

# Trasmissione e riflessione di onde piane da multistrato dielettrico

Corso di Ottica - Massimo Santarsiero

## 1 Teoria

Consideriamo un'onda e.m. piana armonica, di pulsazione  $\omega$ , che incide con vettore d'onda  $\mathbf{k}_a^{(1)}$  su una struttura, costituita da una serie di strati dielettrici piani, come mostrato in figura 1. I diversi strati sono individuati dall'indice  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N + 1$ , essendo  $N$  il numero totale di superfici di separazione). Indicheremo quindi con  $n_j$  l'indice di rifrazione del  $j$ -esimo strato e con  $z = z_j$  il piano di separazione tra lo strato  $j$  e lo strato  $j + 1$ . Come sarà più chiaro in seguito, porremo convenzionalmente  $z_{N+1} = z_N$ .

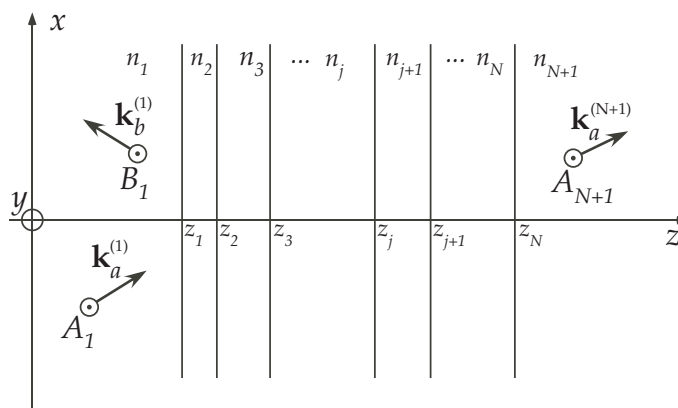


Figure 1: Riflessione e trasmissione di un'onda piana da un multistrato dielettrico

Supporremo che il campo elettrico dell'onda piana incidente sia diretto come l'asse  $y$  in figura e che sia quindi ortogonale al piano d'incidenza (polarizzazione E). Una trattazione analoga può essere sviluppata anche per il caso di polarizzazione H. Indichiamo con  $A_1$  l'ampiezza del campo elettrico

dell'onda incidente e con  $B_1$  l'ampiezza del campo elettrico dell'onda riflessa dalla struttura (entrambe le onde viaggiano nel mezzo 1). Nell'ultimo mezzo ( $j = N + 1$ ) sarà presente solo l'onda trasmessa, di ampiezza  $A_{N+1}$ . Ci proponiamo di calcolare, per assegnati valori degli indici di rifrazione  $n_j$  e delle coordinate  $z_j$ , i valori dei coefficienti di riflessione e di trasmissione della struttura, cioè, rispettivamente,

$$r = \frac{B_1}{A_1} ; \quad t = \frac{A_{N+1}}{A_1} . \quad (1)$$

Concentriamo la nostra attenzione su quanto avviene in prossimità del generico piano  $z = z_j$ , come mostrato in figura 2.

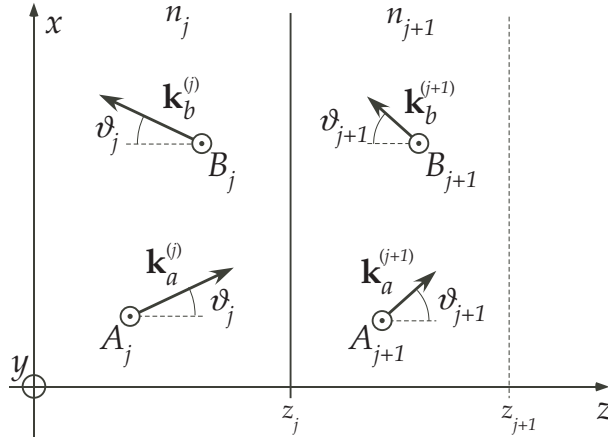


Figure 2: Riflessione e trasmissione sul piano  $z = z_j$

Analizzando il fenomeno dal punto di vista delle riflessioni multiple sulle superfici di separazione tra due dielettrici, ci aspettiamo che, a seguito dell'incidenza di un'onda proveniente dallo strato  $j - 1$ , all'interno dello strato  $j$  si formi un'insieme di onde piane, aventi tutte vettore d'onda  $\mathbf{k}_a^{(j)}$ . Tali onde, interferendo, daranno origine ad un'unica onda piana, avente lo stesso vettore d'onda ( $\mathbf{k}_a^{(j)}$ ) ed ampiezza incognita ( $A_j$ ), che dipenderà dalle ampiezze delle onde interferenti e dalle loro mutue relazioni di fase. Un altro insieme di onde piane, dovute alla riflessione sulla superficie  $z = z_j$ , darà invece luogo ad un'onda piana con vettore d'onda  $\mathbf{k}_b^{(j)}$  ed ampiezza  $B_j$ . Tale fenomeno si presenta identico in qualsiasi strato (eccetto per l'assenza dell'onda riflessa nell'ultimo strato).

