Note ed esercizi su andamenti asintotici e calcolo approssimato di integrali

1 Definizione di sviluppo asintotico

Sia data una successione di funzioni $\delta_n(x)$, infinitesime per $x \to x_0$, e tali che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\delta_{n+1}(x)}{\delta_n(x)} = 0$$

La somma:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \delta_n(x)$$

definisce uno sviluppo asintotico di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0$ se risulta:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \delta_n(x) + O(\delta_{n+1}(x))$$

Si scrive anche semplicemente:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n \delta_n(x)$$

Ricordiamo qui il significato dei simboli $\sim$, O,o:

- $\sim$: $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$ se e solo se

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- O: $f(x) = O[g(x)]$ $(x \to x_0)$ se

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

  con $l \neq 0$.

- o: $f(x) = o[g(x)]$ $(x \to x_0)$ se

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

2 Proprietà e "robustezza" degli sviluppi asintotici

2.1

Una combinazione lineare di funzioni aventi ciascuna uno sviluppo asintotico in termini della stessa successione di funzioni, ha per sviluppo le combinazioni lineari degli sviluppi.

2.2

Se $f(x,t)$ ha uno sviluppo asintotico per $x \to x_0$, $t \in [a,b]$, allora la funzione

$$g(x) = \int_a^b dt f(x,t)$$

ha ancora uno sviluppo asintotico per $x \to x_0$, che si può ottenere integrando termine a termine quello per $f(x,t)$:

$$f(x,t) \sim \sum_n a_n(t)\delta_n(x), \qquad x \to x_0, \qquad t \in [a,b]$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) \sim \sum_n c_n \delta_n(x), \qquad c_n = \int_a^b dt a_n(t)$$

2.3

Sviluppi asintotici in serie di potenze ($(x-x_0)^n$ oppure $\frac{1}{x^n}$) possono essere, oltre che sommati e integrati, anche moltiplicati, divisi e derivati termine a termine. Per esempio:

$$f(x) = \sum_n f_n(x-x_0)^n$$

$$g(x) = \sum_n g_n(x-x_0)^n$$

$$\Rightarrow \quad f(x)\cdot g(x) = \sum_n h_n(x-x_0)^n$$

$$(h_0 = f_0 g_0, \quad h_1 = f_0 g_1 + f_1 g_0, \quad h_2 = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 \quad \text{ecc.} \qquad h_k = \sum_{l=0}^{k} f_{k-l} g_l)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{g(x)} = \sum_n c_n (x-x_0)^n$$

se $g_0 \neq 0$. I coefficienti c_n si ottengono imponendo $g(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \sim 1$:

$$g_0 c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{g_0}$$

$$g_0 c_1 + g_1 c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{g_1}{g_0^2} \dots$$

$$f(x) \sim \sum_n f_n (x-x_0)^n \Rightarrow f'(x) \sim \sum_{n\geq 0} n f_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1) f_{n+1}(x-x_0)^n$$

2.4

Uno sviluppo divergente può dar luogo, per integrazione, a uno sviluppo asintotico.

Esempio:

$$L(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) \quad x \to +\infty$$

Supponiamo che $f(t)$ abbia uno sviluppo in serie di Taylor (assolutamente e uniformemente) convergente per $|t| \leq \alpha t_0$, $\alpha < 1$. Allora si può scambiare la serie con l'integrale ottenendo uno sviluppo asintotico per $L(x)$. Qualitativamente si può dire che la funzione e^{-xt} è sostanzialmente diversa da zero per $t \leq 1/x$: quindi il contributo dominante sull'integrale proverrà da un'intorno destro dell'origine, sempre più piccolo al crescere di x: il contributo della regione $t > t_0$, in cui lo sviluppo di Taylor di $f(t)$ diverge è quindi sempre più trascurabile al crescere di x. Queste argomentazioni vengono trasformate in deduzioni rigorose dal lemma di Watson (vedi testo). Si dimostra perciò che:

$$L(x) \sim \sum_{n=0}^{N} \frac{l_n}{x^{n+1}} \quad x \to +\infty \tag{1}$$

I coefficienti l_n si ottengono integrando termine a termine lo sviluppo di Taylor: sia

$$f(t) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

si ha:

$$L(x) \sim \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^\infty e^{-xt} t^n = \sum_n f^{(n)}(0) \cdot \frac{1}{x^{n+1}}$$

ricordando che:

$$\int_0^\infty dt e^{-xt} t^n = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Osserviamo che lo stesso risultato si ottiene integrando successivamente per parti:

$$\int_0^\infty dt e^{-xt} f(t) = -\frac{1}{x} e^{-xt} f(t)|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty dt e^{-xt} f'(t) =$$

$$\frac{1}{x} f(0) + \frac{1}{x}[-\frac{1}{x} e^{-xt} f'(t)|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty dt e^{-xt} f''(t)] =$$

$$= \frac{1}{x} f(0) + \frac{1}{x^2} f'(0) + \dots$$

Osserviamo che il "resto", cioè la differenza

$$R_{N+1}(x) = L(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{l_n}{x^{n+1}}$$

è dato da:

$$\int_0^\infty dte^{-xt}(f(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n)$$

Se

$$|f(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n| \le Ct^{n+1}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

avremo

$$|R_{N+1}(x)| \le C[\int_0^\infty dte^{-xt} t^{N+1}] = O(\frac{1}{x^{N+2}})$$

che è quanto si richiede perché si abbia uno sviluppo asintotico.

