Trasmissione e riflessione di onde piane da strato dielettrico

Corso di Ottica - Massimo Santarsiero

Consideriamo un'onda e.m. piana armonica, di pulsazione ω_i, che incide con vettore d'onda $\mathbf{k}_1$ su uno strato dielettrico di materiale avente indice di rifrazione n_2. Gli indici di rifrazione del primo e del terzo mezzo (n_1 e n_3, rispettivamente) sono supposti, in generale, diversi tra loro e diversi da n_2. Tutti i mezzi sono supposti isotropi, lineari e omogenei.

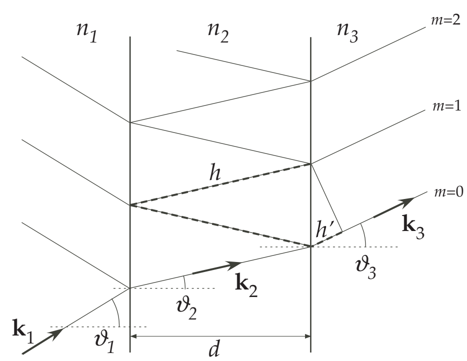

Figure 1: Riflessioni multiple di un'onda piana da strato dielettrico

Per quanto visto a proposito della trasmissione da interfaccia dielettrica, la pulsazione della radiazione è la stessa nei tre mezzi, per cui le seguenti relazioni valgono tra i numeri d'onda nei tre mezzi:

$$\frac{k_1}{n_1} = \frac{k_2}{n_2} = \frac{k_3}{n_3} = k_0 \ , \tag{1}$$

dove $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, e λ_0 è la lunghezza d'onda nel vuoto. Inoltre, dalle leggi di Snell segue che deve valere

$$n_1 \sin\vartheta_1 = n_2 \sin\vartheta_2 = n_3 \sin\vartheta_3 \ , \tag{2}$$

dovendosi conservare, ad ogni interfaccia, la componente trasversale del vettore d'onda.

Le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa dallo strato possono essere calcolate valutando l'interferenza tra le infinite onde piane prodotte dalle riflessioni multiple sulle superfici di separazione tra i mezzi. In particolare, qui ci limiteremo a studiare nel dettaglio l'espressione dell'onda trasmessa nel mezzo 3, nel caso di polarizzazione E (campo elettrico parallelo alle superfici). La stessa tecnica può tuttavia essere utilizzata anche per la polarizzazione H, e anche per il calcolo dell'onda riflessa (nel mezzo 1).

Indichiamo con r_{ij} e t_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ i coefficienti di riflessione e di trasmissione per un'onda proveniente dal mezzo i e incidente sul mezzo j. Come sappiamo, valgono le seguenti relazioni:

$$r_{ij} = \frac{1 - \xi_{ij}}{1 + \xi_{ij}} = -r_{ji} \; ; \qquad t_{ij} = \frac{2}{1 + \xi_{ij}} = \xi_{ji} \, t_{ji} \; , \tag{3}$$

con

$$\xi_{ij} = \frac{n_j \cos\theta_j}{n_i \cos\theta_i}, \tag{4}$$

dalle quali si ricava, inoltre,

$$t_{ij} = 1 + r_{ij} \; . \tag{5}$$

Valutiamo quindi le ampiezze delle varie onde trasmesse nel mezzo 3, dovute alle riflessioni sulle superfici dello strato. La prima di tali onde (indicata con l'indice $m = 0$) viene semplicemente trasmessa dalle due superfici e pertanto all'uscita avrà campo elettrico di ampiezza pari a

$$E_t^{(0)} = E_i \, t_{12} t_{23} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \; , \tag{6}$$

dove E_i è il campo elettrico dell'onda incidente, e si propagherà lungo la direzione individuata dall'angolo ϑ_3. L'angolo φ indica lo sfasamento che l'onda subisce per effetto della propagazione all'interno dello strato e verrà calcolato più avanti.

La seconda delle onde piane trasmesse $(m = 1)$ subirà, in più, la riflessione dalle due superfici dello strato e quindi la sua ampiezza risulterà moltiplicata anche per il fattore $(r_{23} r_{21})$. Inoltre, tale onda avrà percorso un cammino differente rispetto alla prima e quindi risulterà sfasata, rispetto a questa, della quantità 2φ. In definitiva:

$$E_t^{(1)} = E_i \, t_{12} t_{23} (r_{23} r_{21}) \, e^{\mathrm{i}\, 3\varphi} \; . \tag{7}$$

Il processo si ripete e la terza onda piana avrà ampiezza pari a

$$E_t^{(2)} = E_i\, t_{12} t_{23} (r_{23} r_{21})^2\, e^{\mathrm{i}\, 5\varphi}\ , \tag{8}$$

mentre, dopo l'm-esima doppia riflessione, l'ampiezza sarà

$$E_t^{(m)} = E_i\, t_{12} t_{23} (r_{23} r_{21})^m\, e^{\mathrm{i}\,(2m+1)\varphi}\ . \tag{9}$$

In definitiva, l'ampiezza dell'onda trasmessa, data dalla somma di tutte queste onde successive, risulta

$$E_t = E_i\, t_{12} t_{23}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(r_{23} r_{21} e^{\mathrm{i}\,2\varphi} \right)^m = E_i\, \frac{t_{12} t_{23}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{1 - r_{23} r_{21}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}}, \tag{10}$$

che, con le Eqq. (3) e (5), fornisce

$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{(1 + r_{12})(1 + r_{23})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{1 + r_{12} r_{23}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}}. \tag{11}$$

