ae^z-be^{-z}}\bigg|_{z=z_0} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi i+\ln(b)-\ln(a)}{\sqrt{ab}}\right).
\end{aligned}$$

L'integrale su L_1 nel limite $R\to\infty$ ci dà

$$\lim_{R\to\infty}\int_{L_1} dz\frac{z}{ae^z+be^{-z}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{x}{ae^x+be^{-x}}.$$

Per l'integrale su L_3 abbiamo

$$\lim_{R\to\infty}\int_{L_3} dz\frac{z}{ae^z+be^{-z}} = \int_{+\infty}^{-\infty} dx\frac{x+\pi i}{ae^{x+\pi i}+be^{-x-\pi i}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{x+\pi i}{ae^x+be^{-x}}.$$

Gli integrali su L_2 e L_4 si annullano nel limite $R\to\infty$. Infatti su L_2 avremo

$$\int_{L_2} dz\frac{z}{ae^z+be^{-z}} = i\int_0^{\pi} dy\frac{R+iy}{ae^{R+iy}+be^{-R-iy}},$$

ma

$$\left|\frac{R+iy}{ae^{R+iy}+be^{-R-iy}}\right| \le \frac{R}{ae^R},$$

quindi

$$\left|\int_{L_2} dz\frac{z}{ae^z+be^{-z}}\right| \le \pi\frac{R}{ae^R} \to 0 \quad \text{per } R\to\infty.$$

Analogamente, su L_4:

$$\left|\int_{L_4} dz\frac{z}{ae^z+be^{-z}}\right| = \left|i\int_{\pi}^{0} dy\frac{-R+iy}{ae^{-R+iy}+be^{R-iy}}\right| \le \pi\frac{R}{be^R}.$$

Sommando tutti i contributi

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi i+\ln(b)-\ln(a)}{\sqrt{ab}}\right) = \lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} dz\frac{z}{ae^z+be^{-z}} = \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{x}{ae^x+be^{-x}} + \pi i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{1}{ae^x+be^{-x}}.
\end{aligned}$$

Possiamo calcolare l'ultimo integrale passando nuovamente al campo complesso e integrando lungo Γ_R

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} dz\frac{1}{ae^z+be^{-z}} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{1}{ae^x+be^{-x}} = \\
&= 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=z_0}\left(\frac{1}{ae^z+be^{-z}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}.
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi infine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{x}{ae^x+be^{-x}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\ln(b)-\ln(a)}{\sqrt{ab}}\right)$$

Esercizio 10.3 *Calcolare il seguente integrale:*

$$P\int_0^\infty \frac{\cos x}{(\sinh(x-1))(\sinh(x+1))}$$

Esercizio 10.4 *Calcolare il seguente integrale (*$\mathrm{Re}\,\beta > 2|\mathrm{Re}\mu|$*):*

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \exp(-\mu x)\frac{\sinh(\mu x)}{\sinh \beta x}$$

Esercizio 10.5 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx x\frac{\exp(\alpha x)}{\cosh x}.$$

Esercizio 10.6 *Calcolare l'integrale:*

$$I_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{x}{(\beta + e^x)(1+e^{-x})}, \qquad \beta < 0.$$

Esercizio 10.7 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I_2 = \int_0^\infty dx\, \frac{\cos(kx)}{\cosh(x)}$$

Esercizio 10.8 *Calcolare l'integrale*

$$F(z) = \int_0^\infty dt\, \frac{\exp(zt)}{\cosh^2(t)}$$

e discuterne le propriet'a di analiticità.

Esercizio 10.9 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = P\int_0^\infty dx\, \frac{x}{\sinh(\alpha x)}$$

Esercizio 10.10 *Calcolare il seguente integrale:*

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\cosh(\alpha x)}$$

Si consiglia il cambiamento di variabile:

$$\exp(\alpha x) = t$$

.

Esercizio 10.11 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\exp(-\gamma x)}{\cosh x} \quad (Re\gamma > 0).$$

Esercizio 10.12 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \, \frac{\sinh(ax)}{\exp(px) + 1} \qquad p, a \in \mathbb{R}$$

Esercizio 10.13 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \, x \, \exp(-x) \, \coth(x).$$

11 Integrali che richiedono l'uso di funzioni polidrome

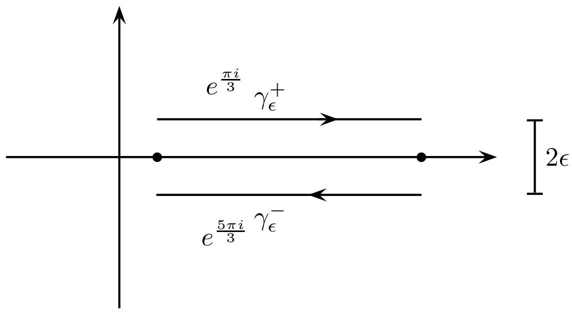
Alcuni integrali di variabile reale possono essere calcolati attraverso l'integrazione in campo complesso di funzioni polidrome. Consideriamo un integrale del tipo

$$\int_a^b f(x)dx,$$

e supponiamo che esista una funzione polidroma $g(z)$ (che può anche coincidere con $f(z)$) tale che il passaggio attraverso il segmento $[a,b]$ comporti un cambio di determinazione per la funzione g. Supponiamo inoltre che il cambio di determinazione lungo il segmento $[a,b]$ sia proporzionale a $f(x)$:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(g(x+i\epsilon)-g(x-i\epsilon)\right)=\rho f(x).$$

Sia Γ_ϵ una curva chiusa (all'interno della quale $g(z)$ è monodroma), che comprende i segmenti $\gamma_\epsilon^1\ :\ x+i\epsilon,\ a\le x\le b$, $\gamma_\epsilon^2\ :\ x-i\epsilon,\ b\ge x\ge a$.



Dal teorema dei residui

$$\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\epsilon} g(z)dz=\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}_{z=z_j}g(z),$$

avendo indicato con $z_j,\ j=1,\ldots,N$ i residui di $g(z)$ contenuti all'interno di Γ_ϵ. Quindi

$$\rho\int_a^b f(x)dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon^1+\gamma_\epsilon^2} g(z)dz=\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}_{z=z_j}g(z)-\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon-\gamma_\epsilon^1+\gamma_\epsilon^2} g(z)dz. \tag{122}$$

A volte il calcolo dell'integrale di $g(z)$ sulla curva $\Gamma_\epsilon-\gamma_\epsilon^1+\gamma_\epsilon^2$ è più semplice di quello di $f(x)$ su $[a,b]$. In tal caso l'equazione (122) è un utile strumento per il calcolo di quest'ultimo integrale.

Gli argomenti utilizzati possono essere facilmente estesi ("mutatis mutandis") al caso in cui abbiamo un integrale del tipo

$$\int_\gamma f(z)dz,$$

dove γ è una curva (aperta) del piano complesso invece che un segmento dell'asse reale.

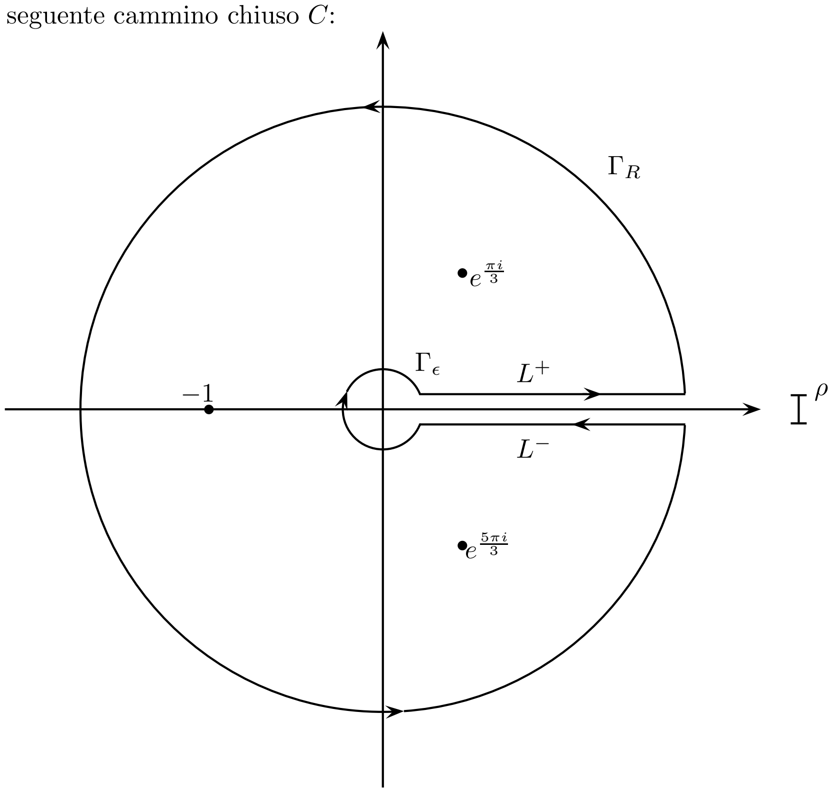
Esercizio 11.1 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^{\infty} dx \frac{1}{x^3+1}$$

Questo integrale può essere svolto sviluppando la funzione integranda in fratti semplici, noi considereremo però il seguente metodo alternativo. Passiamo al piano complesso e consideriamo l'integrale della funzione

$$f(z) = \frac{\ln(z)}{z^3+1}$$

sul seguente cammino chiuso C:



nel limite $R \to \infty$, $\epsilon, \rho \to 0$.

L'integrale su Γ_ϵ si annulla nel limite $\epsilon \to 0$ poiché $|ln(z)|$ diverge più lentamente di $1/|z|$ quando $|z|$ tende a zero. Anche il contributo dell'integrale su Γ_R è nullo visto che $|f(z)|$ tende a zero pi'u velocemente di $1/|z|$ per $|z| \to 0$.

