

# Momenti di un fascio luminoso e loro propagazione

Corso di Ottica - Massimo Santarsiero

## 1 Momenti di un fascio luminoso

L'insieme di fasci gaussiani rappresenta un utile modello per gran parte dei fasci prodotti da cavità laser stabili. In quel caso, il fascio luminoso è completamente caratterizzato da un numero molto esiguo di parametri. Tuttavia, come è ragionevole aspettarsi, nella pratica ci si trova spesso di fronte a situazioni in cui, per necessità o per precise esigenze sperimentali, il fascio si discosta sensibilmente da un fascio gaussiano. In un caso generico, è anche molto difficile trovare dei parametri che siano definiti senza ambiguità per qualunque tipo di fascio e che siano allo stesso tempo significativi per le loro caratteristiche propagative.

Una maniera molto efficiente di caratterizzare i profili trasversali di fasci laser è quella di utilizzare i momenti della distribuzione di intensità. Dato, infatti, un qualsiasi profilo trasversale d'intensità  $I(x, z)$ , è sempre possibile definire le quantità

$$\mu_n = \frac{1}{P_{tot}} \int x^n I(x, z) dx . \quad (1)$$

Per semplicità, qui e nel seguito ci limitiamo a considerare fasci bidimensionali, cioè fasci il cui profilo dipende da una sola delle coordinate trasversali (diciamo  $x$ ), per cui l'integrale nell'Eq. (1) si intende esteso a tutto l'asse reale. L'estensione al caso di fasci tridimensionali non presenta difficoltà concettuali.

Naturalmente, assegnare  $\mu_n$  per ogni valore di  $n$  equivale ad individuare perfettamente il profilo d'intensità di un fascio luminoso. Tuttavia, come vedremo, i momenti di ordine più basso sono spesso sufficienti ad individuarne le caratteristiche principali.

Per esempio, il momento di ordine 1, cioè

$$\bar{x}(z) = \mu_1 = \frac{1}{P_{tot}} \int x I(x, z) dx , \quad (2)$$

è il cosiddetto *centroide* e individua il “baricentro” del profilo, mentre il momento di ordine 2 è legato ad una definizione di larghezza del profilo, che vediamo subito. La larghezza del profilo luminoso nel piano  $z$  è infatti definita come proporzionale alla deviazione standard della distribuzione  $I(x, z)$ , che è

$$\sigma(z) = \sqrt{\frac{1}{P_{tot}} \int [x - \bar{x}(z)]^2 I(x, z) dx} . \quad (3)$$

Nel seguito, per comodità, ci riferiremo alla deviazione standard (3) come la larghezza del fascio, trascurando eventuali fattori di proporzionalità.

Naturalmente, affinché la definizione (3) abbia senso, non basta che il fascio trasporti una potenza finita, ma è necessario che l’integrale che compare nell’Eq. (3) sia finito. Questo, in realtà, costituisce uno dei più seri inconvenienti della definizione di larghezza basata sulla varianza della distribuzione di intensità. In alcuni casi non privi di interesse, infatti, come nella figura di campo lontano prodotta da una fenditura o da un foro circolare (ma è sufficiente che il campo di partenza abbia una discontinuità) l’integrale inesorabilmente diverge e la definizione (3) perde di significato. Il problema è più che altro formale, dal momento che, dal punto di vista pratico, le integrazioni vengono sempre effettuate su regioni finite. Tuttavia, le difficoltà rimangono anche perché la presenza del rumore può modificare anche sensibilmente il valore dell’integrale.