Riassumendo:

Se una funzione $f(t)$ è derivabile N volte, la derivata di ordine N è assolutamente integrabile in $[0, \infty)$, e la differenza

$$|f(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n| \le Ct^{n+1}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

lo sviluppo (1) è uno sviluppo asintotico.

Analoghe considerazioni valgono per integrali di tipo Fourier

$$F(x) = \int_a^b dte^{ixt} f(t) \quad x \to \infty$$

Integrando successivamente per parti otteniamo:

$$F(x) = \frac{1}{ix} e^{ixt} f(t)|_a^b - \frac{1}{ix} \int_a^b dte^{ixt} f'(t) =$$

$$= \frac{1}{ix}[e^{ixb} f(b) - e^{ixa} f(a)] - \frac{1}{(ix)^2}[e^{ixb} f'(b) - e^{ixa} f'(a)] +$$

$$\frac{1}{(ix)^3}[e^{ixb} f''(b) - e^{ixa} f''(a)] + \dots$$

Se $f(t)$ è derivabile N volte abbiamo i termini:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{(ix)^{n+1}} [e^{ixb} f^{(n)}(b) - e^{ixa} f^{(n)}(a)]$$

con il resto:

$$\frac{1}{(ix)^N} \int_a^b dte^{ixt} f^{(N)}(t)$$

Se $f^{(N)}(t)$ è *assolutamente integrabile* in [a,b], il resto è $o(\frac{1}{x^N})$ per il lemma di Riemann-Lebesgue. Si noti che, nel caso di integrali di Fourier tra $-\infty$ e $+\infty$, maggiore è la derivabilità di $f(t)$, più rapido è l'andamento a zero per grandi $|x|$ di $F(x)$.

Infatti, se $f(t)$ è derivabile N volte, e le derivate sono assolutamente integrabili sulla retta, avremo:

$$R_N(x) = \frac{1}{(ix)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{ixt} f^{(N)}(t)$$

che si annulla come $\frac{1}{x^{N+1}}$ per $N \to \infty$.

Ricordiamo che il lemma di Riemann-Lebesgue afferma che, se $f(t)$ è una funzione assolutamente integrabile nell'intervallo $[a, b]$, risulta:

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^b dt \exp(ixt) f(t) \quad = \quad 0$$

La dimostrazione utilizza la proprietà che ogni funzione assolutamente integrabile (secondo Lebesgue) è approssimabile "tanto bene quanto si vuole" con una successione di funzioni costanti a tratti. D'altra parte se $f(t)$ è costante ($= c_k$) nell'intervallo $[a_k, b_k]$, si ha:

$$\int_{a_k}^{b_k} dt \ \exp(ixt) f(t) \ = \ c_k \frac{\exp(ikb) - \exp(ika)}{ix}$$

che chiaramente è $O(1/x)$ quando $x \to \infty$.

3 Integrali di Fourier e di Laplace del tipo:

$$\int_a^b e^{x\phi(t)} f(t), \qquad \int_a^b dt e^{ix\phi(t)} f(t)$$

Dobbiamo distinguere vari casi:

- *Caso 1*: la funzione $\phi(t)$ è monotona nell'intevallo $[a, b]$, e la sua derivata è diversa da zero in $[a, b]$.
- *Caso 2a*: $\phi'(t) = 0$ almeno in un punto interno a $[a, b]$.
- *Caso 2b*: $\phi'(a) = 0$ (oppure $\phi'(b) = 0$).

Caso 1

Nel *caso 1* possiamo procedere come per integrali di Laplace o di Fourier di tipo "standard", effettuando il cambiamento di variabile: $\tau = \phi(t)$. Ad esempio:

$$\int_a^b dt e^{x\phi(t)} f(t) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \frac{d\tau}{\phi'(t(\tau))} e^{x\tau} f(t(\tau)) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau e^{x\tau} g(\tau)$$

e si procede per *successive integrazioni per parti.*

I *casi 2a* e*2b* sono sostanzialmente diversi. Inoltre è opportuno analizzare separatamente gli integrali di tipo Fourier e quelli di tipo Laplace.

