

# Olografia sintetica

Corso di Ottica - Massimo Santarsiero

Nell'olografia tradizionale, un campo luminoso viene registrato su un supporto fotografico (p.es., una lastra). Tale campo può essere successivamente riprodotto illuminando opportunamente la lastra sviluppata (l'ologramma). A differenza delle tecniche fotografiche, l'olografia consente la *completa* ricostruzione del campo, cioè sia della sua ampiezza che della sua fase. L'informazione sulla fase è codificata nella figura di interferenza che si crea sovrapponendo il campo in questione con un opportuno campo di riferimento, che tipicamente è un'onda piana o, più in generale, un'onda sferica.

L'olografia può però anche essere utilizzata per sintetizzare campi luminosi che non si hanno fisicamente a disposizione, per esempio, perché questi non possono essere realizzati con tecniche convenzionali o perché le tecniche per realizzarli sono troppo onerose. In alcuni casi, infatti, è possibile calcolare la funzione di trasmissione di un ologramma che, illuminato da un campo di riferimento, dia origine al campo desiderato. In questi casi si parla di *ologrammi sintetici*, o di CGH (*computer generated holograms*). La funzione di trasmissione così ottenuta può essere implementata su una lastra fotografica o, utilizzando strumenti più moderni, sui cosiddetti *spatial light modulators* (SLM), indirizzabili elettronicamente, che consentono di modificare i valori di un campo incidente su una matrice di punti, tipicamente con la risoluzione di un monitor di computer, su un'area dell'ordine del centimetro quadrato. Gli SLM sono spesso basati sulla tecnologia degli schermi a cristalli liquidi e consentono facilmente di variare l'intensità o la fase del campo incidente (modificare simultaneamente intensità e fase risulta ancora piuttosto problematico). Vediamo qui due esempi di come possa essere progettato un ologramma sintetico.

Nel primo caso, seguendo esattamente il procedimento dell'olografia tradizionale, si calcola la figura di intensità che si avrebbe dall'interferenza del campo desiderato con un campo di riferimento. Tale figura può essere trasferita su un SLM di intensità o, più semplicemente, prendendo una fotografia (analogica) di un monitor su cui sia stata visualizzata la figura, e utilizzando il negativo impressionato come ologramma.

Chiamiamo  $V_s(\mathbf{r})$  il campo da sintetizzare e immaginiamo di far interferire questo campo con un'onda piana avete ampiezza reale  $A$  e vettore d'onda giacente nel piano

$(x, z)$ , con componente  $x$  pari a  $k_x$ . L'intensità della figura di interferenza sarà quindi pari a

$$I(\mathbf{r}) = |V_s(\mathbf{r}) + Ae^{ik_x x}|^2 = |V_s(\mathbf{r})|^2 + A^2 + AV_s^*(\mathbf{r})e^{ik_x x} + AV_s(\mathbf{r})e^{-ik_x x}. \quad (1)$$

Realizzando una trasparenza (di *sola ampiezza*) con funzione di trasmissione proporzionale a questa intensità e illuminandola con la stessa onda piana utilizzata come riferimento, il campo emergente dalla trasparenza risulterà del tipo

$$V_e(\mathbf{r}) \propto I(\mathbf{r})e^{ik_x x} = (|V_s(\mathbf{r})|^2 + A^2)e^{ik_x x} + AV_s^*(\mathbf{r})e^{2ik_x x} + AV_s(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Si vede quindi che uno dei contributi al campo emergente dalla trasparenza (l'ultimo nella somma) è proporzionale a  $V_s(\mathbf{r})$ . Inoltre, gli altri due contributi si propagano lungo direzioni medie differenti, per cui, scegliendo opportunamente il valore di  $k_x$  è possibile far sì che i diversi contributi siano separati spazialmente.

Un esempio è mostrato in Fig. 1, dove sono visualizzati i profili d'intensità dei fasci di Bessel di ordine 0, 1 e 2 (sopra) e le loro figure d'interferenza con un'onda piana inclinata (sotto).