Mentre le ampiezze delle onde propagantisi in ciascuno strato nelle due direzioni sono, per ora, incognite, i corrispondenti vettori d'onda sono determinabili a partire dalle leggi di Snell. Infatti, per quanto visto a proposito

della trasmissione da una singola interfaccia dielettrica, le seguenti relazioni devono valere tra i numeri d'onda in due mezzi contigui:

$$k_{ax}^{(j)} = k_{bx}^{(j)} = k_{ax}^{(j+1)} = k_{bx}^{(j+1)} , \quad (2)$$

cioè, le componenti  $x$  di tutti i vettori d'onda sono uguali tra loro. Indicheremo semplicemente con  $k_x$  questo valore comune. Applicata a due onde che si propagano nello stesso mezzo, l'Eq. (2) stabilisce la legge di Snell per la riflessione; applicata a onde che si propagano in mezzi diversi, essa costituisce la legge di Snell per la rifrazione, cioè

$$n_j \sin \vartheta_j = n_{j+1} \sin \vartheta_{j+1} . \quad (3)$$

Per quanto riguarda le componenti  $z$  dei vettori d'onda in un medesimo strato si ha, evidentemente,

$$k_{az}^{(j)} = -k_{bz}^{(j)} , \quad (4)$$

valore che verrà indicato, per comodità, con  $k_z^{(j)}$ .

A questo punto siamo in grado di scrivere l'espressione del campo elettrico totale presente all'interno del  $j$ -esimo strato. Tenendo conto delle relazioni (2) e (4), si ha

$$E_j(x, z) = A_j e^{ik_x x} e^{ik_z^{(j)}(z-z_j)} + B_j e^{ik_x x} e^{-ik_z^{(j)}(z-z_j)} . \quad (5)$$

Si noti che le ampiezze  $A_j$  e  $B_j$  rappresentano i valori che i campi elettrici delle due onde piane assumono nel punto di coordinate  $(0, z_j)$ .

La continuità della componente del campo elettrico parallela alla superficie  $z = z_j$  impone che sia  $E_j(x, z_j) = E_{j+1}(x, z_j)$  e quindi

$$A_j + B_j = A_{j+1} e^{ik_z^{(j+1)}(z_j-z_{j+1})} + B_{j+1} e^{-ik_z^{(j+1)}(z_j-z_{j+1})} . \quad (6)$$

Conviene introdurre lo sfasamento introdotto dal  $j$ -esimo strato come

$$\varphi_j = k_0 n_j d_j \cos \vartheta_j , \quad (7)$$

dove  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  è il numero d'onda nel vuoto e  $d_j = z_j - z_{j-1}$  è lo spessore del  $j$ -esimo strato. In questo modo la condizione (6) diventa

$$A_j + B_j = A_{j+1} e^{-i\varphi_{j+1}} + B_{j+1} e^{i\varphi_{j+1}} . \quad (8)$$

Un'analogha condizione viene fuori dalla conservazione della componente del campo H parallela alla superficie di separazione tra i due mezzi. Il campo

magnetico può essere calcolato in ogni punto partendo dalla legge di Faraday scritta in forma locale, cioè,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = i\omega \mathbf{B} , \quad (9)$$

dove  $\partial_t$  indica la derivata parziale rispetto a  $t$  e si è tenuto conto della dipendenza armonica dal tempo dei campi.