Casi 2a e 2b - Laplace

Sia

$$L(x) = \int_a^b dt e^{x\phi(t)} f(t)$$

vogliamo determinare il termine dominante dello sviluppo asintotico di $L(x)$ per $x \to \infty$.

L'idea è che, se $\phi(t)$ ha un massimo per $t = t_0$, il contributo dominante venga da un intorno di t_0, dal momento che questo massimo viene esaltato per $x \to \infty$. Inoltre, ci aspettiamo che il contributo di eventuali massimi relativi sia esponenzialmente piccolo rispetto a quello del massimo assoluto.

Supponiamo per semplicità che $\phi''(t_0)$ sia diverso da zero, e quindi minore di zero se t_0 è un massimo. Scriviamo allora

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \phi''(t_0) + \delta(t_0, t)$$

con δ infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(t - t_0)^2$. Sarà quindi lecito approssimare, per grandi x, $\phi(t)$ con i primi due termini dello sviluppo e nello stesso tempo, la funzione $f(t)$ con il suo valore in t_0. Il termine dominante del comportamento asintotico sarà quindi:

$$L(x) \sim e^{x\phi(t_0)} f(t_0) \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} e^{x\phi''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2}} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Dove η è scelto in modo che per $\forall\, t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ valga:

$$|\phi(t) - \phi(t_0) - \frac{1}{2}\phi''(t_0)(t - t_0)^2| < \epsilon$$

Ora la funzione integranda è una funzione pari, per cui possiamo scrivere:

$$L(x) \sim 2e^{x\phi(t_0)} f(t_0) \int_0^\eta d\tau e^{x\phi''(t_0)\frac{\tau^2}{2}}$$

Introducendo

$$y = \sqrt{\frac{x|\phi''(t_0)|}{2}}\tau$$

abbiamo

$$d\tau = \sqrt{\frac{2}{x|\phi''(t_0)|}} dy$$

e quindi:

$$L(x) \sim 2e^{x\phi(t_0)} f(t_0) \sqrt{\frac{2}{x|\phi''(t_0)|}} \int_0^{\eta\sqrt{\frac{x|\phi''(t_0)|}{2}}} dy e^{-y^2} \sim$$

$$\sim 2e^{x\phi(t_0)} f(t_0) \sqrt{\frac{2}{x|\phi''(t_0)|}} \int_0^\infty dy e^{-y^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{x|\phi''(t_0)|}} e^{x\phi(t_0)} f(t_0)$$

Si può riconoscere che i termini ulteriori dello sviluppo asintotico darebbero luogo a una formula del tipo:

$$L(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x|\phi''(t_0)|}} e^{x\phi(t_0)} f(t_0)[1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots]$$

Da questa analisi è facile trarre due conclusioni:

- Eventuali altri massimi danno un contributo dominante esponenzialmente piccolo rispetto al massimo assoluto.

  Ripetendo infatti il ragionamento fatto qui sopra, il contributo dominante dovuto a un massimo centrato in t_1, poniamo, sarebbe:

  $$L_1(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x|\phi''(t_1)|}} e^{x\phi(t_1)} f(t_1)[1 + O(\frac{1}{x})]$$

  con un rapporto

  $$\frac{L_1(x)}{L_0(x)} \sim \frac{f(t_1)}{f(t_0)} \sqrt{\frac{|\phi''(t_0)|}{|\phi''(t_1)|}} e^{-x[\phi(t_0)-\phi(t_1)]}$$

- Se il massimo assoluto coincide con uno degli estremi, ed esso è anche un punto estremale ($\phi'(a) = 0$ oppure $\phi'(b) = 0$) si ha un contributo pari alla metà di quello ora calcolato, nel senso che:

  $$L(x) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{x|\phi''(a)|}} e^{x\phi(a)} f(a)$$

  oppure $a \Longleftrightarrow b$.

Casi 2a e 2b - Fourier

L'analogo del metodo di Laplace, per integrali di tipo Fourier, è chiamato "metodo della fase stazionaria".

Rispetto al metodo di Laplace, ci sono almeno due differenze rilevanti.

- È importante che t_0 sia un punto critico ($\phi'(t_0) = 0$), e non ha rilevanza se esso sia un massimo o un minimo.
- tutti i punti critici danno contributo dello stesso ordine di grandezza.