Nel caso di un fascio gaussiano fondamentale, si può facilmente calcolare la relazione tra spot size e larghezza, risultando

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} w(z) . \quad (4)$$

Momenti di ordine più elevato possono essere utilizzati per caratterizzare la forma di un profilo d’intensità. Il parametro di forma in qualche modo più celebre è il cosiddetto *kurtosis*, definito come

$$K(z) = \frac{\frac{1}{P_{tot}} \int [x - \bar{x}(z)]^4 I(x, z) dx}{\sigma^4(z)} , \quad (5)$$

che dà una misura di quanto il profilo sia appiattito. Esso vale 3 per un profilo gaussiano (mesokurtico), è minore quando il profilo è più appiattito (platikurtico) di un gaussiano avente la stessa varianza ed è maggiore quando è più aguzzo (leptokurtico). Tre esempi sono mostrati in Fig. 1.

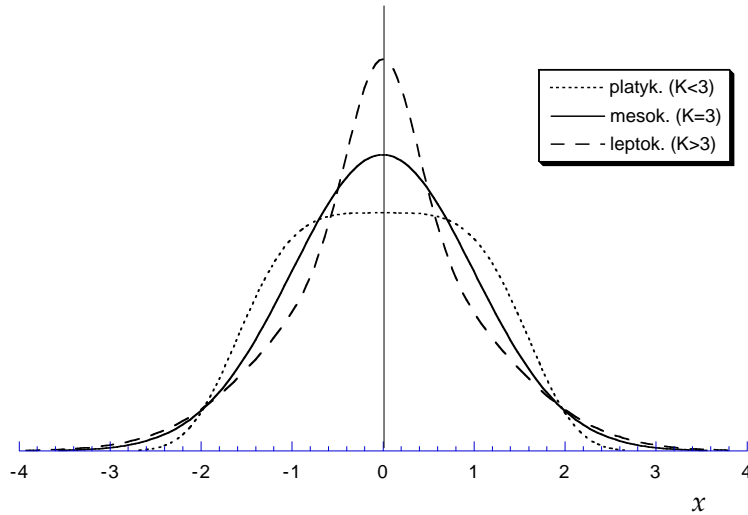


Figure 1: Tre esempi di di distribuzioni d'intensità aventi differenti kurtosis. I valori della potenza totale e della varianza sono gli stessi per i tre casi.

## 2 Propagazione dei momenti

Fino ad ora sono stati introdotti i momenti del profilo di intensità di un fascio luminoso. Essi caratterizzano in qualche modo le proprietà del profilo del fascio ad un certo piano trasverso ma non danno alcuna informazione sulle caratteristiche del fascio in propagazione. Una caratterizzazione più completa del fascio in propagazione può essere ottenuta introducendo anche i momenti del profilo di intensità nel far field.

Ricordando che il campo nel far field si può calcolare mediante la trasformata di Fourier del campo su un piano  $z = \text{costante}$ , indicato con  $V(x, z)$ , poniamo

$$I_{\infty}(\nu) = \left| \int V(x, z) \exp(-i2\pi\nu x) dx \right|^2 . \quad (6)$$

dove  $\nu$  è la variabile coniugata a  $x$  e quindi è legata alla variabile angolare che individua una direzione nel piano  $(x, z)$ . Gli stessi parametri definiti per l'intensità a  $z = \text{costante}$  si possono introdurre per l'intensità nel far field. In particolare, sarà

$$\bar{\nu} = \frac{1}{P_{tot}} \int \nu I_{\infty}(\nu) d\nu , \quad (7)$$

che individua la direzione di propagazione media del fascio. Il fattore di normalizzazione che compare nella (7) è ancora  $P_{tot}$  perché, per il teorema di

Parseval,

$$\int I_\infty(\nu) d\nu = \int I(x, z) dx , \quad (8)$$

come d'altronde risulta ovvio da considerazioni energetiche.

Si può mostrare che una conseguenza delle definizioni (2) e (7) (del centroide e dell'angolo di propagazione medio del fascio) e delle leggi della propagazione parassiale è che la posizione del centroide varia linearmente con la coordinata longitudinale, cioè

$$\bar{x}(z) = \bar{x}(z_0) + \lambda \bar{\nu}(z - z_0) . \quad (9)$$

Quindi, il centroide di un fascio luminoso segue la stessa legge di propagazione rettilinea valida in ottica geometrica per i raggi luminosi.

