Risoluzione delle equazioni del calore, delle onde e di Poisson con il metodo della Trasformata di Fourier

Prof. Orlando Ragnisco

Corso Di Complementi Di Metodi Matematici Per La Fisica
A.A. 2004-2005
Appunti raccolti da Edoardo Carlesi

Indice

1 Equazione del Calore (o della diffusione)

L'equazione del calore descrive l'andamento della temperatura in funzione delle coordinate spaziali e del tempo in un mezzo conduttore: a partire da una certa distribuzione iniziale, ci permette di prevedere la distribuzione in un istante futuro.

Naturalmente possiamo pensare ad un altra grandezza fisica al posto della temperatura (ad es. la concentrazione di solvente in una soluzione).

L'equazione si scrive:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u \tag{1}$$

dove a, il coefficiente di diffusione, ha le dimensioni du una lunghezza al quadrato diviso il tempo. L'operatore ∇^2 è la somma delle derivate seconde rispetto alle coordinate spaziali, ovvero:

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ in una dimensione

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ in due dimensioni

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in tre dimensioni

E' possibile munire l'equazione di diverse condizioni al contorno; ad esempio, nel caso unidimensionale sarà possibile considerare il caso di una sbarra infinita (e si assumerà allora che $u(x, 0) \to 0$ per$|x| \to +\infty$) semi-infinita o di un segmento. In quest'ultimo caso, ad esempio, avrà senso considerare gli estremi della sbarra a contatto con due sorgenti a temperatura costante U_1 e U_2

Inoltre, il sistema può essere soggetto all'azione di una sorgente distribuita nello spazio e nel tempo con una legge nota. In tal caso, l'equazione sarà non omogenea:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u + f(\overrightarrow{x}, t) \text{ dove : } \overrightarrow{x} = (x, y, z) \tag{2}$$

1.1 Funzione di Green per conduttori infiniti

Lo strumento matematico che useremo sarà quello della trasformata di Fourier (per un dominio illimitato), o della serie di Fourier (nel caso di un dominio limitato). In queste note ci concentreremo sulle trasformate di Fourier, considerando perciò il caso della sbarra infinita, della piastra conduttrice infinita o del solido conduttore infinito. Definiamo:

$$\hat{u}(\overrightarrow{k}, t) = \int_{R^n} d^n x e^{-i\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{x}} u(\overrightarrow{x}, t) \tag{3}$$

$$u(\overrightarrow{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} d^n k e^{i\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{x}} \hat{u}(\overrightarrow{k}, t) \tag{4}$$

Studiamo il problema *non* omogeneo associato alla presenza di una sorgente localizzata nello spazio (ad es. nell'origine) ed istantanea (ad es. a $t = t_0$), rappresentabile matematicamente come il prodotto $\delta(\overrightarrow{x})\delta(t - t_0)$. Chiamiamo $G(\overrightarrow{x}, t)$ la corrispondente soluzione (che è detta *soluzione fondamentale o funzione di Green del problema*) :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \nabla^2 G + \delta(x)\delta(t) \tag{5}$$

Questa soluzione non è unica, ma sarà costituita dalla somma di una parte *regolare* (la soluzione generale dell'omogenea associata) e di una parte *singolare* (una soluzione particolare della non omogenea). Questa si chiama *soluzione fondamentale* poiché da essa si può costruire per quadrature la soluzione per un termine di sorgente atbitrario . Se la G è soluzione della 5 il prodotto di convoluzione $G * f$ è soluzione di 2. Infatti, se:

$$u(\overrightarrow{x}, t) = \int d\overrightarrow{x} \int dt' G(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}', t - t') f(\overrightarrow{x}\prime, t') \tag{6}$$

abbiamo :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = \int d\overrightarrow{x}' \int dt' \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}')\delta(t - t') f(\overrightarrow{x}', t') = f(\overrightarrow{x}, t) \tag{7}$$

Inoltre, come vedremo, dalla soluzione fondamentale è possibile costruire anche la *soluzione dell'omogenea* associata ad una arbitraria condizione iniziale $u_0(\overrightarrow{x})$ [1].

