Trasporto di energia in onde e.m. piane omogenee e evanescenti

Corso di Ottica - Massimo Santarsiero

Come è noto, il trasporto di energia da parte di un'onda e.m. è tenuto in conto dal vettore di Poynting

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{R}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} \ , \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ e $\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$ sono i campi elettrico e magnetico reali. Esso misura l'energia nell'unità di tempo (e quindi la potenza) che fluisce attraverso una superficie unitaria disposta perpendicolarmente al vettore stesso. Tale potenza per unità di superficie è indicata con il termine di *intensità*. Poiché $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ e $\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}$ dipendono dal tempo, anche $\boldsymbol{S}$ dipende dal tempo.

Vediamo come questa espressione si traduce nel caso in cui si tratti di onde monocromatiche di pulsazione ω e si utilizzi il formalismo complesso per rappresentare i campi. Definiamo le quantità complesse $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ tali che

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}} = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}\, e^{-\mathrm{i}\omega t}\right] \ , \qquad \boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{H}\, e^{-\mathrm{i}\omega t}\right] \ , \tag{2}$$

e calcoliamo il vettore di Poynting (4):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}(t) = \ & \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}\, e^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{E}^*\, e^{\mathrm{i}\omega t}\right) \times \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H}\, e^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{H}^*\, e^{\mathrm{i}\omega t}\right) \\ = \ & \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\, e^{-2\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}^*\, e^{2\mathrm{i}\omega t}\right) + \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* + \boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}\right) \\ = \ & \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\, e^{-2\mathrm{i}\omega t}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\right] \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Il primo termine della somma oscilla nel tempo con pulsazione 2ω, mentre il secondo è costante (almeno fintanto che la ampiezze dei campi sono costanti). Se l'intensità viene rivelata con uno strumento che ha tempi di risposta maggiori di π/ω, come avviene sempre nel caso di radiazione luminosa, ciò che può essere misurato è soltanto il valore medio di $\boldsymbol{S}(t)$, che coincide con il secondo termine della somma, cioè

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \right] \ , \tag{4}$$

che fornisce la direzione lungo cui si propaga l'energia e il valore misurabile dell'intensità luminosa.

Nel caso di onde piane omogenee, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ sono perpendicolari tra loro ed entrambi sono perpendicolari al vettore d'onda $\mathbf{k}$. Inoltre, $H = E/Z$, con $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ impedenza caratteristica del mezzo in cui si propaga l'onda, e i due campi sono in fase tra loro. Pertanto, il vettore di Poynting è diretto come $\mathbf{k}$ e l'intensità media dell'onda è $E^2/2Z$.

Viceversa, non è immediato capire come vadano le cose nel caso di un'onda piana non omogenea. Partendo quindi dall'espressione del campo elettrico di un'onda evanescente, calcoleremo il corrispondente campo magnetico e ricaveremo il valore del vettore di Poynting medio risultante. Naturalmente la stessa procedura può essere seguita per l'analogo calcolo nel caso di onde omogenee, e lo studente è invitato a farlo.

Consideriamo un'onda e.m. piana che abbia, sul piano $z = 0$ di un opportuno sistema di riferimento, il campo elettrico

$$\boldsymbol{E}(x, y, 0) = E_0 \, e^{\mathrm{i} k_x x} \, \hat{y} \ . \tag{5}$$

Se $k_x > k$, la sua espressione in propagazione risulta

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = E_0 \, e^{\mathrm{i} k_x x} \, e^{-\alpha z} \, \hat{y} \ , \tag{6}$$

con $\alpha = \sqrt{k_x^2 - k^2}$ costante reale e positiva, per cui la sua ampiezza si attenua esponenzialmente all'aumentare di z.

Il corrispondente campo magnetico può essere calcolato dalla legge di Faraday come

$$\boldsymbol{H} = \frac{\nabla \times \boldsymbol{E}}{\mathrm{i}\omega\mu} = ... = \frac{E_0}{\omega\mu} \left(-\mathrm{i} \, \alpha \, \hat{x} + k_x \, \hat{z} \right) \, e^{\mathrm{i} k_x x} \, e^{-\alpha z} \ , \tag{7}$$

da cui

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* = ... = \frac{|E_0|^2}{\omega\mu} \left(k_x \, \hat{x} - \mathrm{i} \, \alpha \, \hat{z} \right) \, e^{-2\alpha z} \ . \tag{8}$$

Il vettore di Poynting medio quindi risulta, dalla (4),

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{k_x |E_0|^2}{2\omega\mu} \, e^{-2\alpha z} \, \hat{x} \ . \tag{9}$$

e indica un trasferimento di energia nella direzione dell'asse x, cioè parallelamente alla superficie $z = 0$, con densità di potenza che diminuisce esponenzialmente allontanandosi da essa, e diventa trascurabile quando $z \gg 1/2\alpha$.