Consideriamo ora l'integrale su L^+. Dobbiamo scegliere uno dei rami della funzione logaritmo. Scegliamo la determinazione principale, ossia il ramo definito dalla relazione: $\ln(1) = 0$. Allora, nel limite $R \to \infty$, $\epsilon, \rho \to 0$,

$$\int_{L^+} f(z)dz = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3+1}\, dx$$

Dopo aver compiuto un intero giro su Γ_R, abbiamo che la determinazione del logaritmo su L^- deve essere data da: $\ln(1) = 2\pi i$. Di conseguenza (sempre nel limite $R \to \infty$, $\epsilon, \rho \to 0$):

$$\int_{L^-} f(z)dz = \int_\infty^0 \frac{\ln(x)}{x^3+1}\,dx + 2\pi i \int_\infty^0 \frac{1}{x^3+1}$$

Sommando tutti i contributi ed usando il teorema dei residui:

$$\oint_C f(z)\,dz = -2\pi i \int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx =$$
$$= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=\exp(\pi i/3)} + \mathrm{Res}_{z=\exp(\pi i)} + \mathrm{Res}_{z=\exp(5\pi i/3)}\right)\left(\frac{\ln(z)}{z^3+1}\right)$$

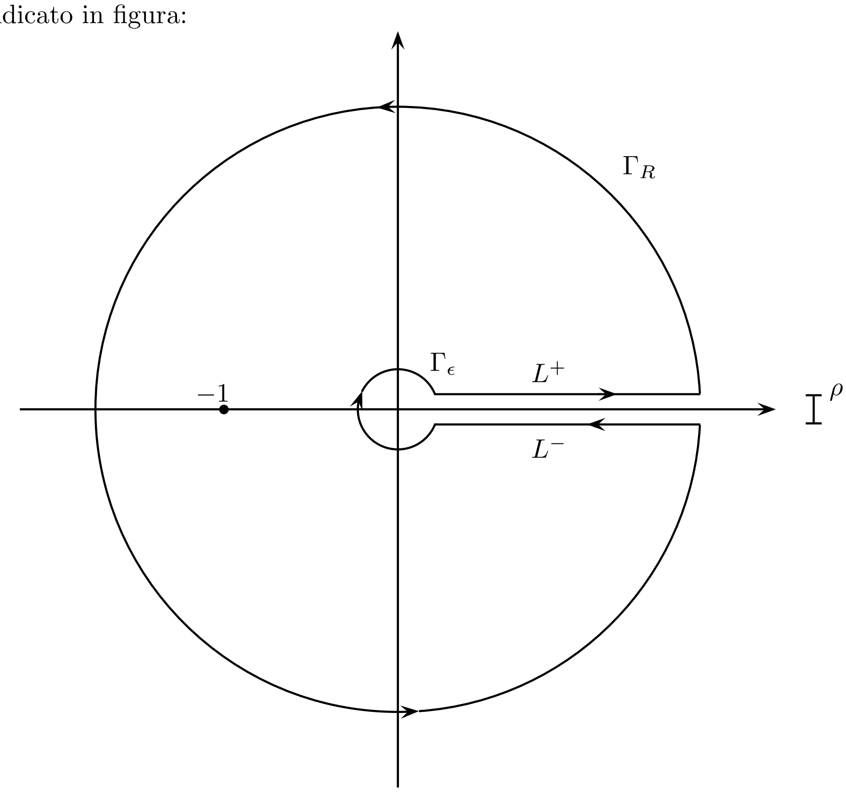
Dopo aver effettuato il calcolo dei residui otteniamo:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Esercizio 11.2 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Passiamo al campo complesso e consideriamo l'integrale sul cammino C indicato in figura:



nel limite $R \to \infty$, $\epsilon, \rho \to 0$.

Scegliamo la determinazione principale sia per il logaritmo che per la radice (ossia scegliamo i rami definiti da: $\ln(1) = 0$ e $\sqrt{1} = 1$). Scegliamo inoltre $\arg(z) \in (0, 2\pi)$. Per $\rho \to 0$ l'argomento di z tenderà quindi a zero e avremo:

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{L^+} \frac{\ln(z)}{\sqrt{z}(1+z)} = \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Su L^- avremo invece che l'argomento di z tenderà a 2π per $\rho \to 0$, quindi:

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{L^-} \frac{\ln(z)}{\sqrt{z}(1+z)} = \int_0^\infty \frac{\ln(x) + 2\pi i}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Poiché la funzione

$$z \frac{\ln(z)}{\sqrt{z}(1+z)}$$

tende a zero uniformemente sia per $z \to 0,\ z \in \Gamma_\epsilon$, sia per $z \to \infty,\ z \in \Gamma_R$, il contributo degli integrali su Γ_ϵ e su Γ_R sono nulli. In conclusione:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\ln(z)}{\sqrt{z}(1+z)} dz &= 2\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)} dx + 2\pi i \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \\ &= 2\pi i \mathrm{Res}_{\mathrm{z=exp(\pi i)}} \left(\frac{\ln(z)}{\sqrt{z}(1+z)} \right) = 2\pi i \frac{\ln(\exp(\pi i))}{\sqrt{\exp(\pi i)}} = 2\pi i \frac{\pi i}{i} = 2\pi^2 i\end{aligned}$$

Ci rimane da calcolare l'integrale:

$$2\pi i \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Passiamo al campo complesso e consideriamo l'integrale

$$\pi i \oint_C \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}$$

dove C di nuovo il cammino riportato in figura. Utilizzando le stesse considerazioni del caso precedente, otteniamo:

$$\pi i \oint_C \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} = 2\pi i \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = -2\pi^2 \mathrm{Res}_{\mathrm{z=exp(\pi i)}} \left(\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} \right) = 2\pi^2 i$$

Quindi:

$$2\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2\pi^2 i - 2\pi i \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\pi^2 i - 2\pi^2 i = 0$$

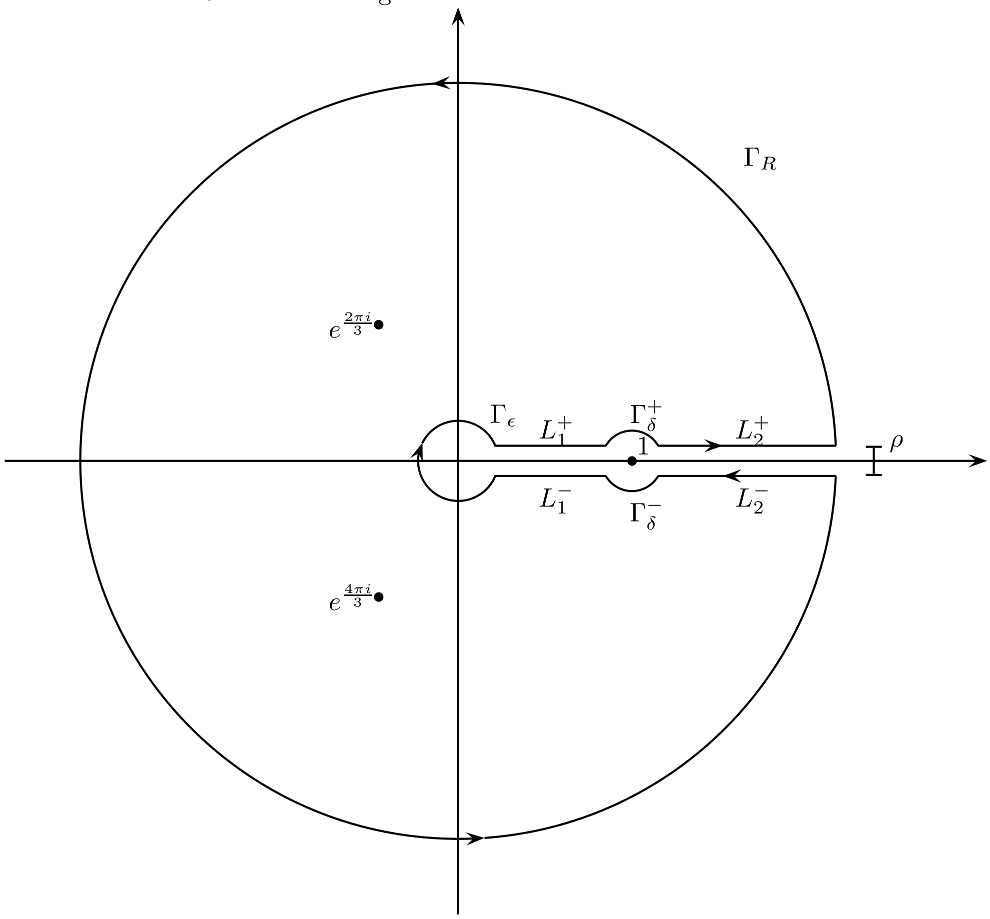
Esercizio 11.3 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_0^\infty dx \frac{x^{1/3}}{x^3 - 1}.$$

Passiamo al campo complesso e consideriamo l'integrale della funzione

$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{z^3 - 1}$$

sul cammino chiuso C indicato in figura:



nel limite in cui $R \to \infty$ e $\epsilon, \delta, \rho \to 0$. Poiché $|f(z)|$ tende a zero uniformemente per $|z| \to 0$, l'integrale sulla circonferenza Γ_ϵ si annulla nel limite $\epsilon \to 0$. Anche l'integrale su Γ_R si annulla per $R \to \infty$ poiché $|f(z)|$ tende a zero più velocemente di $1/|z|$ per $|z| \to \infty$. Per quanto riguarda Γ_δ^+, abbiamo:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\Gamma_\delta^+} f(z) = -\pi i \, \mathrm{Res}_{z=1} \left(\frac{z^{1/3}}{z^3 - 1} \right)$$

Scegliamo il ramo di $z^{1/3}$ definito da: $1^{1/3} = 1$, allora:

$$\mathrm{Res}_{z=1} \left(\frac{z^{1/3}}{z^3 - 1} \right) = \frac{1}{(1 - \omega)(1 - \omega^2)}$$

avendo posto $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{3})$. Utilizzando l'identità $1 + \omega + \omega^2 = 0$ otteniamo infine:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\Gamma_\delta^+} f(z) \, dz = -\frac{\pi i}{3}$$

Consideriamo ora l'integrale su Γ_δ^-, avremo di nuovo:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Gamma_\delta^-} f(z) = -\pi i\,\mathrm{Res}_{z=1}\left(\frac{z^{1/3}}{z^3-1}\right)$$

Abbiamo però compiuto un intero giro su Γ_R, ci troviamo quindi ora sul ramo di $z^{1/3}$ definito da $1^{1/3}=\omega$, per cui:

$$\mathrm{Res}_{z=1}\left(\frac{z^{1/3}}{z^3-1}\right) = \frac{\omega}{(1-\omega)(1-\omega^2)} = \frac{\omega}{3}$$

L'integrale su $L_1^+ + L_2^+$ ci dà:

$$\int_{L_1^+ + L_2^+} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon,\delta\to 0}\left(\int_\epsilon^{1-\delta}\frac{x^{1/3}}{x^3-1}\,dx + \int_{1+\delta}^R \frac{x^{1/3}}{x^3-1}\,dx\right) = P\int_0^\infty dx\frac{x^{1/3}}{x^3-1}$$

Mentre per l'integrale su $L_1^- + L_2^-$ dobbiamo tener conto del fatto che quando ρ tende a zero, $z^{1/3}=(x+iy)^{1/3}$ tende a ωx a causa della diversa determinazione della radice. Quindi:

$$\int_{L_1^- + L_2^-} f(z)\,dz = -\omega P\int_0^\infty dx\frac{x^{1/3}}{x^3-1}$$

Sommando tutti i vari contributi ed usando il teorema dei residui, otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= (1-\omega)\,P\int_0^\infty dx\frac{x^{1/3}}{x^3-1} - \pi i\,(1+\omega) = \\ &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=\omega}\left(\frac{z^{1/3}}{z^3-1}\right) + \mathrm{Res}_{z=\omega^2}\left(\frac{z^{1/3}}{z^3-1}\right)\right)\end{aligned}$$

Questi residui vanno calcolati ancora sul ramo $1^{1/3}=1$, quindi:

$$\mathrm{Res}_{z=\omega}\left(\frac{z^{1/3}}{z^3-1}\right) = \frac{\exp(2\pi i/9)}{(\omega-1)(\omega-\omega^2)} = \frac{\exp(2\pi i/9)}{3\omega^2} = \frac{\exp(8\pi i/9)}{3}$$

$$\mathrm{Res}_{z=\omega^2}\left(\frac{z^{1/3}}{z^3-1}\right) = \frac{\exp(4\pi i/9)}{(\omega^2-1)(\omega^2-\omega)} = \frac{\exp(4\pi i/9)}{3\omega} = \frac{\exp(16\pi i/9)}{3}$$