1.1.1 Soluzione mediante trasformata di Fourier

Ciò detto, passiamo alla determinazione di G utilizzando la trasformata di Fourier *spaziale.*
Avremo:

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial t} + a^2 k^2 \hat{G} = \delta(t) \tag{8}$$

La soluzione di 8 vale:

$$\hat{G}(\overrightarrow{k}, t) = \hat{G}_r(\overrightarrow{k}, t) + \hat{G}_s(\overrightarrow{k}, t) \tag{9}$$

dove $\hat{G}_r$ (r sta per regolare) è la soluzione generale dell'omogenea :

$$\hat{G}_r = \hat{G}_0(k) e^{-a^2 k^2 t} \tag{10}$$

e $\hat{G}_s$ è una soluzione particolare della non-omogenea, che è della forma:

$$\hat{G}_s(\overrightarrow{k}, t) = \theta(t) g_1(\overrightarrow{k}, t) \tag{11}$$

[1] sempre se $u_0(\overrightarrow{x})$ è assolutamente integrabile nel dominio spaziale che interessa

dove $g_1(k,t)$ è la soluzione dell'omogenea tale che $g_1(k,0) = 1$ cioè :

$$g_1(k,t) = e^{-a^2k^2t} \tag{12}$$

Infatti, applicando a $\hat{G}_s(k,t)$ l'operatore $\frac{\partial}{\partial t} - a^2k^2$ otteniamo :

$$(\frac{\partial}{\partial t} - a^2k^2)\theta(t)g_1(k,t) = \theta(t)[\frac{\partial g_1}{\partial t} - a^2k^2 g_1] + \delta(t)g_1(k,t) = \delta(t)g_1(k,0) = \delta(t) \text{ (Q.E.D.)} \tag{13}$$

Dobbiamo ora antitrasformare :

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int d^nke^{-i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}[G_0(k)e^{-a^2k^2t}] + \frac{1}{(2\pi)^n}\int d^nke^{-i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}[\theta(t)e^{-a^2k^2t}] \tag{14}$$

Il primo integrale dipende da una funzione arbitraria, e fornisce infatti la soluzione generale dell'omogenea.
Il secondo integrale può essere calcolato esattamente. In particolare, per $n = 1$ otteniamo :

$$\begin{aligned} G_s(\overrightarrow{x},t) &= \frac{1}{2\pi}(\int_{-\infty}^{+\infty} dke^{ikx-a^2k^2t})\theta(t) \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\pi a\sqrt{t}}\theta(t)(\int_{-\infty-\frac{ix}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty-\frac{ix}{2a\sqrt{t}}} dye^{-y^2}) \\ &= \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}}\theta(t)e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot\sqrt{\pi} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \end{aligned} \tag{15}$$

Per $n = 2$ otteniamo invece:

$$G_s(\overrightarrow{x},t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_xe^{ik_xx-a^2k_xt}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_ye^{ik_yy-a^2k_yt} \tag{16}$$

da cui possiamo ottenere la struttura generale ($\forall n$) :

$$\begin{aligned} G_s(\overrightarrow{x},t) &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_je^{ik_jx_j-a^2k_jt} \\ &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x_j{}^2}{4a^2t}} \\ &= \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|\overrightarrow{x}|^2}{4a^2t}} \\ &= \theta(t)g_1(\overrightarrow{x},t) \end{aligned} \tag{17}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \delta(x) \tag{18}$$

Infatti, la successione di funzioni ($t = \frac{1}{n^2}$)

$$\delta_n(x) = \frac{n}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2x^2}{4a^2}} = nD(nx), \text{ dove } D(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}, \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} dx D(x) = 1 \tag{19}$$

Di conseguenza:

$$\lim_{t\to 0^+} G_s(\overrightarrow{x}, t) = \delta(x_1)\delta(x_2)...\delta(x_n) = \delta(\overrightarrow{x})$$