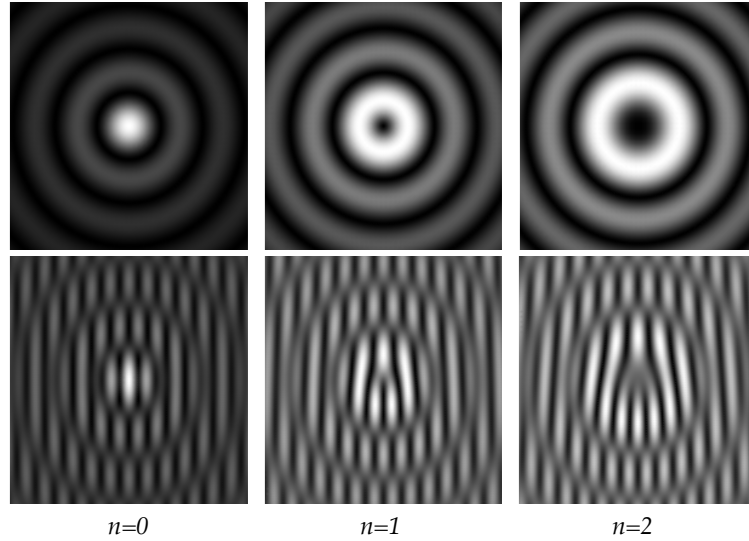


Figure 1: Profili d'intensità di fasci di Bessel (sopra) e loro figure d'interferenza con un'onda piana inclinata (sotto), per  $n = 0, 1, 2$ .

I fasci di Bessel hanno un'ampiezza sul piano trasverso del tipo

$$B_n(\mathbf{r}) = A_n J_n(\beta r) e^{in\vartheta}, \quad (3)$$

dove  $(r, \vartheta)$  sono le coordinate polari nel piano,  $A_n$  è un fattore di ampiezza costante,  $J_n$  è la funzione di Bessel di prima specie di ordine  $n$ , e  $\beta$  è una costante positiva. Essi presentano quindi, per  $n \neq 0$ , un profilo di fase a spirale. Questo, che naturalmente non si può vedere nei profili d'intensità dei fasci stessi, è messo in evidenza dalla particolare forma delle frange di interferenza intorno al punto centrale della figura (si parla di *dislocazioni*). Profili di questo tipo non sono facilmente realizzabili con tecniche che non siano olografiche. Si noti che anche nel caso  $n = 0$  il campo, pur non presentando un profilo di fase a spirale, non è una quantità sempre positiva, per cui non può essere realizzato semplicemente modulando l'ampiezza di un'onda piana mediante una trasparenza di sola ampiezza. Infatti, la funzione  $J_0$  presenta alternativamente lobi positivi e negativi. Anche in questo caso l'informazione sul segno della funzione di Bessel viene codificata dalla figura di interferenza: l'alternanza di segno tra un lobo e il successivo è messa in evidenza dal fatto che le frange risultano traslate di mezzo periodo passando da un anello al successivo.

Vediamo ora il secondo esempio. Si tratta di realizzare un ologramma di *sola fase*, per sintetizzare il campo desiderato  $V_s$ . Ci limitiamo, per semplicità di notazione, a considerare campi dipendenti da una sola coordinata trasversale ( $x$ ), ma tutto quello che diremo vale anche per campi dipendenti da due coordinate trasversali. Inoltre, indichiamo con  $A_s$  e con  $\varphi$ , rispettivamente, l'intensità e la fase del campo  $V_s$ .