Quindi:

$$(1-\omega)\,P\int_0^\infty dx\frac{x^{1/3}}{x^3-1} = \pi i\left[\frac{2}{3}\left(\exp(8\pi i/9)+\exp(-2\pi i/9)\right)+1+\exp(2\pi i/3)\right]$$

Moltiplicando entrambi i termini per $(1-\omega^2)/3$

$$P\int_0^\infty dx\frac{x^{1/3}}{x^3-1} = \frac{\pi i}{3}\left[\frac{2}{3}\left(\exp(8\pi i/9)+\exp(-2\pi i/9)\right)+1+\exp(2\pi i/3)\right](1-\exp(4\pi i/3)) =$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left[\frac{2}{3}\left(\exp(8\pi i/9)-\exp(2\pi i/9)+\exp(-2\pi i/9)-\exp(-8\pi i/9)\right)+\exp(2\pi i/3)-\exp(-2\pi i/3)\right] =$$

$$= \frac{4}{9}\pi\left[\sin(8\pi/9)+\sin(2\pi/9)-3\sin(2\pi/3)\right]$$

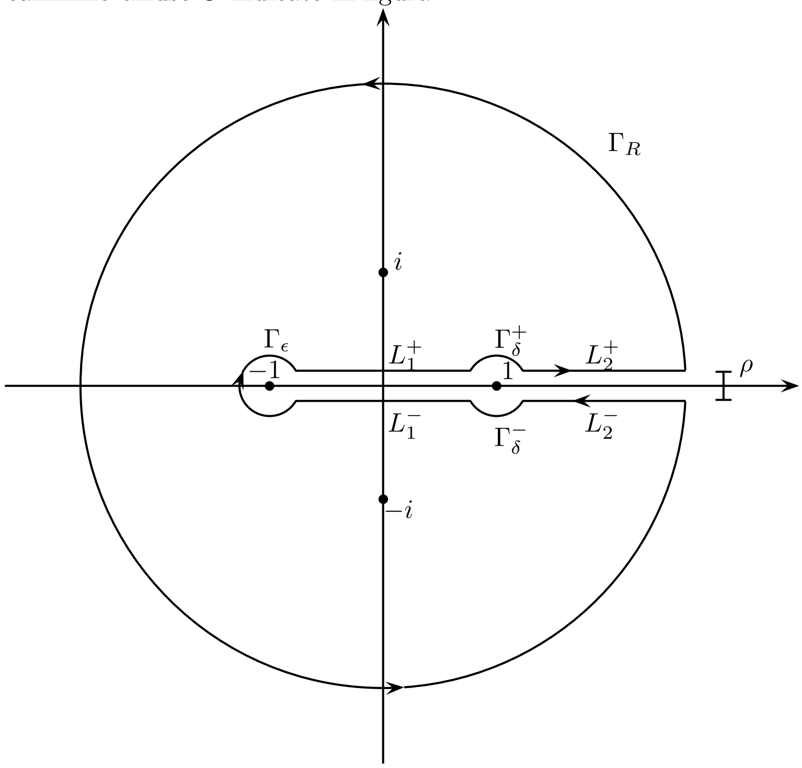
Esercizio 11.4 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_{-1}^{1} dx \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x^2+1}.$$

Passiamo al campo complesso e consideriamo l'integrale della funzione

$$f(z) = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \frac{1}{z^2+1}$$

sul cammino chiuso C indicato in figura:



nel limite in cui $R \to \infty$ e $\epsilon, \delta, \rho \to 0$. Gli integrali su Γ_R, Γ_ϵ, Γ_δ^+ e Γ_δ^- si annullano in tale limite. Consideriamo l'integrale su L_2^+. Scegliamo come determinazione della radice quella per cui $\sqrt{1} = 1$. Allora (nel limite $\rho \to 0$),

$$\arg(1-z) = -\pi \qquad \arg(1+z) = 0$$

da cui segue:

$$\arg\left(\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\arg(1-z) - \arg(1+z)\right) = -\frac{\pi}{2}$$

e dopo aver effettuato anche gli altri limiti:

$$\int_{L_2^+} dz\, f(z) = -i \int_{1}^{\infty} dx \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} \frac{1}{x^2+1}$$

Per quanto riguarda l'integrale su L_2^-, abbiamo che

$$\arg(1-z) = \pi \qquad \arg(1+z) = 2\pi$$

da cui :

$$\arg\left(\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\arg(1-z) - \arg(1+z)\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Quindi:

$$\int_{L_2^-} dz\, f(z) = -i\int_{\infty}^{1} dx\, \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}}\frac{1}{x^2+1}$$

cioè

$$\int_{L_2^+ + L_2^-} dz\, f(z) = 0$$

Su L_1^+ avremo:

$$\arg(1-z) = 0 \qquad \arg(1+z) = 0$$

e quindi:

$$\int_{L_1^+} dz\, f(z) = \int_{-1}^{1} dx\, \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\frac{1}{x^2+1}$$

Analogamente su L_1^- abbiamo:

$$\arg(1-z) = 0 \qquad \arg(1+z) = 2\pi$$

da cui segue:

$$\int_{L_1^-} dz\, f(z) = \int_{1}^{-1} dx\, e^{-\pi i}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\frac{1}{x^2+1} = \int_{-1}^{1} dx\, \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\frac{1}{x^2+1}$$

Sommando tutti i contributi ed usando il teorema dei residui:

$$\oint_C dz\, f(z) = 2\int_{-1}^{1} dx\, \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\frac{1}{x^2+1} = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=i} + \mathrm{Res}_{z=-i}\right)\left(\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\frac{1}{z^2+1}\right)$$

Abbiamo che:

$$\mathrm{Res}_{z=i}\left(\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\frac{1}{z^2+1}\right) = \lim_{z\to i}\left(\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\frac{1}{z+i}\right)$$

D'altra parte, sulla determinazione che abbiamo scelto:

$$\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = \sqrt{\frac{|1-z|}{|1+z|}}\exp\left(\frac{1}{2}i\left(\arg(1-z) - \arg(1+z)\right)\right)$$

Per $z \to i$ l'argomento di $1-z$ vale $-\pi/4$ e quello di $1+z$ vale $\pi/4$, mentre il modulo di $(1-z)/(1+z)$ vale 1, quindi:

$$\mathrm{Res}_{z=i}\left(\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{2i}\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)$$

Analogamente, per $z \to -i$ l'argomento di $1-z$ vale $\pi/4$, quello di $1+z$ vale $7\pi/4$ e il modulo di $(1-z)/(1+z)$ vale 1, quindi:

$$\mathrm{Res}_{z=i}\left(\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\frac{1}{z^2+1}\right) = \lim_{z\to -i}\left(\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\frac{1}{z-i}\right) = -\frac{1}{2i}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)$$

La somma dei residui :

$$(\mathrm{Res}_{z=i} + \mathrm{Res}_{z=-i})\left(\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{2i}\left(\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) - \exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\pi$$

Da cui segue che l'integrale cercato vale:

$$\int_{-1}^{1} dx\, \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\frac{1}{x^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 11.5 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_a^b dx\,(b-x)\ln\frac{b-x}{x-a} \qquad b > a > 0$$

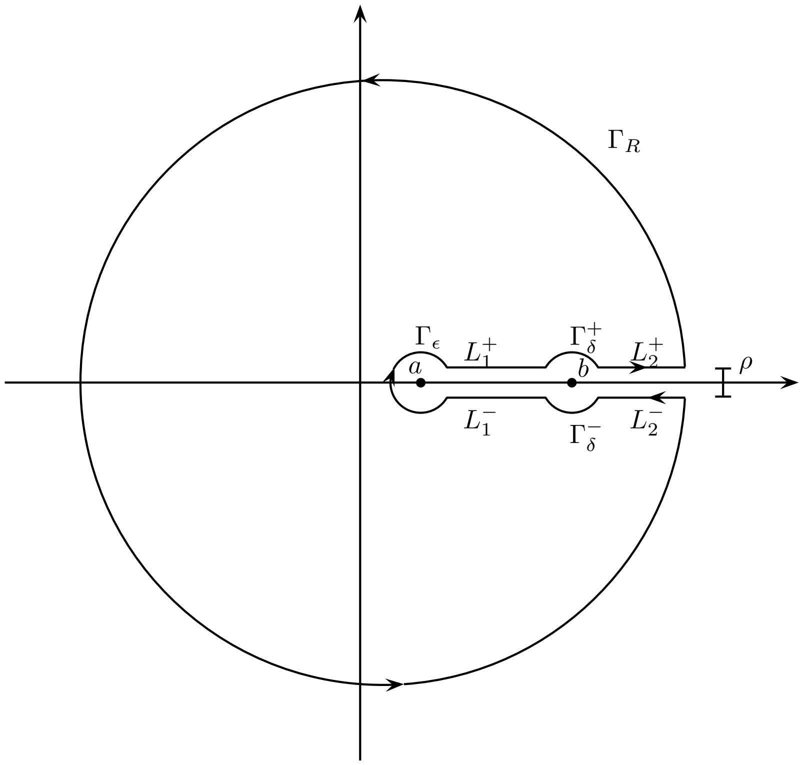
La funzione

$$\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)$$

ha due punti di diramazione in $z = a$ e $z = b$. Tagliamo il piano complesso lungo il segmento (a, b), e consideriamo l'integrale

$$I' = \oint_C dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2$$

dove C è il cammino chiuso:



Scegliendo la determinazione principale del logaritmo, abbiamo che

$$\int_{L_1^+} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; \int_a^b dx\,(b-x)\ln\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^2$$

Su L_2^+

$$\arg(b-z)\;\to -\pi \qquad |b-z| \;\to\; x-b$$

quindi

$$\int_{L_2^+} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; \int_a^b dx\,(b-x)\left[\ln\left(\frac{x-b}{x-a}\right)-i\pi\right]^2$$

Su L_2^-

$$\arg(b-z)\;\to \pi \qquad |b-z| \;\to\; x-b$$
$$\arg(z-a)\;\to 2\pi \qquad |z-a| \;\to\; x-a$$

quindi

$$\int_{L_2^+} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; \int_b^a dx\,(b-x)\left[\ln\left(\frac{x-b}{x-a}\right)-i\pi\right]^2$$

Su L_1^-

$$\arg(b-z)\;\to 0 \qquad |b-z| \;\to\; b-x$$
$$\arg(z-a)\;\to 2\pi \qquad |z-a| \;\to\; x-a$$

quindi

$$\int_{L_1^-} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; \int_b^a dx\,(b-x)\left[\ln\left(\frac{b-x}{x-a}\right)-2i\pi\right]^2$$

Infine

$$\oint_{\Gamma_R} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; -2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=\infty}\left((b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2\right)$$

Sommando tutti i termini ed usando il teorema dei residui, abbiamo quindi:

$$0=\oint_C dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; 4\pi i\int_a^b dx\,(b-x)\ln\left(\frac{b-x}{x-a}\right)+$$
$$+4\pi^2\int_a^b dx\,(b-x)-2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=\infty}\left((b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2\right)$$