Perciò, la soluzione $u(\overrightarrow{x}, t)$ dell'equazione omogenea con la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ è data dalla convoluzione:

$$u(x,t) = \int_{R^n} d\overrightarrow{x}\prime g_1(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}\prime, t) u_0(\overrightarrow{x}\prime) \tag{20}$$

Infatti:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - a^2k^2)u = \int_{R^n} d\overrightarrow{x}\prime (\frac{\partial}{\partial t} - a^2k^2)(g_1(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}\prime, t))u_0(\overrightarrow{x}\prime) = 0 \tag{21}$$

e inoltre:

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{R^n} d\overrightarrow{x} g_1(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}\prime, t)u_0(\overrightarrow{x}\prime) = \int_{R^n} d\overrightarrow{x} \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}\prime)u_0(\overrightarrow{x}\prime) = u_0(\overrightarrow{x}) \tag{22}$$

1.2 Sbarra di lunghezza finita con condizioni al contorno non omogenee

Supponiamo di avere una sbarra di lunghezza L i cui estremi sono a contatto con due termostati,a temperatura T_0 e T_L rispettivamente. Supponiamo che la distribuzione di temperatura sia inizialmente $u(x, 0) = u_0(x)$, con $u_0(0) = T_0, u_0(L) = T_L$. Osserviamo che la funzione:

$$w(x,t) = u(x,t) - (T_0 + \frac{x}{L}(T_L - T_0)) = u(x,t) - f(x) \tag{23}$$

soddisfa ancora l'equazione del calore (poichè $\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$), obbedisce a condizioni al contorno omogenee:

$$w(0,t) = u(0,t) - f(0) = 0 \tag{24}$$

$$w(L,t) = u(L,t) - f(L) = 0 \tag{25}$$

e soddisfa la condizione iniziale:

$$w(x,0) = u(x,0) - f(x) \tag{26}$$

$$\text{con } (w(0,0) = 0, w(L,0) = 0)$$

Possiamo quindi risolvere il problema determinando in primo luogo $w(x,t)$ e successivamente $u(x,t) = w(x,t) + f(x)$

1.2.1 Determinazione di $w(x,t)$

Sviluppiamo la $w(x,t)$ in serie di Fourier :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) sin(\frac{n\pi x}{L}) \tag{27}$$

Stiamo quindi prendendo come periodo base $[-L, L]$ e chiediamo che la funzione w sia *dispari*. Le w_n soddisfano le equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} - a^2(\frac{n\pi}{L})^2 w_n = 0 \tag{28}$$
$$w_n(t) = w_n(0)e^{-n^2(\frac{a\pi}{L})^2 t}$$

I $w_n(0)$ sono i coefficienti di Fourier di $w(x,0)$:

$$w_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L dx \sin(\frac{n\pi x}{L})w(x,0) = \frac{2}{L}\int_0^L dx \sin(\frac{n\pi x}{L})(u(x,0) - f(x)) \tag{29}$$

Osserviamo che :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{L}\int_0^L dx \sin(\frac{n\pi x}{L})f(x) &= \frac{2}{L}\int_0^L dx \sin(\frac{n\pi x}{L})(T_0 + \frac{x}{L}(T_L - T_0)) = \\
&= \frac{L}{\pi}\int_0^{\pi} dy \sin(ny)(T_0 + \frac{y}{\pi}(T_L - T_0)) = \\
&= \frac{L}{\pi}[T_0(-\frac{1}{n}((-1)^n - 1)) + \frac{1}{n\pi}(T_L - T_0)\pi(-1)^n] = \\
&= \frac{L}{n\pi}[-T_0((-1)^n - 1) + (T_0 - T_L)(-1)^n] = \\
&= \frac{L}{n\pi}[T_0 - (-1)^n T_L] \qquad (30)
\end{aligned}$$

e quindi

$$w_n(0) = -\frac{1}{n\pi}[T_0 - (-1)^n T_L] + u_n(0) \tag{31}$$

Otteniamo perciò per la $u(x,t)$:

$$u(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-n^2(\frac{a\pi}{L})^2 t}[u_n(0) - \frac{1}{n\pi}[T_0 - (-1)^n T_L]] \tag{32}$$