Ricapitolando, vogliamo sintetizzare il campo

$$V_s(x) = A_s(x) e^{i\varphi(x)} , \quad (4)$$

mediante un ologramma avente funzione di trasmissione

$$\tau(x) = e^{i\psi(x)} , \quad (5)$$

essendo la fase  $\psi$  da determinare. Dal punto di vista formale, conviene considerare questa fase come una funzione dei valori dell'ampiezza e della fase di  $V_s$  in ciascun punto, per cui potremo scrivere

$$\tau(x) = e^{i\psi(A_s, \varphi)} , \quad (6)$$

in cui è stata lasciata implicita la dipendenza di  $A_s$  e  $\varphi$  da  $x$ . Facciamo questo perché, essendo la funzione  $\tau$  periodica rispetto a  $\varphi$  con periodo  $2\pi$ , essa può essere espressa attraverso la serie di Fourier

$$\tau(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(A_s) e^{in\varphi} , \quad (7)$$

dove i coefficienti di Fourier, che dipendono da  $A_s$ , sono definiti come

$$c_n(A_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\psi(A_s, \varphi)} e^{-in\varphi} d\varphi . \quad (8)$$

Concentriamoci ora sul termine di ordine 1 (diciamo,  $\tau_1$ ) della serie nell'Eq. (7). Scegliendo opportunamente la funzione  $\psi$ , possiamo fare in modo che sia

$$c_1(A_s) = \alpha A_s , \quad (9)$$

dove  $\alpha$  è una costante di proporzionalità, per cui

$$\tau_1(x) = \alpha A_s e^{in\varphi} = \alpha V_s(x) , \quad (10)$$

e quindi uno dei termini della serie nell'Eq. (7) risulta proporzionale a  $V_s$ . Illuminando l'ologramma con un'onda piana, il campo emergente risulterà costituito dalla somma di diversi campi, uno dei quali proporzionale al campo che vogliamo sintetizzare. Vedremo in seguito come isolare questo campo dagli altri.

Per far sì che la condizione (9) sia verificata, dobbiamo richiedere che la funzione  $\psi(A_s, \varphi)$  sia tale che

$$c_1(A_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\psi(A_s, \varphi)} e^{-i\varphi} d\varphi = \alpha A_s . \quad (11)$$

Prendiamo, per esempio, per  $\psi$  la forma fattorizzata

$$\psi(A_s, \varphi) = f(A_s) \varphi , \quad (12)$$

dove  $f$  è una funzione da determinare. Con questa scelta della funzione  $\psi$ , l'integrale (11) si calcola facilmente come

$$c_1(A_s) = \text{sinc} [f(A_s) - 1] , \quad (13)$$

per cui la funzione  $f$  risulta determinata dalla relazione

$$\text{sinc} [f(A_s) - 1] = \alpha A_s . \quad (14)$$

Questa equazione può essere invertita numericamente e, per ogni valore di  $A_s$ , fornisce il corrispondente valore di  $f(A_s)$ . La costante  $\alpha$ , arbitraria, deve essere scelta in modo tale che il prodotto  $\alpha A_s$  non ecceda l'unità per qualsiasi valore di  $x$ . L'andamento di  $f(A_s)$  in funzione di  $A_s$  (con  $\alpha = 1$ ), è mostrato in Fig. 2. In

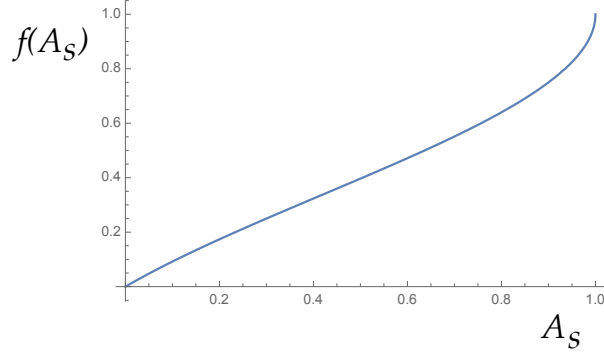


Figure 2: Andamento di  $f(A_s)$  in funzione di  $A_s$ , ottenuto invertendo numericamente la relazione (14), con  $\alpha = 1$ .

definitiva, mediante il grafico di Fig. 2 e l'Eq. (12), si può determinare il valore di  $\psi$  per ogni coppia di valori di  $A_s$  e  $\varphi$ .