Consideriamo un integrale del tipo:

$$F(x) = \int_a^b e^{ix\phi(t)} f(t) dt$$

e supponiamo che esso abbia un punto critico in t_0. Abbiamo:

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2 + \delta(t,t_0)$$

come prima, e possiamo approssimare:

$$F(x) \sim \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} [e^{ix\phi(t_0)f(t_0)}]e^{\frac{ix}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2}$$

Definiamo anche qui la variabile:

$$y = \sqrt{\frac{|x||\phi''(t_0)|}{2}}(t-t_0)$$

per cui

$$\frac{x}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2 = \mathrm{sgn}(x\phi''(t_0))y^2$$

Abbiamo perciò:

$$F(x) \sim 2e^{ix\phi(t_0)}f(t_0)\sqrt{\frac{2}{|x\phi''(t_0)|}}\int_0^\infty dy e^{i\mathrm{sgn}(x\phi''(t_0))y^2}$$

Ricordiamo ora il valore dell'integrale di Fresnel:

$$\int_0^\infty dy e^{iy^2\mathrm{sgn}(\alpha)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(\alpha)}$$

Abbiamo in definitiva:

$$F(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|x\phi''(t_0)|}}e^{ix\phi(t_0)}f(t_0)e^{i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(x\phi''(t_0))}$$

Dalle precedenti formule si vede chiaramente che punti estremali diversi danno valori dello stesso ordine di grandezza (il termine $e^{i[x\phi(t_0)+\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(x\phi''(t_0))]}$ è un fattore di fase). Ancora, se si ha un punto critico all'estremo di un intervallo, il contributo è "pari alla metà" di quello associato a un punto interno.

4 Esercizi su serie asintotiche, Integrali di Laplace e Fourier, etc.

E1

Dire se sono corrette le seguenti affermazioni:

- $\sinh(x) \sim \frac{1}{2}e^x \qquad x \to +\infty \qquad (a)$
- $\frac{\sin(x)}{x} = 1 + O(x^2) \qquad x \to 0 \qquad (b)$
- $\cos(x)e^x \sim e^x \qquad x \to +\infty \qquad (c)$

Soluzioni: (a) si; (b) si; (c) no;

E2

Determinare lo sviluppo asintotico della funzione:

$$\mathcal{E}(x) = \int_x^\infty dy e^{-y^2} \qquad x \to +\infty$$

Dal momento che l'integrale è convergente, ci aspettiamo che anche lo sviluppo in realtà sia uno sviluppo convergente. Inoltre le funzione integranda è monotona decrescente e di conseguenza il contributo dominante deve venire da un intorno del limite inferiore dell'integrale.

Soluzione: Ponendo $t = y^2$, l'integrale diventa:

$$\frac{1}{2}\int_{x^2}^\infty dt t^{-1/2} e^{-t}$$

da cui, integrando per parti:

$$\int_{x^2}^\infty dt t^{-1/2} e^{-t} = -t^{-1/2}e^{-t}|_{x^2}^\infty - \frac{1}{2}\int_{x^2}^\infty dt t^{-3/2} e^{-t} =$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{2}[-t^{-3/2}e^{-t}|_{x^2}^\infty - \frac{3}{2}\int_{x^2}^\infty t^{-5/2}e^{-t}] =$$

$$= e^{-x^2}[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}] - \frac{3}{4}t^{-5/2}e^{-t}|_{x^2}^\infty + \dots$$

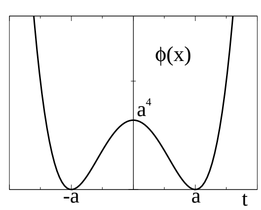
$$= e^{-x^2}[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{4x^5} + \dots]$$

E3

Usando Laplace, calcolare il termine dominante, per x grande e positivo, dello sviluppo asintotico di

$$L(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-x\phi(t)}$$

dove $\phi(t)$ è la funzione $(t^2 - a^2)^2$:



Soluzione: La funzione $\phi(t)$ ha due minimi, e quindi $-x\phi(t)$ ha due massimi, nei punti $t = \pm a$.

Sfruttando la parità della funzione possiamo scrivere:

$$L(x) = 2\int_0^{+\infty} dt e^{-x\phi(t)}$$

Osserviamo che:

$$\phi(a) = 0, \qquad \phi'(a) = 0, \qquad \phi''(a) = 8a^2$$

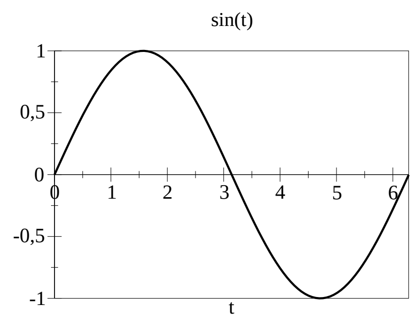
Abbiamo perciò:

$$L(x) \sim 2\sqrt{\frac{2\pi}{8xa^2}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{4a^2x}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

E4

Usando il metodo della fase stazionaria calcolare i termini dominanti dell'integrale

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^{2\pi} dt e^{ix\sin(t)}$$



Soluzione: Ci aspettiamo due contributi dello stesso ordine di grandezza, provenienti da $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$.

Usando le formule precedenti, otteniamo:

$$\mathcal{F}(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|x|}}[e^{ix - i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(x)} + e^{-ix + i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(x)}] =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2\pi}{|x|}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(x)\right)$$