Nel caso di condizioni al contorno dipendenti dal tempo :

$$u(0,t) = h_0(t); u(L,t) = h_L(t)$$
$$u(x,0) = u_0(x); u(0,0) = h_0(0); u_0(L) = h_L(0)$$

osserviamo che $w(x,t) = u(x,t) - (h_0(t) + \frac{x}{L}(h_L(t) - h_0(t)))$ soddisfa l'equazione non omogenea :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \dot{h_0} + \frac{x}{L}(\dot{h_L} - \dot{h_0}) = g(x,t)$$

con condizioni al contorno omogenee $w(0,t) = w(L,t) = 0$ e condizione iniziale

$$w(x,0) := w_0(x) = u_0 - (h_0(0) + \frac{x}{L}(h_l(0) - h_0(0)))$$

Risolviamo perciò l'equazione non omogenea per $w(x,t)$ e ricaviamo poi $u(x,t)$. Lo strumento è sempre la serie di Fourier :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) sin(\frac{n\pi x}{L})$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} - a^2(\frac{n\pi}{L})^2 w_n = g_n(t)$$

con:

$$\begin{aligned} g_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L dx \sin(\frac{n\pi x}{L}) g(x,t) \\ = \frac{2}{L}[\dot{h_0}\frac{L}{n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{1}{L}(\dot{h_L} - \dot{h_0})] \\ = \frac{L}{n\pi}[(-1)^n \dot{h_L} - \dot{h_0}] \end{aligned} \tag{33}$$

Si integrano perciò le equazioni non omogenee per $w_n(t)$ con le condizioni iniziali assegnate. Infine si ricostruisce $u(x,t)$.

2 Equazione delle onde

La propagazione di onde in un mezzo (omogeneo e isotropo) è descritta dall'equazione :

$$[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2]u = f(x, y, z, t) \tag{34}$$

L'operatore

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

è detto *D'Alembertiano* (o *"box"* nella terminologia americana) e l'equazione delle onde è storicamente nota come *equazione di D'Alembert*.

Naturalmente, posso assegnare diverse condizioni al contorno a seconda che si tratti il problema in un dominio spaziale limitato o illimitato.

Il metodo della trasformata di Fourier è utile per la soluzione del problema al valore iniziale in un dominio illimitato, l'intero spazio (uni, bi, o tri-dimensionale) sotto l'ipotesi di decrescenza abbastanza rapida all'infinito delle soluzioni.

Ovviamente, condizione necessaria perché ciò accada, è che tanto le condizioni iniziali, quanto il termine noto f godano di questa proprietà.

2.1 Funzione di Green

Data quindi l'equazione (34), facciamone la trasformata di Fourier spaziale, definendo come al solito:

$$\hat{u}(\overrightarrow{k}, t) = \int_{R^n} d\overrightarrow{x} u(\overrightarrow{x}, t) e^{-i\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{k}}$$

$$\hat{f}(\overrightarrow{k}, t) = \int_{R^n} d\overrightarrow{x} f(\overrightarrow{x}, t) e^{-i\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{k}}$$

Si ha quindi :

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u} - k^2\hat{u} = \hat{f}; \qquad (k^2 = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{k}) \tag{35}$$

La (35) è un equazione non omogenea del II ordine a coefficienti costanti, in t, che si può risolvere con il metodo della variazione delle costanti, oppure con il metodo della funzione di Green.

Se infatti consideriamo la soluzione fondamentale della (35)

$$[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2]G = \delta(t) \tag{36}$$

la soluzione di (36) sarà data, come al solito, dalla somma della soluzione generale dell'omogenea e di una soluzione particolare della non omogenea.