Utilizzando la relazione costitutiva  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , si ha pertanto

$$\mathbf{H} = \frac{-i}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & E & 0 \end{vmatrix} = \frac{i}{\omega\mu} (\partial_z E \hat{x} - \partial_x E \hat{z}) , \quad (10)$$

per cui la componente di  $\mathbf{H}$  parallela all'interfaccia ( $H^\parallel$ ) è esattamente la sua componente  $x$ , che risulta proporzionale a  $\partial_z E$ , e precisamente

$$H_j^\parallel(x, z) \propto \partial_z E_j(x, z) = ik_z^{(j)} A_j e^{ik_x x} e^{ik_z^{(j)}(z-z_j)} - ik_z^{(j)} B_j e^{ik_x x} e^{-ik_z^{(j)}(z-z_j)} . \quad (11)$$

Imponendo che sia  $H_j^\parallel(x, z_j) = H_{j+1}^\parallel(x, z_j)$ , si ha

$$k_z^{(j)}(A_j - B_j) = k_z^{(j+1)} (A_{j+1} e^{-i\varphi_{j+1}} - B_{j+1} e^{i\varphi_{j+1}}) , \quad (12)$$

ovvero, dividendo per  $k_z^{(j)}$ ,

$$A_j - B_j = \xi_{j,j+1} (A_{j+1} e^{-i\varphi_{j+1}} - B_{j+1} e^{i\varphi_{j+1}}) , \quad (13)$$

avendo posto

$$\xi_{j,j+1} = \frac{k_z^{(j+1)}}{k_z^{(j)}} = \frac{n_{j+1} \cos \vartheta_{j+1}}{n_j \cos \vartheta_j} . \quad (14)$$

In definitiva, le relazioni che legano i coefficienti  $A_j$  e  $B_j$  agli analoghi coefficienti per lo strato successivo sono [eqq. (8) e (13)]:

$$\begin{cases} A_j + B_j = A_{j+1} e^{-i\varphi_{j+1}} + B_{j+1} e^{i\varphi_{j+1}} \\ A_j - B_j = \xi_{j,j+1} (A_{j+1} e^{-i\varphi_{j+1}} - B_{j+1} e^{i\varphi_{j+1}}) \end{cases} , \quad (15)$$

che possono essere poste in forma matriciale introducendo opportuni vettori colonna ed una matrice di trasmissione,  $\hat{M}_j$ , relativa al passaggio dallo strato  $j$  allo strato  $j + 1$ . Infatti, il sistema lineare nell'eq. (15) può essere scritto come

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = \hat{M}_j \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} , \quad (16)$$

con

$$\hat{M}_j = \frac{1}{2\xi_{j,j+1}} \begin{pmatrix} (1 + \xi_{j,j+1})e^{i\varphi_{j+1}} & -(1 - \xi_{j,j+1})e^{i\varphi_{j+1}} \\ -(1 - \xi_{j,j+1})e^{-i\varphi_{j+1}} & (1 + \xi_{j,j+1})e^{-i\varphi_{j+1}} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Convienie fin da ora calcolare il determinante di  $\hat{M}_j$ , che risulta

$$\det \hat{M}_j = \frac{(1 + \xi_{j,j+1})^2 - (1 - \xi_{j,j+1})^2}{4\xi_{j,j+1}^2} = \frac{1}{\xi_{j,j+1}}. \quad (18)$$

Quando si è in presenza di una struttura costituita da  $N$  interfacce dielettriche, sarà possibile descrivere il comportamento della struttura complessiva mediante un'unica matrice,  $\hat{M}$ , ottenuta come il prodotto delle  $N$  matrici corrispondenti a ciascuna delle interfacce. Infatti, ricordando che nell'ultimo mezzo non c'è alcuna onda riflessa, si ha

$$\begin{pmatrix} A_{N+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{M}_N \begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \hat{M}_N \hat{M}_{N-1} \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ B_{N-1} \end{pmatrix} = \hat{M}_N \hat{M}_{N-1} \cdots \hat{M}_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

ossia

$$\begin{pmatrix} A_{N+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

con

$$\hat{M} = \hat{M}_N \hat{M}_{N-1} \cdots \hat{M}_1. \quad (21)$$

A proposito della matrice  $\hat{M}_N$  che compare nell'eq. (21), si potrebbe obiettare che in essa compare anche la fase  $\varphi_{N+1}$  [vedi eq. (17)] che, a sua volta, richiede la conoscenza dello spessore dello strato  $N + 1$  [vedi eq. (7)], che in realtà si suppone infinito. Il problema nasce dall'aver definito le ampiezze  $A_j$  e  $B_j$  come i valori assunti dalle relative onde piane nel punto di coordinata  $(x = 0, z = z_j)$  [vedi eq. (5)]. Per ovviare a questo inconveniente, è sufficiente definire, solo per l'ultimo mezzo, l'ampiezza  $A_{N+1}$  come il valore assunto dall'onda trasmessa nel punto di coordinata  $(x = 0, z = z_N)$  o, analogamente considerare nullo lo spessore dell'ultimo strato. In questo modo si ha  $d_{N+1} = 0$ , da cui  $\varphi_{N+1} = 0$ .