Per calcolare il residuo all'infinito, dobbiamo sviluppare il logaritmo in serie di potenze in un intorno dell'infinito. Consideriamo il termine $\ln(b-z)$ che, in accordo con la nostra scelta degli argomenti, riscriviamo nella forma:

$$\ln(b-z)=\ln(z-b)-i\pi=\int dz\,\frac{1}{z-b}-i\pi=\int dz\,\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{b}{z}}-i\pi$$

Per $|b/z|<1$, la serie geometrica

$$\frac{1}{1-\frac{b}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n$$

converge uniformemente e possiamo quindi scambiare serie e integrale:

$$\ln(b-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\int dz\,\frac{b^n}{z^{n+1}}-i\pi=-i\pi+\ln(z)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n}\,z^{-n}\qquad |z|>b$$

Procedendo nello stesso modo otteniamo lo sviluppo di $\ln(z-a)$:

$$\ln(z-a)=\ln(z)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\,z^{-n}\qquad |z|>a$$

Quindi

$$\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)=\ln(b-z)-\ln(z-a)=-i\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{n}\,z^{-n}\qquad |z|>b$$

da cui segue che

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}\left[(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2\right]=(a-b)^2+2\pi i\,b(a-b)-\pi i(a^2-b^2)=(a-b)^2(1-\pi i)$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b dx\,(b-x)\ln\left(\frac{b-x}{x-a}\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi i}\left[4\pi^2\int_a^b dx\,(b-x) - 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=\infty}\left((b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2\right)\right] = \\
&= -\frac{1}{4\pi i}\left[-2\pi^2(a-b)^2 - 2\pi i\,(a-b)^2(1-\pi i)\right] = \frac{(a-b)^2}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 11.6 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_0^\infty dx\frac{1}{x^2+x-2}.$$

Esercizio 11.7 *Calcolare il seguente integrale ($a \in \mathbb{R}$):*

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$$

Esercizio 11.8 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_{-1}^\infty dx\frac{x}{x^3+8}$$

Esercizio 11.9 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_0^\infty dt\frac{t^{\mathrm{i}\alpha-1}}{(\ln t+b)^2+a^2}.$$

(Suggerimento: si consideri un opportuno cambiamento di variabile ...).

Esercizio 11.10 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_{-a}^b dx x(\frac{b-x}{x+a})^{1/2}$$

Esercizio 11.11 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} dt\frac{\exp(\alpha t)}{\sinh t}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}, \quad |\alpha|<1$$

Esercizio 11.12 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k) = \int_0^\infty \frac{\cos(kx) - 1}{\sinh^2(x)}$$

Esercizio 11.13 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Esercizio 11.14 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{\sinh x}.$$

Esercizio 11.15 *Calcolare gli integrali:*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos(ax)}{\cosh(bx)}$;
2. $\displaystyle P \int_0^\infty dx \frac{\cos(ax)}{b^2 - x^2}$;
3. $\displaystyle\int_0^\infty dx \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}$.

Esercizio 11.16 *Calcolare gli integrali:*

$$I_1 = P \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2 - a^2}$$

$$I_2 = P \int_0^\infty dx \frac{ln(x)}{x^2 - a^2}$$

$$I_3 = \int_0^\infty dx \frac{coskx}{cosh\beta x}$$

Per l'ultimo integrale, si suggerisce il cambiamento di variabile $t = e^{\beta x}$.

Esercizio 11.17 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{\alpha x}}{\cosh x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 11.18 *Calcolare l'integrale:*

$$P\int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$$

Esercizio 11.19 *Si calcoli a scelta uno dei seguenti tre integrali:*

1. $\displaystyle\int_a^{\infty} dx \frac{(x-a)^{\frac{1}{3}}}{x^2+2};$
2. $\displaystyle\int_0^{\infty} dx \frac{1}{x^4+1};$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{\alpha x}}{\cosh(\beta x)}, \qquad \beta > \alpha > 0.$

Esercizio 11.20 *Calcolare l'integrale*

$$P\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^3-1}.$$

Esercizio 11.21 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{x^2+a^2}.$$

Esercizio 11.22 *Calcolare col metodo dei residui l'integrale*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\ln(x-1/2)}{x(4x^2+3)} dx.$$

Esercizio 11.23 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{px}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z}; 0 < \alpha < p.$$

Esercizio 11.24 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^{\infty} dx\, x e^{\alpha x} \operatorname{sech} x, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Esercizio 11.25 *Calcolare il seguente integrale:*

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\sqrt{x}\, \ln(x)}{x^2+9}$$

Esercizio 11.26 *Calcolare l' integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx\, \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+x^2}$$

Esercizio 11.27 *Calcolare i seguenti integrali:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^\infty dx\, \frac{\ln(x)}{x^2-1} \\ I_3 &= \int_1^\infty dx\, \frac{x^{-\alpha}}{1+x^n} \qquad (1 > \alpha > 0;\ n > 0) \end{aligned}$$

Esercizio 11.28 *Calcolare gli integrali:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty dx\, \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+a^2} \\ I_3 &= \int_{-1}^1 dx\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Esercizio 11.29 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx\, \frac{x^\alpha\, \ln(x)}{x^2+a^2} \qquad (1 > \alpha > 0, a \in \mathbb{R}).$$

Esercizio 11.30 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx\, \frac{\sqrt{x}\, \ln(x)}{1+x^3}$$

12 Sviluppi di Mittag–Leffler

Nella sezione 6 abbiamo visto come sia possibile determinare (a meno di una costante) una funzione meromorfa con un numero finito di poli dalla conoscenza delle parti principali del suo sviluppo di Laurent in tali poli (compreso eventualmente il punto all'infinito). Lo sviluppo di Mittag–Leffler generalizza questa procedura al caso in cui il numero di poli sia infinito (e quindi i poli si accumulino all'infinito). Abbiamo infatti il seguente teorema dovuto a Mittag–Leffler:

Teorema 12.1 *Sia $f(z)$ una funzione meromorfa, regolare nell'origine e supponiamo che esista un sistema di contorni chiusi γ_n, ognuno di lunghezza l_n, tali che*

1. *γ_1 contenga l'origine e ogni γ_n sia contenuto nel successivo;*
2. *la distanza d_n di γ_n dall'origine cresca indefinitamente con n ma il rapporto l_n/d_n rimanga limitato;*
3. *su ogni γ_n il valore assoluto della funzione $f(z)$ cresca al più come una potenza:*
$$\sup_n \sup_{z\in\gamma_n} |f(z)| \le M\,|z|^p\,;$$

allora
$$f(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{z^k}{k!} f^{(k)}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[F_j(z) - \sum_{k=0}^{p} \frac{z^k}{k!} F_j^{(k)}(0) \right], \tag{123}$$
dove $F_j(z)$ è la somma delle parti principali dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ nei poli contenuti tra i contorni γ_j e γ_{j-1} . La serie converge uniformemente in z in ogni cerchio $|z| \le R$ privato dei poli di $f(z)$ interni al cerchio.

Esercizio 12.1 *Data la funzione:*
$$f(z) = \cot z - \frac{1}{z},$$

1. *determinarne le sue singolarità in tutto il piano complesso chiuso e calcolare i residui corrispondenti;*
2. *scriverne l'espansione in fratti semplici (sviluppo di Mittag-Leffler);*
3. *assumendo l'uniforme convergenza dell'espressione suddetta, ricavare lo sviluppo*
$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n\pi)^2)} + \frac{1}{(z+n\pi)^2} \right)$$
(sviluppo di Weierstrass).

La funzione $f(z)$ possiede una singolarità eliminabile nell'origine, poiché
$$\lim_{z\to 0} f(z) = 0.$$

Avrà inoltre dei poli semplici in corrispondenza degli altri zeri della funzione $\sin(z)$, cioè nei punti

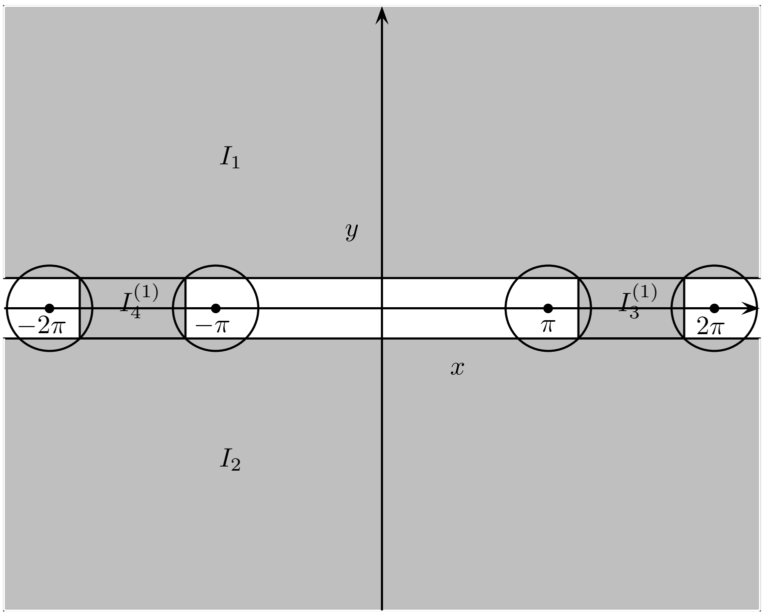
$$z_k = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0.$$

Consideriamo ora un sistema di contorni $\gamma_n,\ n = 1, \ldots, \infty$, tali che γ_1 contenga l'origine, γ_n contenga γ_{n-1}, gli unici poli della cotangente contenuti tra γ_n e γ_{n-1} siano $\pm\pi n$ e tutti i contorni passino ad una distanza $\sqrt{2}\delta > 0$ dai poli. Un sistema di contorni che soddisfano queste richieste sono, ad esempio i cerchi di raggio $R_n = \pi/2 + (n-1)\pi$ o i quadrati di lato $L_n = \pi/2 + (n-1)\pi$ centrati nell'origine, dove, in entrambi i casi, avremmo $\delta = \pi/(2\sqrt{2})$.

Mostriamo ora che sul sistema di contorni γ_n vale $|\cot z| < M$ con M indipendente da n. Sotto le ipotesi che abbiamo fatto sui contorni γ_n abbiamo che γ_n è sicuramente contenuto nell'insieme

$$\begin{aligned}
I^{(n)} &= I_1 \cup I_2 \cup I_3^{(n)} \cup I_4^{(n)} \\
I_1 &= \{z\ :\ \mathrm{Im}\, z > \delta\} \\
I_2 &= \{z\ :\ \mathrm{Im}\, z < -\delta\} \\
I_3^{(n)} &= \{z\ :\ -\delta \leq \mathrm{Im}\, z \leq \delta,\ n\pi + \delta \leq \mathrm{Re}\, z \leq (n+1)\pi - \delta\} \\
I_4^{(n)} &= \{z\ :\ -\delta \leq \mathrm{Im}\, z \leq \delta,\ -(n+1)\pi + \delta \leq \mathrm{Re}\, z \leq -n\pi - \delta\}
\end{aligned}$$

In figura riportiamo, a titolo di esempio, l'insieme $I^{(1)}$ (il raggio delle circonferenze è $\sqrt{2}\delta$).