La soluzione generale dell'omogenea sarà:

$$\hat{G}_0(k,t) = A_+(k)e^{ikct} + A_-(k)e^{-ikct}; \qquad k = |\overrightarrow{k}| \tag{37}$$

mentre una soluzione particolare avrà la forma:

$$\hat{G}_p = \theta(t)\tilde{G}_0(k,t) \tag{38}$$

dove $\tilde{G}_0$ è la soluzione dell'omogenea che soddisfa le condizioni iniziali:

$$\tilde{G}_0(k,0) = 0, \qquad \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial t}(k,0) = 1,$$

e vale perciò:

$$\tilde{G}_0(k,t) = \frac{\sin(kct)}{kc} \tag{39}$$

La soluzione generale di (35) sarà quindi:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\overrightarrow{k},t) &= \int dt\prime \hat{G}(k,t-t\prime)\hat{f}(\overrightarrow{k},t\prime) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt\prime \hat{G}_0(k,t-t\prime)\hat{f}(\overrightarrow{k},t\prime) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} dt\prime\, \frac{\sin(kc[t-t\prime])}{kc}\hat{f}(\overrightarrow{k},t\prime) \end{aligned} \tag{40}$$

La soluzione $u(\overrightarrow{x},t)$ è ottenuta antitrasformando:

$$\begin{aligned} u(\overrightarrow{x},t) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n k e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}\hat{u}(\overrightarrow{k},t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)}^n \int dt\prime \int d^n k e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}\hat{G}_0(\overrightarrow{k},t-t\prime)\hat{f}(\overrightarrow{k},t\prime) \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^n}\int dt\prime \int d^n k e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}\frac{sin(kc[t-t\prime])}{kc}\hat{f}(\overrightarrow{k},t\prime). \end{aligned} \tag{41}$$

Ricordando le proprietà del prodotto di convoluzione otteniamo :

$$\begin{aligned} u(\overrightarrow{x},t) &= \int dt\prime \int d^n\overrightarrow{x} G_0(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}\prime,t-t\prime)f(\overrightarrow{x}\prime,t\prime) \\ &+ \int dt\prime \int d^n\overrightarrow{x} G_p(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}\prime,t-t\prime)f(\overrightarrow{x}\prime,t\prime) \end{aligned} \tag{42}$$

Dalla (38) otteniamo:

$$G_p(\overrightarrow{x},t) = \theta(t)\int d^n k e^{i\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{k}}\frac{\sin(kct)}{kc}$$

2.2 Calcolo esplicito delle soluzioni

Calcoliamo ora gli integrali precedenti per $n = 1, 2, 3$.

2.2.1 Caso uni-dimensionale

$$\begin{aligned}
G_p(x,t) &= \theta(t)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\sin(kct)}{kc}e^{ikx} \\
&= \theta(t)\frac{1}{2ic}P\int_{-\infty}^{+\infty} dk[\frac{e^{ik(x+ct)}}{k}-\frac{e^{ik(x-ct)}}{k}] \\
&= \frac{1}{2ic}i\pi[sgn(x+ct)-sgn(x-ct)] \\
&= \frac{\pi}{2c}\theta(c^2t^2-x^2)
\end{aligned} \tag{43}$$

2.2.2 Caso bi-dimensionale

$$\begin{aligned}
G_p(x,t) &= \theta(t)\int_{R^2} dk_1 dk_2 e^{i\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{k}}\frac{\sin(kct)}{kc} = \\
&= \theta(t)\int_0^\infty dk\int_{-\pi}^{\pi} d\theta k e^{ikr\cos\theta}\frac{\sin(kct)}{kc} \\
&= \theta(t)\frac{1}{c}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\theta}\sin kct \\
&= \theta(t)\frac{1}{c}\int 0^\infty dk\sin(kct)J_0(kr) \\
&= \theta(t)\frac{1}{c}\frac{\theta(c^2t^2-r^2)}{(c^2t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{44}$$

La soluzione generale sarà quindi :

$$\begin{aligned}
u(\overrightarrow{x},t) &= \int_{R^2} d\overrightarrow{x}\prime\int_{-\infty}^{+\infty} dt\prime G_0(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}\prime, t-t\prime)f(\overrightarrow{x}\prime,t\prime) \\
&+ \frac{1}{c}\int_{R^2} d\overrightarrow{x}\prime\int_{-\infty}^{t} dt\prime\frac{\theta(c^2(t-t')^2-|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}\prime|^2)}{\sqrt{c^2(t-t')^2-|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}\prime|^2}}f(\overrightarrow{x}\prime,t\prime)
\end{aligned} \tag{45}$$

Le condizioni iniziali determinano le due funzioni arbitrarie contenute nella soluzione generale dell'omogenea.