Veniamo ora al problema della sovrapposizione spaziale dei termini che costituiscono il campo emergente dall'ologramma, quando su questo viene fatta incidere un'onda piana. Per separare i diversi contributi, si può procedere in maniera analoga a quanto si fa per passare dalla configurazione di olografia *in asse* a quella di olografia *fuori asse*. La procedura è equivalente a sottrarre una portante alla fase del campo da sintetizzare: invece della fase  $\varphi(x)$ , cerchiamo l'ologramma capace di sintetizzare la fase  $\varphi'(x) = \varphi(x) - 2\pi\nu_0x$ , dove  $\nu_0$  è la frequenza spaziale della portante. La funzione di trasmissione dell'ologramma diventa quindi, come per la (6),

$$\tau'(x) = e^{i\psi(A_s, \varphi')} . \quad (15)$$

Seguendo lo stesso procedimento analitico adottato in precedenza, si sviluppa  $\tau'$  in serie di Fourier rispetto alla variabile  $\varphi'$  e si ottiene

$$\tau'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(A_s) e^{in\varphi'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(A_s) e^{in\varphi} e^{-i2\pi n\nu_0x} . \quad (16)$$

A differenza del caso precedente, adesso ogni termine dello sviluppo di Fourier risulta moltiplicato per un termine di tipo *prisma*, cioè  $\exp(i2\pi n\nu_0x)$ , diverso per ciascun valore di  $n$ . Pertanto, realizzando una trasparenza con funzione di trasmissione  $\tau'$  e illuminandola con un'onda piana inclinata, avente  $k_x = 2\pi\nu_0$ , il campo emergente dalla trasparenza risulterà

$$V_e(x) \propto \tau'(x) e^{i2\pi\nu_0x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(A_s) e^{in\varphi} e^{-i2\pi(n-1)\nu_0x} . \quad (17)$$

Esso è quindi costituito da un insieme di campi, ciascuno dei quali si propaga lungo una direzione diversa, dipendente dall'indice  $n$ . Se la condizione (9) è soddisfatta, il termine della serie corrispondente a  $n = 1$ , ossia

$$V_1(x) \propto A_s(x) e^{i\varphi(x)} = V_s(x) , \quad (18)$$

fornisce il campo da sintetizzare. Gli altri contributi, viceversa, si propagano lungo direzioni individuate dal valore di  $\nu_0$  e da  $n$  [precisamente, ad angoli  $\vartheta_n$  rispetto all'asse  $z$  tali che  $\sin \vartheta_n = \lambda(n - 1)\nu_0$ ].

E' facilmente comprensibile come tutti i termini indesiderati possano essere eliminati per mezzo di un elaboratore ottico  $4f$ , come quello mostrato in figura 3. Nel

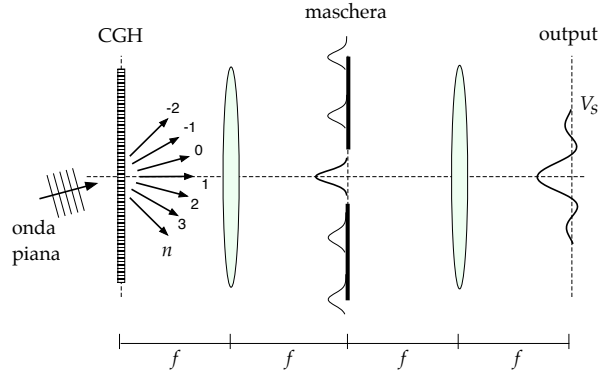


Figure 3: Schema di elaboratore ottico  $4f$  per isolare il termine corrispondente al campo che si vuole sintetizzare.

piano focale comune delle due lenti è posta una maschera, con un'apertura che lascia passare solo il termine corrispondente a  $n = 1$ , bloccando tutti gli altri. Sul piano di uscita dell'elaboratore sarà quindi presente il campo desiderato  $V_s$ . Naturalmente il valore di  $\nu_0$ , così come quello della larghezza dell'apertura, vanno determinati in base alla larghezza dello spettro di  $V_s$ .