Per $z = x + iy \in I_1$, avremo che

$$|\cot z| = \left| \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}} \right| \leq \frac{e^{-y} + e^{y}}{e^{y} - e^{-y}} = \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2\delta}},$$

dove abbiamo usato il fatto che $y > \delta > 0$ implica

$$\frac{1}{\left|e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right|} \leq \frac{1}{|e^{-ix}e^{y}| - |e^{ix}e^{-y}|} = \frac{1}{e^{y} - e^{-y}}.$$

Analogamente per $z = x + iy \in I_2$, avremo che

$$|\cot z| = \left|\frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}\right| \leq \frac{e^{-y} + e^{y}}{e^{-y} - e^{y}} = \frac{1 + e^{2y}}{1 - e^{2y}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2\delta}}.$$

Avendo sfruttato il fatto che $y < -\delta < 0$. Quindi, per $z \in I_1 \cup I_2$, $|\cot z|$ è minore di una costante che non dipende da n.

Consideriamo ora gli insiemi chiusi $I_3^{(n)}$ e $I_4^{(n)}$. Per la periodicità della funzione cotangente

$$\cot(z + \pi) = \cot z,$$

la cotangente di z assumerà in $I_3^{(n)}$ e $I_4^{(n)}$ gli stessi valori che assume nell'insieme

$$J = \{z \ : \ -\delta \leq \mathrm{Im} z \leq \delta, \ \delta \leq \mathrm{Re}\, z \leq \pi - \delta\}$$

Poiché $\cot z$ è analitica in J e J è chiuso, $|\cot z|$ è limitata in J da una costante (che ovviamente non dipende da n). Dal fatto che $\cot z$ sia limitata sui contorni γ_n discende che lo è anche la funzione $\cot z - 1/z$.

Abbiamo quindi che la funzione $\cot z - 1/z$ ammette un sistema di intorni (ad esempio quelli quadrati o circolari citati sopra) che soddisfano le ipotesi del teorema di Mittag–Leffler con $p = 0$ e possiamo utilizzare la formula (123).Nel nostro caso abbiamo che tra i due contorni γ_j e γ_{j-1} sono compresi due poli semplici in $z = \pm j\pi$ con residuo 1, quindi

$$F_j(z) = \frac{1}{z - j\pi} + \frac{1}{z + j\pi}, \qquad F_j(0) = 0.$$

Inoltre, abbiamo già visto che possiamo porre $f(0) = 0$, quindi

$$\cot z - \frac{1}{z} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - j\pi} + \frac{1}{z + j\pi}\right). \tag{124}$$

Sappiamo che la serie (124) converge uniformemente in ogni cerchio $|z| < R$ privato dei punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, in tale dominio possiamo quindi derivare la serie termine a termine e otteniamo:

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z - j\pi)^2} + \frac{1}{(z + j\pi)^2}\right).$$

Esercizio 12.2 *Dimostrare la seguente relazione*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^2 - (2j+1)^2\pi^2}{\left[a^2 + (2j+1)^2\pi^2\right]^2} = -\frac{1}{8\cosh^2\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Utilizzare il risultato per dimostare che

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + ... = \frac{\pi^2}{8}.$$

Consideriamo lo sviluppo di Mittag–Leffler della tangente iperbolica $\tanh z$. La tangente iperbolica ha dei poli semplici nei punti

$$z_k = i(2k-1)\frac{\pi}{2},$$

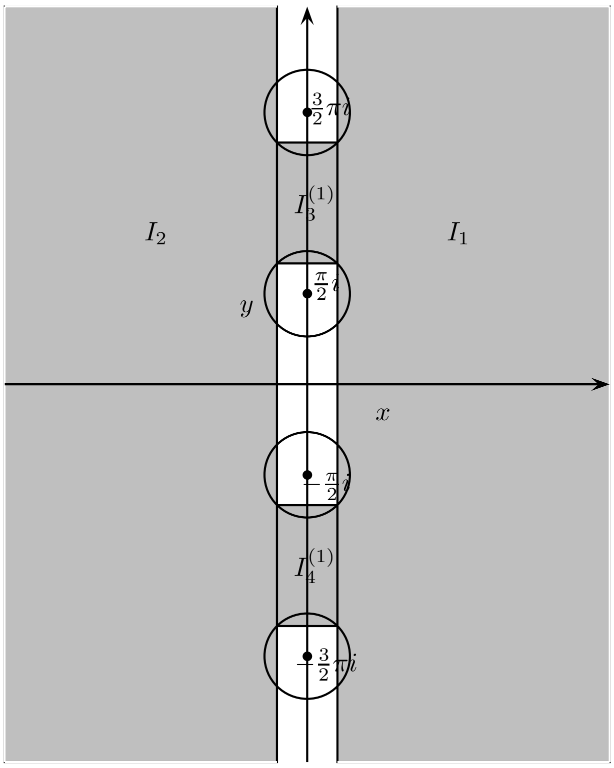
con residuo pari a 1.

Analogamente a quanto fatto nell'esercizio precedente consideriamo un sistema di contorni γ_n, $n = 1, \ldots, \infty$, tali che γ_1 contenga l'origine, γ_n contenga γ_{n-1}, e gli unici poli della tangente iperbolica contenuti tra γ_n e γ_{n-1} siano $\pm(2n-1)\pi i/2$ e tutti i contorni passino ad una distanza $\sqrt{2}\delta > 0$ dai poli. Un sistema di contorni che soddisfano queste richieste sono, ad esempio i cerchi di raggio $R_n = n\pi$ o i quadrati di lato $L_n = n\pi$ centrati nell'origine, dove, in entrambi i casi, $\delta = \pi/(2\sqrt{2})$.

Di nuovo, ogni γ_n è sicuramente contenuto nell'insieme

$$\begin{aligned}
I^{(n)} &= I_1 \cup I_2 \cup I_3^{(n)} \cup I_4^{(n)} \\
I_1 &= \{z \,:\, \operatorname{Re} z > \delta\} \\
I_2 &= \{z \,:\, \operatorname{Re} z < -\delta\} \\
I_3^{(n)} &= \{z \,:\, -\delta \le \operatorname{Re} z \le \delta,\ (2n-1)\frac{\pi}{2} + \delta \le \operatorname{Im} z \le (2n+1)\frac{\pi}{2} - \delta\} \\
I_4^{(n)} &= \{z \,:\, -\delta \le \operatorname{Re} z \le \delta,\ -(2n+1)\frac{\pi}{2} + \delta \le \operatorname{Im} z \le -(2n-1)\frac{\pi}{2} - \delta\}
\end{aligned}$$

In figura riportiamo, a titolo di esempio, l'insieme $I^{(1)}$ (il raggio delle circonferenze è $\sqrt{2}\delta$).



Per $z = x + iy \in I_1$, avremo che

$$|\tanh z| = \left| \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{e^{(x+iy)} + e^{-(x+iy)}} \right| \leq \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2\delta}}.$$

Se $z = x + iy \in I_2$, avremo che

$$|\tanh z| = \left| \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{e^{(x+iy)} + e^{-(x+iy)}} \right| \leq \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x} - e^{x}} = \frac{1 + e^{2x}}{1 - e^{2x}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2\delta}}.$$

Di nuovo, per la periodicità della tangente iperbolica

$$\tanh(z + i\pi) = \tanh(z),$$

la funzione assumerà in $I_3^{(n)}$ e $I_4^{(n)}$ gli stessi valori che assume nel rettangolo

$$J = \{z \ : \ -\delta \leq \mathrm{Re} z \leq \delta, \ -\frac{\pi}{2} + \delta \leq \mathrm{Im}\, z \leq \frac{\pi}{2} - \delta\}$$

dove è analitica e quindi limitata.

Sui contorni γ_n vale quindi

$$\sup_n \sup_{z \in \gamma_n} |\tanh(z)| \leq M.$$

Di conseguenza, lo sviluppo di Mittag–Leffler ci dà

$$\tanh(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \frac{2j+1}{2}\pi i} + \frac{1}{z + \frac{2j+1}{2}\pi i} \right) = 2z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(\frac{2j+1}{2}\pi i\right)^2}.$$

Lo sviluppo è uniformemente convergente in ogni dominio limitato privato dei poli della tangente iperbolica, in tale dominio possiamo quindi derivare la serie termine a termine e otteniamo:

$$\frac{1}{\cosh^2(z)} = -2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^2 - \left(\frac{2j+1}{2}\right)^2 \pi^2}{\left[z^2 + \left(\frac{2j+1}{2}\right)^2 \pi^2\right]^2}.$$

Prendendo $z = a/2$,

$$\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{a}{2}\right)} = -8 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^2 - (2j+1)^2\pi^2}{[a^2 + (2j+1)^2\pi^2]^2}.$$

Infine, scegliendo $a = 0$,

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}.$$

Esercizio 12.3 *Si confrontino tra loro le due funzioni:*

$$\begin{aligned} G(z;x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\pi x}}{z - ik\pi} \ , \qquad x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}. \\ F(z;x) &= e^{zx} \coth z \end{aligned}$$

Quanto vale la loro differenza?

Esercizio 12.4 *Si calcoli l'integrale*

$$I_n(z) = \frac{z}{2\pi i} \oint_{C_n} d\zeta \, \frac{\mathrm{sech}(\zeta)}{\zeta\,(\zeta - z)}$$

dove C_n *la circonferenza di centro l'origine e raggio* $R_n = n\pi$.

Si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} I_n(z) = 0$$

e si utilizzi questo risultato per ottenere lo sviluppo in fratti semplici della funzione $f(z) = \mathrm{sech(z)}$.

13 Formule di Plemelji–Sokhotski

Sia γ una curva regolare (aperta o chiusa) e sia $F(z)$ la funzione analitica definita dall'integrale

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t-z}dt, \qquad z \notin \gamma, \tag{125}$$

con $f(t)$ hölderiana su γ

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le k|t_1 - t_2|^\mu, \quad k > 0, \quad 0 < \mu \le 1, \quad t_1, t_2 \in \gamma,$$

allora se z tende ad un punto ζ della curva γ (che non sia un estremo) in ogni direzione non tangente a γ, $F(z)$ tende verso i limiti

$$F^\pm = \frac{1}{2\pi i}P\int_\gamma \frac{f(t)}{t-z}dt \pm \frac{1}{2}f(\zeta), \tag{126}$$

dove i segni $+$ e $-$ corrispondono al caso in cui $z \to \zeta$ rispettivamente da sinistra e da destra rispetto alla curva γ. Le equazioni (126) prendono il nome di formule di Plemelji–Sokhotski

Esercizio 13.1 *Calcolare l'integrale*

$$F(z) \;=\; \int_0^\infty dt \frac{t^{1/2}}{(t^2+1)(t-z)}; \quad z \notin \mathbb{R}^+ \tag{127}$$

e discuterne le proprietà di analiticità in z
Determinare il salto:

$$\Delta(t_0) = \lim_{\epsilon\to 0^+} F(t_0 + i\epsilon) - F(t_0 - i\epsilon)$$

Cosa si può dire in generale per un integrale del tipo:

$$F(z) = \int_0^\infty dt \frac{f(t)}{t-z}$$

con $f(t)$ localmente hölderiana e assolutamente integrabile in $\mathbb{R}^+$?