2.2.3 Caso tri-dimensionale

Scriviamo la soluzione particolare :

$$\begin{aligned}
G_p(\overrightarrow{x}, t) &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{k}} \frac{\sin kct}{kc} \\
&= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^{+1} d\mu e^{ikx\mu} \frac{\sin kct}{kc} \\
&= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{2i \sin kr}{ik} \frac{\sin kct}{kc} \\
&= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \sin kr \sin kct \\
&= \frac{\theta(t)}{4\pi^2 c} \int_0^\infty dk \cos k(r-ct) - \cos k(r+ct) \\
&= \frac{\theta(t)}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \cos k(r-ct) - \cos k(r+ct) \\
&= \frac{\theta(t)}{4\pi^2 c} [\delta(r-ct) - \delta(r+ct)] \\
&= \frac{\theta(t)}{4\pi^2 c} \delta(r-ct) \qquad (46)
\end{aligned}$$

3 Equazione di Poisson

L'equazione di Poisson collega, come è noto, il potenziale (elettrostatico o gravitazionale) alla carica o alla massa che lo genera:

$$\nabla^2 V = \rho \tag{47}$$

La soluzione generale di (47) è data dalla somma di una qualsiasi funzione armonica (che soddisfa cioè $\nabla^2 V = 0$) e di una soluzione particolare della non-omogenea.

3.1 Caso unidimensionale

Usiamo ancora la teoria della trasformata di Fourier e della funzione di Green per determinare la soluzione particolare della non omogenea. Ovviamente, la funzione di Green (o soluzione fondamentale) soddisfa la:

$$G'' = \delta(x)$$

whence:

$$-k^2 \hat{G}_p = 1; \qquad \hat{G}_p = -\frac{1}{k^2} \tag{48}$$

$$\hat{G}_p = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{ikx}}{k^2} \tag{49}$$

Poiché $\frac{1}{k^2}$ non è integrabile in 0, dobbiamo interpretare la soluzione.

Possiamo infatti considerare il limite per $\epsilon \to 0$ di un polo doppio nel semipiano superiore (cioè $\frac{1}{(k-i\epsilon)^2}$) o nel semipiano inferiore (cioè $\frac{1}{(k+i\epsilon)^2}$).
I caso :

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{ikx}}{(k - i\epsilon)^2}$$

per $x > 0$ si può chiudere nel semipiano superiore e si ottiene:

$$\begin{aligned} lim_{\epsilon \to 0} - \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i Res_{(k=i\epsilon)} \frac{e^{ikx}}{(k - i\epsilon)^2} &= -i \frac{\partial}{\partial k} e^{ikx}|_{k=i\epsilon} \\ &= +xe^{-\epsilon}|_{\epsilon=0} \\ &= x \end{aligned} \tag{50}$$

Per $x < 0$ si chiude nel semipiano inferiore e si ottiene 0.

La soluzione è quindi data da:

$$G_+(x) = x\theta(x). \tag{51}$$

II caso:
Possiamo effettuare una trattazione analoga alla precedente, per ottenere :

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{ikx}}{(k+i\epsilon)^2} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{se } x > 0 \\ G_-(x) = -x\theta(-x) & \text{se } x < 0 \end{array} \right\}$$

La soluzione globale può quindi essere scritta come:

$$G_\pm(x) = |x|\theta(\pm x) \tag{52}$$

Le funzioni hanno derivata discontinua nell'origine. La loro derivata vale

$$\frac{\partial G_+}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial G_-}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{array} \right\}$$

Stiamo quindi descrivendo il potenziale ed il campo elettrico generati da uno *strato*.