Nel ricavare l'Eq. (10) si è utilizzata la relazione

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1 - z} \qquad (|z| < 1)\,. \tag{12}$$

Volendo esprimere la (11) mediante i parametri ξ_{ij}, utilizzando l'Eq. (3) otteniamo, dopo semplici passaggi,

$$t = \frac{4}{(1 + \xi_{12})(1 + \xi_{23}) e^{-\mathrm{i}\varphi} + (1 - \xi_{12})(1 - \xi_{23}) e^{\mathrm{i}\varphi}}. \tag{13}$$

Vediamo infine come ricavare l'espressione dello sfasamento φ. Una maniera consiste nel calcolare la differenza di cammino ottico tra l'onda trasmessa di ordine 1 e quella di ordine 0. Facendo riferimento ancora alla Fig. 1, si tratta di valutare la differenza tra la lunghezza del percorso compiuto all'interno del mezzo 2 (pari a $2h$), moltiplicata per k_2, e quello del percorso compiuto nel mezzo 3 (indicato con h'), moltiplicata per k_3. I due percorsi sono tratteggiati, in figura. Quindi si ha

$$\begin{aligned} 2\,\varphi = {} & 2h\, n_2\, k_0 - h'\, n_3\, k_0 = \\ = {} & 2h\, n_2\, k_0 - 2h\, n_3\, k_0\, \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 = \\ = {} & 2h\, n_2\, k_0 - 2h\, n_2\, k_0\, \sin^2\vartheta_2 = \\ = {} & 2h\, n_2\, k_0\, \cos^2\vartheta_2 = \\ = {} & 2d\, n_2\, k_0\, \cos\vartheta_2, \end{aligned} \tag{14}$$

per cui

$$\varphi = d\, n_2\, k_0\, \cos\vartheta_2. \tag{15}$$

Notiamo che allo stesso risultato si giunge direttamente calcolando lo sfasamento di un'onda piana, avente vettore d'onda di modulo $k_2 = n_2 k_0$ e diretto lungo una direzione individuata dall'angolo ϑ_2 rispetto all'asse z, che si propaga per un tratto di lunghezza d lungo l'asse z:

$$\varphi = k_{2z} d = k_2 d\, \cos\vartheta_2 = n_2 k_0 d\, \cos\vartheta_2. \tag{16}$$

Procedendo in maniera analoga, si può ottenere il coefficiente di riflessione. Innanzitutto, nel campo riflesso sarà presente la prima onda riflessa dalla prima interfaccia, data semplicemente da $r_{12}E_i$. Tale contributo lo considereremo separatamente, rispetto a tutti gli altri. Per ottenere la prima della serie di onde ottenute per riflessioni multiple, bisogna considerare la trasmissione nella prima interfaccia, la riflessione dalla seconda, ed infine ancora la trasmissione dalla prima. Naturalmente, dovrà essere introdotto lo sfasamento subito dall'onda nel suo percorso. In definitiva, si ha

$$E_r^{(0)} = E_i\, t_{12} r_{23} t_{21}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}\ . \tag{17}$$

Il contributo successivo dovà contenere un'ulteriore riflessione su entrambe le interfacce e un ulteriore sfasamento, per cui

$$E_r^{(1)} = E_i\, t_{12} r_{23} t_{21}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}\ r_{21} r_{23}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}\ , \tag{18}$$

e cosí via, fino all'm-esimo, che sarà della forma

$$E_r^{(n)} = E_i\, t_{12} r_{23} t_{21}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}\ (r_{21} r_{23})^m\, e^{\mathrm{i}\,2m\varphi}\ . \tag{19}$$

Il campo riflesso totale sarà quindi espresso come

$$\begin{aligned} E_r &= E_i \left[r_{12} + t_{12} r_{23} t_{21}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(r_{21} r_{23} e^{\mathrm{i}\,2\varphi} \right)^m \right] \\ &= E_i \left(r_{12} + \frac{t_{12} r_{23} t_{21}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}}{1 - r_{21} r_{23}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}} \right)\ , \end{aligned} \tag{20}$$

avendo ancora usato il risultato in eq. (12).

Questa espressione puó essere semplificata ricordando che

$$r_{21} = -r_{12}, \tag{21}$$

e che

$$t_{12}t_{21} = (1 + r_{12})(1 + r_{21}) = (1 + r_{12})(1 - r_{12}) = 1 - r_{12}^2 \ , \tag{22}$$

ottenendo

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{r_{12} + r_{23}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}}{1 + r_{12}r_{23}\, e^{\mathrm{i}\,2\varphi}} \ . \tag{23}$$

Espresso attraverso i parametri ξ_{ij}, questo coefficiente di riflessione risulta

$$r = \frac{(1 - \xi_{12})(1 + \xi_{23})e^{-\mathrm{i}\varphi} + (1 + \xi_{12})(1 - \xi_{23})e^{\mathrm{i}\varphi}}{(1 + \xi_{12})(1 + \xi_{23})e^{-\mathrm{i}\varphi} + (1 - \xi_{12})(1 - \xi_{23})e^{\mathrm{i}\varphi}}. \tag{24}$$