Abbiamo un integrale del tipo (125), con $f(t)$ data da

$$f(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{t^2+1}.$$

La funzione $f(t)$ si annulla in zero e infinito e possiede un unico massimo nel punto $t = 1/\sqrt{3}$ dove vale $f(1/\sqrt{3}) = 3^{\frac{3}{4}}/4$. Per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ avremo quindi

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}. \tag{128}$$

Fissiamo $\delta > 0$, allora se $|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \ge \delta$, da (128) segue che

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\delta}\,|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}\,.$$

Consideriamo ora il caso $|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \leq \delta$. Dividiamo l'asse reale positivo nei due sottoinsiemi

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \qquad I_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right),$$

di maniera che $f(t)$ è monotona crescente in I_1 e monotona decrescente in I_2. Se $t_1, t_2 \in I_2,\ t_1 < t_2$, dal teorema del valor medio segue che esiste un $\bar{t} \in (t_1, t_2)$ tale che

$$f'(\bar{t}) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Prendendo il modulo

$$|f(t_1) - f(t_2)| = |f'(\bar{t})| \, |t_2 - t_1| \, .$$

$|f'(t)|$ ammette massimo per $t \in I_2$, quindi

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \max_{t \in I_2} |f'(\bar{t})| \, |t_2 - t_1| \leq \max_{t \in I_2} |f'(\bar{t})| \, \delta \, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \, ,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che $|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \leq \delta$.

Consideriamo ora il caso $t_1, t_2 \in I_1$, senza perdita di generalità possiamo porre $t_1 = t_2 + \epsilon,\ \epsilon > 0$. Poiché in I_1 $f(t)$ è monotona crescente, avremo

$$\begin{aligned} |f(t_1) - f(t_2)| &= \frac{(t_2 + \epsilon)^{\frac{1}{2}}}{(t_2 + \epsilon)^2 + 1} - \frac{t_2^{\frac{1}{2}}}{t_2^2 + 1} \leq \frac{(t_2 + \epsilon)^{\frac{1}{2}}}{t_2^2 + 1} - \frac{t_2^{\frac{1}{2}}}{t_2^2 + 1} \leq \\ &\leq \frac{t_2^{\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{t_2^2 + 1} \leq \epsilon^{\frac{1}{2}} = |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \, . \end{aligned}$$

Rimane da analizzare il caso in cui $|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \leq \delta$ e $t_1 \in I_1$ mentre $t_2 \in I_2$. Osserviamo che se $f(t_1) > f(t_2)$, allora

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - f(t_2) \leq C \left|\frac{1}{\sqrt{3}} - t_2\right|^{\frac{1}{2}} \leq C \, |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}$$

visto che abbiamo già dimostrato che per $t_1, t_2 \in I_2$ $f(t)$ è hölderiana di esponente $1/2$.

Analogamente se $f(t_1) \leq f(t_2)$,

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - f(t_1) \leq C \left|\frac{1}{\sqrt{3}} - t_1\right|^{\frac{1}{2}} \leq C \, |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \, .$$

Concludiamo quindi che $f(t)$ è hölderiana di esponente $1/2$ sul semiasse reale positivo. Dalle formule di Plemelji–Sokhotski (126) segue quindi che

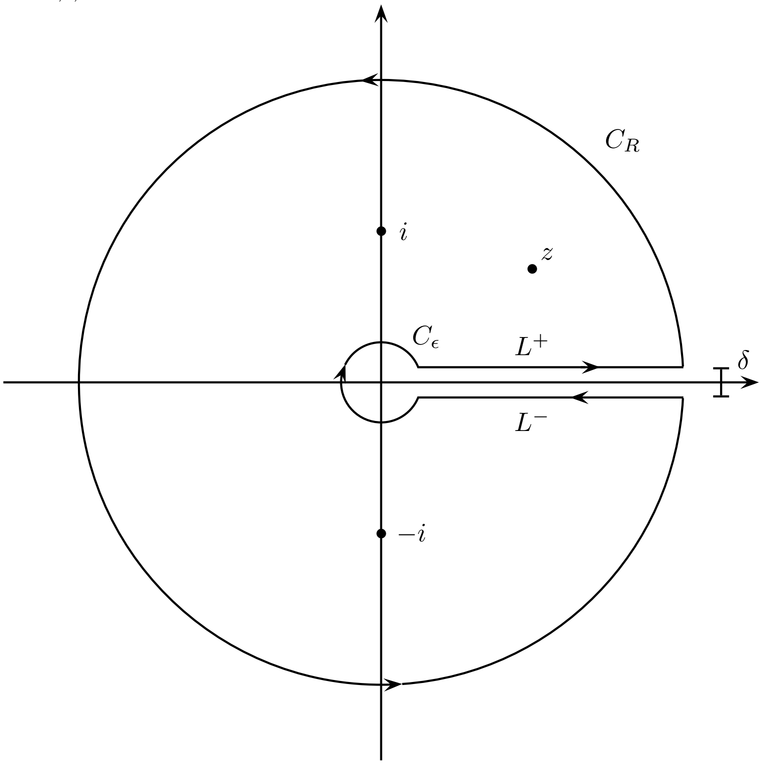
$$\Delta(t_0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} F(t_0 + i\epsilon) - F(t_0 - i\epsilon) = f(t_0).$$

Verifichiamolo calcolando esplicitamente l'integrale (127).

Consideriamo l'integrale, nel piano complesso ζ tagliato lungo l'asse reale positivo,

$$\lim_{\delta, \epsilon \to 0, R \to \infty} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon,\delta}} d\zeta \frac{\zeta^{1/2}}{(\zeta^2 + 1)(\zeta - z)}; \quad z \notin \mathbb{R}^+,$$

dove $\Gamma_{R,\epsilon,\delta}$ è il cammino chiuso



La funzione integranda moltiplicata per z si annulla uniformemente sulle circonferenze C_R e C_ϵ nel limite $R \to \infty$, $\epsilon \to 0$, per cui i corrispondenti integrali danno contributo nullo. Per l'integrale su L_+ abbiamo

$$\lim_{\delta,\epsilon\to 0, R\to\infty} \int_{L_+} d\zeta \frac{\zeta^{1/2}}{(\zeta^2+1)(\zeta - z)} = \int_0^\infty dt \frac{t^{1/2}}{(t^2+1)(t-z)}.$$

Su L_- per $\delta \to 0$, la radice tende alla determinazione definita da $\sqrt{1} = -1$, quindi ancora una volta

$$\lim_{\delta,\epsilon\to 0, R\to\infty} \int_{L_-} d\zeta \frac{\zeta^{1/2}}{(\zeta^2+1)(\zeta - z)} = \int_0^\infty dt \frac{t^{1/2}}{(t^2+1)(t-z)}.$$

In conclusione, dal teorema dei residui

$$F(z) = \int_0^\infty dt \frac{t^{1/2}}{(t^2+1)(t-z)} = \pi i \left(\mathrm{Res}_{\zeta=i} \frac{\zeta^{1/2}}{(\zeta^2+1)(\zeta-z)} + \right.$$
$$\left. + \mathrm{Res}_{\zeta=-i} \frac{\zeta^{1/2}}{(\zeta^2+1)(\zeta-z)} + \mathrm{Res}_{\zeta=z} \frac{\zeta^{1/2}}{(\zeta^2+1)(\zeta-z)} \right) =$$
$$= -\frac{\pi}{\sqrt{2}(z^2+1)} \left(z - 1 - i\sqrt{2z} \right).$$

Quindi

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0^+} F(t_0+i\epsilon) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}(t_0^2+1)}\left(t_0-1-i\sqrt{2t_0}\right)\\
&\lim_{\epsilon\to 0^+} F(t_0-i\epsilon) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}(t_0^2+1)}\left[t_0-1-i\left(2t_0e^{2i\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right] =\\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{2}(t_0^2+1)}\left(t_0-1+i\sqrt{2t_0}\right),
\end{aligned}$$

da cui

$$\Delta(t_0) = 2\pi i\frac{\sqrt{t_0}}{t_0^2+1} = f(t_0).$$

Esercizio 13.2 *Data*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N}\frac{r_i}{z-z_i} + c_0 + c_1 z \qquad (|z_i| < R, \quad i = 1,\ldots,N)$$

costruire $f^{(-)}(z)$, analitica per $|z| < R$, e $f^{(+)}(z)$, analitica per $|z| > R$, tali che

$$\begin{aligned}
&\lim_{|z|\to\infty} f^{(+)}(z) = 0\\
&\lim_{|z|\to R^-} f^{(-)}(z) - \lim_{|z|\to R^+} f^{(+)}(z) = \left. f(z)\right|_{|z|=R}
\end{aligned}$$

Esercizio 13.3 *Sul cerchio $|\zeta| = 1$ è assegnata la funzione*

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{1+a\cos\theta}, \qquad a < 1;\ \zeta = \exp(i\theta).$$

Determinare le funzioni $F^{\pm}(z)$, analitiche rispettivamente per $|z| < 1$, $|z| > 1$, tali che $F^{\pm}(z) \to \phi(\zeta)$, quando $z \to \zeta^{\pm}$.

Esercizio 13.4 *Determinare due funzioni $f_i(z)$ e $f_e(z)$ tali che:*

1. *$f_i(z)$ sia analitica all'interno del cerchio unitario;*
2. *$f_e(z)$ sia analitica all'esterno del cerchio unitario;*
3. *valga*

$$\lim_{z\to\zeta^-} f_i(z) - \lim_{z\to\zeta^+} f_e(z) = \mathrm{Re}(\zeta), \qquad |\zeta| = 1.$$

Esercizio 13.5 *Determinare esplicitamente la funzione:*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(|x|+1)(x-z)}, \qquad \mathrm{Im} z \neq 0$$

e verificare la formula di Plemelji:

$$\lim_{\epsilon \to 0} [F(x+i\epsilon) - F(x-i\epsilon)] = 2\pi i \frac{1}{|x|+1}.$$

Esercizio 13.6 *Dire se la funzione:*

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-|t|}}{t-z}$$

è analitica per $z \notin \mathbb{R}$ *e calcolarne la discontinuità sull'asse reale*

$$\Delta\phi = \lim_{\epsilon \to 0} \phi(t+i\epsilon) - \phi(t-i\epsilon), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 13.7 *Mediante un calcolo diretto, verificare che l'integrale:*

$$I = \int_0^{2\pi} dz \frac{\cos(\theta)}{z - \exp(i\theta)}$$

definisce due funzioni $f^{(e)}(z)$, $f^{(i)}(z)$*, analitiche rispettivamente all'esterno e all'interno del cerchio* $|z| = 1$*. Mettere in relazione la "discontinuit"* $f^{(e)}(z) - f^{(i)}(z)$ *su* $|z| = 1$ *con la funzione integranda.*

Esercizio 13.8 *Dimostrare che l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{\exp(-|t|)}{t-z}$$

definisce due funzioni $f^{(\pm)}(z)$*, analitiche rispettivamente per* $\mathrm{Im}\, z > 0$ *e* $\mathrm{Im}\, z < 0$*, tali che:*

$$\lim_{\epsilon \to 0} f^{(+)}(t+i\epsilon) - f^{(-)}(t-i\epsilon) = 2\pi i \exp(-|t|)$$

14 Trasformazioni conformi

Esercizio 14.1 *La trasformazione $z \to w$ è del tipo bilineare di Moebius. Su quale curva del piano z avviene che $|dw| = |dz|$?*

Esercizio 14.2 *Trovare la trasformazione conforme che manda i cerchi*

$$|z - a| = r; \qquad |z + a| = r \qquad a > r > 0$$

nei cerchi concentrici:

$$|w - b| = R_1; \quad |w - b| = R_2$$

Esercizio 14.3 *Scrivere una trasformazione di Moebius:*

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

che mappa la circonferenza unitaria (del piano z) nell'asse reale (del piano w) e l'interno (l'esterno) del cerchio unitario nel semipiano inferiore (superiore).