3.2 Caso bidimensionale

Per la risoluzione del caso in due dimensioni, utilizziamo una tecnica diversa, che sfrutta le proprietà delle funzioni armoniche e delle funzioni analitiche. Riscriviamo

$$z = x + iy; \quad \bar{z} = x - iy; \qquad x = \frac{z+\bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$dz \wedge d\bar{z} \;=\; -2idx \wedge dy$$

$$\partial_z = \frac{1}{2}\partial_x - \frac{i}{2}\partial_y; \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\partial_x + \frac{i}{2}\partial_y$$

$$\partial_{\bar{z}}\partial_z = \partial_z\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4}(\partial_{x^2} + \partial_{y^2})$$

Riscriviamo quindi l'equazione di Poisson per la soluzione fondamentale come:

$$\nabla^2 G = \delta(x)\delta(y) \quad \Rightarrow \quad \partial_z\partial_{\bar{z}}G = \frac{1}{2i}\delta(z)\delta(\bar{z}) \tag{53}$$

Scrivo quindi $\partial_{\bar{z}}(\frac{\partial G}{\partial z}) = 4ig\delta(z)\delta(\bar{z})$

Osserviamo che la funzione $\frac{1}{z}$ è analitica $\forall z \neq 0$ quindi $\partial_{\bar{z}} \frac{1}{z} = 0$ per $z \neq 0$
Inoltre :

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

per un qualunque cammino chiuso contenente il punto z_0. Dal lemma di Green nel piano sappiamo che:

$$\int_S dxdy(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}) = \oint_C Pdx - Qdy \tag{54}$$

Considero quindi l'integrale

$$\frac{i}{2} \int_s dz \wedge d\bar{z} \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \tag{55}$$

poichè valgono le relazioni:

$$dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \quad f = P + iQ$$

e :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(P + iQ) \\ &= \frac{1}{2}(P_x - Q_y) + i(P_y + Q_x) \end{aligned}$$

posso riscrivere la (55) come:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S dx \wedge dy[(P_x - Q_y) + i(P_y + Q_x)] &= \frac{1}{2} \oint_C (Pdy + Qdx) + i(Pdx - Qdy) = \\ &= \frac{i}{2} \oint f(z)dz \end{aligned} \tag{56}$$

Ho dimostrato quindi che vale la seguente relazione:

$$\int_s dz \wedge d\bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \oint f(z)dz \tag{57}$$

che mi permette di scrivere, sostituendo la funzione di Green :

$$\int_s dz \wedge d\bar{z} \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z} \partial z} = \oint \frac{\partial G(z)}{\partial z} dz = \frac{1}{2i} \tag{58}$$

Quindi :

$$\frac{\partial G(z)}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi z} \tag{59}$$

$$G(z) = G_0 - \frac{1}{4\pi} log z \tag{60}$$

$$Re[G(z)] = -\frac{1}{4\pi} log(r); \qquad Im[G(z)] = -\frac{1}{4\pi} arg(z) = -\frac{1}{4\pi}\theta \quad (mod 2\pi)$$

3.3 Caso tridimensionale

Per concludere, risolviamo l'equazione di Poisson in tre dimensioni, passando in coordinate sferiche ed utilizzando il metodo della funzione di Green e della trasformata di Fourier.
Cerchiamo quindi soluzioni dell'equazione :

$$\nabla^2 G = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{61}$$

Trasformiamo :

$$\begin{aligned} \hat{G} &= -\frac{1}{k^2} = \\ G &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

passo in coordinate sferiche :

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{k^2} \int_{-1}^{+1} d\mu e^{ikr\mu} = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{2i \sin kr}{ikr} = \\ &= -2\frac{1}{4\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{k} \end{aligned}$$

l'integrale vale $\pi/2$, otteniamo quindi

$$G = -\frac{1}{4\pi r} \tag{62}$$

che è la forma ben nota dei potenziali Coulombiano e Newtoniano.