Una volta ottenuta la matrice complessiva  $\hat{M}$ , i coefficienti di riflessione e di trasmissione della struttura possono essere calcolati facilmente, a partire dai valori dei suoi elementi. Infatti, ponendo

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

dall'eq. (20) si ha

$$\begin{cases} M_{11}A_1 + M_{12}B_1 = A_{N+1} \\ M_{21}A_1 + M_{22}B_1 = 0 \end{cases}, \quad (23)$$

da cui

$$r = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{M_{21}}{M_{22}}, \quad (24)$$

e

$$t = \frac{A_{N+1}}{A_1} = \frac{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}}{M_{22}} = \frac{\det \hat{M}}{M_{22}}. \quad (25)$$

## 2 Esempi

Applichiamo i risultati ottenuti nella sezione precedente a due semplici esempi: la singola interfaccia dielettrica e lo strato dielettrico.

Nel primo caso si ha  $N = 1$ , per cui la matrice complessiva coincide con la sola matrice di trasmissione tra il primo e il secondo mezzo. Pertanto, ponendo per semplicità  $\xi = \xi_{12}$ , si ottiene

$$\hat{M} = \hat{M}_1 = \frac{1}{2\xi} \begin{pmatrix} (1 + \xi) & -(1 - \xi) \\ -(1 - \xi) & (1 + \xi) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

e quindi

$$r = -\frac{M_{21}}{M_{22}} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad (27)$$

e

$$t = \frac{\det \hat{M}}{M_{22}} = \frac{2}{1 + \xi}. \quad (28)$$

Nel secondo caso,  $N = 2$  e le matrici di trasmissione tra i mezzi sono

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{2\xi_{12}} \begin{pmatrix} (1 + \xi_{12}) e^{i\varphi} & -(1 - \xi_{12}) e^{i\varphi} \\ -(1 - \xi_{12}) e^{-i\varphi} & (1 + \xi_{12}) e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

con  $\varphi = k_0 n_2 d \cos \vartheta_2$ , dove  $d$  è lo spessore dello strato intermedio, e

$$\hat{M}_2 = \frac{1}{2\xi_{23}} \begin{pmatrix} (1 + \xi_{23}) & -(1 - \xi_{23}) \\ -(1 - \xi_{23}) & (1 + \xi_{23}) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

il cui prodotto,  $\hat{M} = \hat{M}_2 \hat{M}_1$ , fornisce

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{(1 + \xi_{12})(1 + \xi_{23}) e^{i\varphi} + (1 - \xi_{12})(1 - \xi_{23}) e^{-i\varphi}}{4 \xi_{12} \xi_{23}} \\
M_{12} &= \frac{-(1 - \xi_{12})(1 + \xi_{23}) e^{i\varphi} - (1 + \xi_{12})(1 - \xi_{23}) e^{-i\varphi}}{4 \xi_{12} \xi_{23}} \\
M_{21} &= \frac{-(1 + \xi_{12})(1 - \xi_{23}) e^{i\varphi} - (1 - \xi_{12})(1 + \xi_{23}) e^{-i\varphi}}{4 \xi_{12} \xi_{23}} \\
M_{22} &= \frac{(1 - \xi_{12})(1 - \xi_{23}) e^{i\varphi} + (1 + \xi_{12})(1 + \xi_{23}) e^{-i\varphi}}{4 \xi_{12} \xi_{23}}
\end{aligned} \tag{31}$$

Il determinante di  $\hat{M}$  è dato dal prodotto dei determinanti di  $\hat{M}_1$  e  $\hat{M}_2$ , per cui vale

$$\det \hat{M} = \det \hat{M}_1 \det \hat{M}_2 = \frac{1}{\xi_{12} \xi_{23}}, \tag{32}$$

e i coefficienti di riflessione e di trasmissione risultano, rispettivamente,

$$r = -\frac{M_{21}}{M_{22}} = \frac{(1 + \xi_{12})(1 - \xi_{23}) e^{i\varphi} + (1 - \xi_{12})(1 + \xi_{23}) e^{-i\varphi}}{(1 - \xi_{12})(1 - \xi_{23}) e^{i\varphi} + (1 + \xi_{12})(1 + \xi_{23}) e^{-i\varphi}}, \tag{33}$$

e

$$t = \frac{\det \hat{M}}{M_{22}} = \frac{4}{(1 - \xi_{12})(1 - \xi_{23}) e^{i\varphi} + (1 + \xi_{12})(1 + \xi_{23}) e^{-i\varphi}}. \tag{34}$$