15 Sviluppi asintotici

Esercizio 15.1 *Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze:*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a(a+1)\dots(a+n)}$$

Si osservi che l'espressione a denominatore nella formula precedente si può scrivere in termini della funzione Γ *di Eulero nella forma:*

$$a(a+1)\dots(a+n) = a\frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)}$$

e si utilizzi il comportamento asintotico della funzione $\Gamma(x)$ *per grandi valori dell'argomento.*

Esercizio 15.2 *Dire se sono vere le seguenti stime asintotiche e spiegarne il motivo:*

$$\begin{aligned}
&a) \quad 2\sinh(\alpha x) \sim \exp(\alpha x), \quad x \to +\infty, \quad \alpha > 0 \\
&b) \quad \int_0^{+\infty} dt \frac{\sin(\lambda t)}{(1+t^2)} \quad = \quad O(\lambda^{-1}), \lambda \to \infty \\
&c) \quad \frac{1}{(1-x)} = 1 + x + O(x^2), \quad x \to 0
\end{aligned}$$

Esercizio 15.3 *Calcolare con il metodo di Laplace il termine dominante dell'andamento asintotico per grandi* x *dell'integrale:*

$$I = \int_0^{\infty} dt \exp[-x(t + a^2/t)]$$

Esercizio 15.4 *Calcolare il termine dominante nello sviluppo asintotico per* $\lambda \to \infty$*, dell'integrale:*

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda(t^2-a^2)^2}$$

Esercizio 15.5 *Qual è, per* $\lambda \to +\infty$*, il termine dominante dell'integrale:*

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{\lambda \sin^2\left(\frac{2t}{\pi}\right)}}{1+t^2}?$$

Esercizio 15.6 *a) Sia*

$$F(x) \;=\; \int_0^{\infty} dt\, \frac{\exp(-x(t-1)^2)}{\cosh t}$$

Calcolare il termine dominante dello sviluppo asintotico per grandi x.
b) Con il metodo della fase stazionaria calcolare il termine dominante per grandi x e t, nella direzione $x/t \;=\; cost. = v$, dell'integrale

$$I(x,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{\exp(ikx - ik^3 t)}{\cosh k}$$

Esercizio 15.7 *Calcolare il seguente integrale con un errore inferiore a $\frac{1}{1000}$:*

$$I \;=\; \int_0^{\infty} \frac{\exp(-1000t)}{1+t^3}$$

Esercizio 15.8 *Determinare il termine dominante per grandi x dell'integrale:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(ix\phi(t)) f(t)$$

con $\phi(t) = t^2 - a^2$, $f(t) = (\cosh t)^{-1}$

Esercizio 15.9 *Determinare lo sviluppo asintotico per $x \to \infty$ dell'integrale:*

$$F(x) = \int_0^{\infty} dt\, \frac{\exp(-xt)}{1+t^2}$$

(si ricordi che $\int_0^\infty dy\, y^n \exp(-y) = n!$).

Stimare l'errore che si commette considerando i primi N termini dello sviluppo.

Esercizio 15.10 *Sono corrette le seguenti espressioni?*

1. $\sin(z) \sim z^2 \qquad z \to 0$
2. $\cosh(x) \sim e^x \qquad x \to +\infty$

Esercizio 15.11 *Sia*

$$F(x) = \int_0^{\infty} dt\, \frac{\exp(-xt)}{\cosh(t)}$$

Dimostrare che lo sviluppo asintotico per $x \to \infty$ in effetti uno sviluppo convergente.

Esercizio 15.12 *Con il metodo di Laplace trovare il termine dominante per $x \to \infty$ degli integrali:*

$$L_n(x) = \int_0^\infty dt\, \exp(t + t^{-1})\, \cos(n\pi t)$$

Esercizio 15.13 *Con il metodo della fase stazionaria calcolare il termine dominante per grandi x e t, nella direzione $x/t = v = \text{cost.}$, dell'integrale*

$$I(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{\exp(ikx - ik^3 t)}{k^2 + a^2}$$

Esercizio 15.14 *Calcolare il termine dominante per grandi g, $g > 0$ dell'integrale*

$$I(g) = \int_0^\infty dr\, r^2 \exp(-gV(r)) \qquad V(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r}$$

Esercizio 15.15 *Sia*

$$F(x) = \int_0^\infty dt\, \frac{\exp(-x(t-1)^2)}{\cosh(t)}$$

Calcolare il termine dominante dello sviluppo asintotico per grandi x.

Esercizio 15.16 *Dire se sono corretti (e perché) gli andamenti asintotici:*

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha x) &\sim x \qquad x \to 0 \\
\sinh(x) &\sim \frac{1}{2}\exp(x) \qquad x \to +\infty \\
\frac{\exp(x)}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{\exp(x)}{x}\left[1 + O(x^{-2})\right] \qquad x \to +\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 15.17 *La funzione $F(x,t)$ è definita dalla rappresentazione integrale:*

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx - ik^2 t)dk$$

Si chiede di calcolarla esattamente e in modo approssimato mediante il metodo della fase stazionaria, fermandosi al termine dominante.

Esercizio 15.18 *Valutare con un errore inferiore a* $\frac{1}{1000}$ *l'integrale:*

$$\int_0^\infty dt\, \frac{\exp(-10t)}{1+t^2}.$$

Esercizio 15.19 *Usando il metodo di Laplace, calcolare il termine dominante, per* $x \to \infty$*, dell'integrale*

$$\int_0^L dt\, \exp(-\frac{x}{(\sin(\pi t/L))^2})$$

Esercizio 15.20 *La funzione* $F(x)$ *è definita dalla rappresentazione integrale:*

$$F(x) = \int_0^\infty dt\, \frac{\exp(x(t - t^3/12))}{1+t}.$$

Si chiede di calcolarne il termine dominante per $x \to \infty$ *mediante il metodo di Laplace.*

Esercizio 15.21 *Usando il metodo della fase stazionaria, calcolare il termine dominante, per* $x \to \infty$*, dell'integrale*

$$\int_0^\infty dt \exp(-\gamma t + ix \sin t)$$

Esercizio 15.22 *La funzione* $F(x)$ *definita dalla rappresentazione integrale:*

$$F(x) = \int_0^\infty dt \frac{\exp\left(-x\left(t^2 + \frac{g}{t^2}\right)\right)}{1+t^2} \qquad g > 0$$

Si chiede di calcolarne il termine dominante per $x \to \infty$ *mediante il metodo di Laplace.*

Esercizio 15.23 *Calcolare i primi termini dello sviluppo asintotico per* $x \to \infty$ *della rappresentazione integrale:*

$$F(x) := \int_0^\infty dt\, e^{-xt}\, \mathrm{sech(t)}$$

Ci si aspetta che lo sviluppo ottenuto sia convergente? motivare la risposta.

16 Prolungamento analitico

Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio D e sia $F(z)$ una funzione analitica in un dominio D', tale che $D \subset D'$ e $F(z) = f(z)$ per ogni $z \in D$, allora $F(z)$ è detta prolungamento analitico di $f(z)$ dal dominio D al dominio D' e l'insieme $\{D, f(z)\}$ costituito dal dominio D e dalla funzione $f(z)$ in esso analitica, è detto elemento iniziale del prolungamento analitico.

Il prolungamento analitico, se esiste, è unico. In altre parole se le due funzioni $F(z)$ e $G(z)$ prolungano analiticamente $f(z)$ dal dominio D al dominio D', allora $F(z) = G(z),\ z \in D'$.

Sia $f(z)$ una funzione definita attraverso una serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{129}$$

di raggio di convergenza R. Sia ζ un punto della frontiera del cerchio di convergenza $K\ :\ |z - z_0| < R$, se esiste un intorno U_ζ di ζ e una funzione $f_\zeta(z)$ analitica in U_ζ e tale che $f_\zeta(z) = f(z)$ per $\zeta \in U_\zeta \cap K$, allora la funzione

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z) \qquad z \in K,\ z \notin U_\zeta \\ F(z) &= f(z) = f_\zeta(z) \qquad z \in K \cap U_\zeta \\ F(z) &= f_\zeta(z) \qquad z \notin K,\ z \in U_\zeta \end{aligned}$$

è il prolungamento analitico di $f(z)$ dal dominio K al dominio $K \cup U_\zeta$ e il punto di frontiera ζ viene detto regolare per la serie (**??**). Se, invece, non esiste alcun intorno U_ζ di ζ attraverso cui prolungare analiticamente $f(z)$, il punto ζ è detto punto singolare della serie (**??**).

Data la serie di potenze (**??**) è sempre possibile determinare se un punto ζ di frontiera del cerchio di convergenza $|\zeta - z_0|$ è regolare o singolare. Per far ciò è sufficiente traslare la serie in un punto z_1 sul segmento $\overline{z_0\zeta}$ che congiunge z_0 a ζ e calcolare il nuovo raggio di convergenza R_1. Se $R_1 > R - |z_1 - z_0|$, allora il punto ζ è regolare, se invece $R_1 = R - |z_1 - z_0|$, allora ζ è singolare.

Un altro criterio (sufficiente) per stabilire se un punto ζ sulla frontiera del cerchio di convergenza è singolare è il teorema di Pringsheim

Teorema 16.1 *Data la serie (**??**) di raggio di convergenza R, se ζ appartiene alla frontiera del cerchio di convergenza ($|\zeta - z_0| = R$) e $a_n\zeta^n$ è reale e positivo da un certo n in poi, allora ζ è un punto singolare di $f(z)$.*

Esercizio 16.1 *Data la serie:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

trovarne il raggio di convergenza R. Sapendo che $z = 1$ è un punto regolare, costruire in $z = 1$ il prolungamento analitico per cerchi di $f(z)$. Utilizzare le *formule:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)!}{(2n+1)!} = (2k)!\,\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{1}{k\,2^{k+1}}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)!}{2n!} = (2k)!\,\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{2^{k+\frac{1}{2}}}$$

Dalla formula di Cauchy-Hadamard segue che il raggio di convergenza della serie è dato da:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$z = 1$ è quindi un punto sulla frontiera del cerchio di convergenza. Dal momento che si tratta di un punto regolare è quindi possibile costruirvi il prolungamento analitico per cerchi. Trasliamo la serie nel punto $z = 1$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[(z-1)+1]^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z-1)^k$$

Per invertire l'ordine di sommatoria consideriamo separatamente il caso k pari e quello k dispari:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z-1)^k =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(z-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(z-1)^{2k+1}\right]$$

Invertendo l'ordine di sommatoria per la parte pari otteniamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(z-1)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2n+1}{2k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{2n+2k+1}\binom{2n+2k+1}{2k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2k}}{2k!}(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)!}{(2n+1)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k}\left[(-1)^k\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{1}{k\,2^{k+1}}\right]$$

Procedendo nello stesso modo per la parte dispari troviamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(z-1)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k+1}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2n+1}{2k+1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{2n+2k+1}\binom{2n+2k+1}{2k+1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)!}{2n!}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k+1}\left[(-1)^k\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{(2k+1)\,2^{k+1/2}}\right]$$

Dobbiamo ora calcolare il raggio di convergenza. Usiamo nuovamente la formula di Cauchy-Hadamard:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(|c_k|)^{\frac{1}{k}}$$

I coefficienti c_k sono nel nostro caso:

$$c_k=\frac{(-1)^{k/2}}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)2^{-k/2}\qquad\text{per } k \text{ pari}$$
$$c_k=\frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)2^{-k/2}\qquad\text{per } k \text{ dispari}$$

La successione dei c_k è quindi una successione oscillante. Notiamo che vale:

$$\left|\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)2^{-k/2}\right|\leq\frac{1}{k}2^{-k/2}\qquad\text{per } k \text{ pari}$$
$$\left|\frac{1}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)2^{-k/2}\right|\leq\frac{1}{k}2^{-k/2}\qquad\text{per } k \text{ dispari}$$

e il segno di uguaglianza si ottiene selezionando la sottosuccessione $k=4n+2$. Abbiamo quindi:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(|c_k|)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Il prolungamento analitico della funzione $f(z)$ è dato quindi da:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad |z|<1\\
f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k}\left[(-1)^k\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{1}{k\,2^{k+1}}\right]+\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k+1}\left[(-1)^k\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{(2k+1)\,2^{k+1/2}}\right] \qquad |z-1|<\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 16.2 *Data la serie*

$$f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \, \Gamma(n+1/2) \, z^n$$

trovarne il raggio di convergenza R.

Costruire il prolungamento analitico per cerchi di $f(z)$ nel punto $z = -1/2$, utilizzando l'uguaglianza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \, \Gamma(n+k+1/2) \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \Gamma(k+1/2) \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1/2}$$

Dire, infine, quali sono i punti singolari di $f(z)$ sul cerchio $|z| = R$.

Abbiamo una serie di potenze

$$f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n \qquad\qquad a_n = \frac{1}{n!} \, \Gamma(n+1/2)$$

Per il criterio del rapporto il raggio di convergenza sarà dato da:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+3/2)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,\Gamma(n+1/2)}{(n+1/2)\,\Gamma(n+1/2)} = 1 \end{aligned}$$

Poiché a_n è sempre positivo per ogni n dal teorema di Pringsheim segue che $z = 1$ è un punto singolare.

Utilizzando la formula del binomio di Newton, trasliamo ora la serie dal punto $z = 0$ al punto $z = -1/2$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \left(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(z + \frac{1}{2}\right)^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Scambiando l'ordine di somma otteniamo:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z + \frac{1}{2}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Riscalando il secondo indice di somma da n a $n-k$ otteniamo infine:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z + \frac{1}{2}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \left(\begin{array}{c} n+k \\ k \end{array} \right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(z + \frac{1}{2}\right)^k$$

I nuovi coefficienti b_k sono dati da:

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \, \Gamma(n+k+1/2) \frac{(n+k)!}{n!k!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+1/2)}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1/2} \end{aligned}$$

Utilizziamo nuovamente il criterio del rapporto per trovare il raggio di convergenza:

$$R' = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_k}{b_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1/2} \frac{(k+1)!}{\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+3/2} = \frac{3}{2}$$

Il disco $|z+1/2| < 3/2$ contiene interamente il disco $|z| < 1$ con $z = 1$ unico punto di frontiera comune. Ne segue quindi che tutti i punti $|z| = 1,\ z \neq 1$ sono regolari. Poiché sul cerchio $|z| = 1$ deve esserci almeno un punto singolare, ne segue che $z = 1$ deve necessariamente essere un punto singolare (cosa che avevamo già stabilito usando il teorema di Pringsheim).

Esercizio 16.3 *Data la funzione*

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \cos(t) dt$$

analitica per $\mathrm{Re}\, z > 0$*, trovarne il prolungamento analitico a tutto il piano complesso. Che tipo di singolarità presenta la funzione prolungata?*

Sviluppiamo il coseno in serie di potenze.

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} t^{2n}$$

ed utilizziamo l'uniforme convergenza dello sviluppo per portare la sommatoria fuori dell'integrale:

$$\int_0^1 t^{z-1} \cos(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \int_0^1 t^{z+2n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \left. \frac{t^{z+2n}}{z+2n} \right|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \frac{1}{z+2n} \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

La condizione $\mathrm{Re}\, z > 0$ rende la serie ben definita. D'altra parte tale serie è definita per $z \neq 0, -2, -4, \dots$. Mostriamo che se z appartiene ad un insieme chiuso C che non contiene tali punti la serie

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \frac{1}{z+2n}$$

converge uniformemente. Poiché C è chiuso esisterà un $\delta > 0$ tale che $|2n+z| > \delta,\ z \in C,\ n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Quindi:

$$|S(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n!} \frac{1}{z+2n} \right| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!}$$

Il modulo di $S(z)$ è quindi maggiorato da una serie positiva convergente indipendente da z, il che implica che $S(z)$ uniformemente convergente per $z \in C$. Sia ora Γ una curva chiusa contenuta in C e consideriamo l'integrale:

$$\oint_\Gamma S(z)\, dz = \oint_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \frac{1}{z+2n}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \oint_\Gamma \frac{1}{z+2n}\, dz$$

Se all'interno della curva Γ non è contenuto alcun punto $z_n = -2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, allora l'integrale si annulla per il teorema di Cauchy. Se invece la curva Γ contiene un unico punto singolare $z_m = -2m$, avremo:

$$\oint_\Gamma S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}\delta_{n,m} = \frac{(-1)^m}{2m!}$$

$$c_{-k} = \oint_\Gamma (z+2m)^k S(z)\,dz = 0 \qquad k \in \mathbb{N}$$

Quindi la parte principale dello sviluppo di Laurent di S_z in un intorno di z_m contiene solo il termine $(z - z_m)^{-1}$. Concludendo $S(z)$ definisce una funzione analitica in tutto il piano complesso privato dei punti $z_n = -2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ dove ha poli semplici con residuo $(-1)^m/2m!$, e costituisce il prolungamento analitico della funzione $f(z)$ a tale dominio.

Esercizio 16.4 *Determinare il dominio di analiticità delle funzioni*

$$f_n(z) = \int_0^\infty dt\, t^n\, e^{-z^2 t} \qquad n \geq 0$$

Mostrare che $\forall n \geq 0$ *le funzioni* $f_n(z)$ *possono essere prolungate analiticamente all'intero piano complesso privato dell'origine.*

Le funzioni $f_n(z)$ saranno analitiche nel dominio D in cui l'integrale è uniformemente convergente. D'altra parte, ponendo $z = x + iy$, abbiamo che:

$$\left| t^n\, e^{-z^2 t} \right| = t^n \left| e^{-z^2 t} \right| = t^n \left| e^{-[(x^2-y^2)+2ixy]t} \right| = t^n\, e^{-(x^2-y^2)t} = t^n\, e^{-\mathrm{Re}(z^2)t}$$

Quindi su ogni insieme chiuso contenuto in $0 < \delta \leq \mathrm{Re}(z^2)$, varrà:

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &= \left| \int_0^\infty dt\, t^n\, e^{-z^2 t} \right| \leq \int_0^\infty dt\, t^n \left| e^{-z^2 t} \right| = \\ &= \int_0^\infty dt\, t^n\, e^{-\mathrm{Re}(z^2)t} \leq \int_0^\infty dt\, t^n\, e^{-\delta t} \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è indipendente da z e convergente per $\delta > 0$; ne segue che le $f_n(z)$ sono analitiche per $\mathrm{Re}(z^2) > 0$, cioè per $x^2 > y^2$. D'altra parte per $\mathrm{Re}(z^2) \leq 0$ l'integrale è divergente e quindi il dominio di analiticità delle $f_n(z)$ è proprio $\mathrm{Re}(z^2) > 0$.

Consideriamo ora il prolungamento analitico. Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= -\frac{1}{z^2}\, t^n\, e^{-z^2 t}\Big|_0^\infty + \frac{n}{z^2}\int_0^\infty dt\, t^{n-1}\, e^{-z^2 t} = \\ &= \frac{n}{z^2}\, f_{n-1}(z) = \frac{n!}{z^{2n}}\, f_0(z) = \frac{n!}{z^{2n}} \int_0^\infty dt\, e^{-z^2 t} = \frac{n!}{z^{2(n+1)}} \quad \mathrm{Re}(z^2) > 0, \end{aligned}$$

di conseguenza $n!/z^{2(n+1)}$ è il prolungamento analitico di $f_n(z)$ a tutto $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Alternativamente, possiamo restringerci a $z = x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, che è un sottoinsieme del dominio di analiticità $\mathrm{Re}(z^2) > 0$, ed effettuare il cambiamento di variabile:

$$y = x^2 t \qquad t^n = \frac{y^n}{x^{2n}} \qquad dt = \frac{dy}{x^2}$$

si ha:

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{2(n+1)}} \int_0^\infty dy\, y^n e^{-y} = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{2(n+1)}} = \frac{n!}{x^{2(n+1)}}$$

il cui prolungamento analitico vale ancora

$$f_n(z) = \frac{n!}{z^{2(n+1)}}.$$

Esercizio 16.5 *Sia:*

$$f_n(z) = \int_0^\infty dt\, e^{-zt} t^n \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Trovare il dominio nel piano complesso z in cui vale l'uguaglianza:

$$f_n(z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} f_0(z).$$

Trovare poi il prolungamento analitico delle $f_n(z)$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Esercizio 16.6 *Data $f(t)$ tale che*

$$\int_0^\infty dt |f(t)| < \infty,$$

determinare il dominio di analiticità di:

1. $F_1(z) := \int_0^\infty dt\, e^{-zt} f(t)$,
2. $F_2(z) := \int_0^\infty dt\, e^{-z^2 t} f(t)$.

Esercizio 16.7 *Data la successione di funzioni:*

$$f_n(z) \equiv \frac{1}{n!} \int_0^\infty dt\, t^n\, e^{-tz}$$

1. *Dimostrare, senza calcolare l'integrale, che le f_n sono analitiche per* $\mathrm{Re}\, z > 0$.
2. *Determinare il prolungamento analitico di $f_n(z)$ e il dominio in cui*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) \to 0$$

Esercizio 16.8 *Determinare il dominio di analiticità di*

$$F(z) = \int_0^\infty dt\, e^{-z^2 t}\, \mathrm{sech(t)}$$

Esercizio 16.9 *Dimostrare che la funzione*

$$F(z) = \int_0^\infty dt\, \frac{\exp(zt)}{\cosh(t)}$$

è analitica nel semipiano $\mathrm{Re}(z) < 1$.

Esercizio 16.10 *Supponendo che valga la stima:*

$$|f(x)| \leq C \exp(-\sigma|x|)$$

dimostrare che la trasformata di Fourier

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp(-ikx) f(x)$$

analitica nella striscia $|\mathrm{Im}\, k| < \sigma$.