Questo fatto ci consente di scegliere un sistema di riferimento tale che l'asse di propagazione media del fascio sia coincidente con l'asse  $z$ . In questo caso, infatti, tutti i momenti del primo ordine (per  $z$  finito e nel far field) si annullano, cioè

$$\bar{x}(z) = 0; \quad \bar{\nu} = 0 \quad \forall z , \quad (10)$$

semplificando notevolmente il calcolo dei momenti successivi.

Sfruttando la condizione (10), la deviazione standard del profilo nel far field risulta

$$\sigma_\infty = \sqrt{\frac{1}{P_{tot}} \int \nu^2 I_\infty(\nu) d\nu} , \quad (11)$$

che dà l'angolo medio di divergenza media del fascio.

Per un fascio gaussiano fondamentale avente spot size di cintura pari a  $w(z_0)$  è facile calcolare che

$$\sigma_\infty = \frac{1}{2\pi w(z_0)} . \quad (12)$$

Come per il centroide, anche per la varianza del profilo dell'intensità la legge di propagazione in approssimazione parassiale è molto semplice. Infatti si può facilmente dimostrare che, per *qualsiasi* fascio parassiale, si ha

$$\sigma^2(z) = \sigma^2(z_0) + \lambda^2 \sigma_\infty^2 (z - z_0)^2 . \quad (13)$$

dove la coordinata  $z_0$  corrisponde al piano su cui la larghezza del fascio è minima. Su questo importante risultato torneremo diffusamente nel seguito. Per ora basta sottolineare il fatto che l'espressione (13) è formalmente identica a quella che regola la variazione dello spot size del fascio gaussiano fondamentale.

I risultati presentati in questo paragrafo dovrebbero già mettere in luce come l'uso dei momenti dell'intensità porti a risultati analiticamente molto attraenti nella caratterizzazione dei fasci luminosi.

### 3 Il fattore $M^2$

Nella sezione precedente abbiamo visto che la varianza del profilo di un fascio in propagazione parassiale segue una legge parabolica analoga a quella valida per un fascio gaussiano fondamentale che, utilizzando la deviazione standard  $\sigma$  invece dello spot size  $w$ , [vedi Eqs. (4) e (12)] risulta essere

$$\sigma^2(z) = \sigma^2(z_0) + \left[ \frac{\lambda}{4\pi\sigma(z_0)} \right]^2 (z - z_0)^2 . \quad (14)$$

Confrontando questa espressione con l'Eq. (13), notiamo che l'unica differenza sta nel fatto che lì il coefficiente del termine quadratico in  $z$  dipende dalla larghezza nel far field  $\sigma_\infty$ . Quest'ultima, in generale, non dipende solo dalla larghezza del fascio nel piano di cintola, come avviene nel caso di fasci gaussiani, ma tiene conto delle diverse forme che il profilo del fascio può presentare.

Utilizzando i valori delle larghezze del fascio alla cintola e nel far field, si può introdurre il cosiddetto fattore  $M^2$  come la quantità

$$M^2 = 4\pi\sigma(z_0)\sigma_\infty , \quad (15)$$

per cui la legge di variazione (13) prende la forma

$$\sigma^2(z) = \sigma^2(z_0) + \left[ \frac{M^2\lambda}{4\pi\sigma(z_0)} \right]^2 (z - z_0)^2 . \quad (16)$$

Il fattore  $M^2$  è pari a 1 solo per il fascio gaussiano fondamentale [vedi Eqs. (4) e (12)] mentre è maggiore di 1 per qualsiasi altro tipo di fascio. Ad esso è legato l'angolo medio di diffrazione ( $\vartheta$ ) del fascio, che risulta  $M^2$  volte più grande di quello che si avrebbe ( $\vartheta_g$ ) per un fascio gaussiano fondamentale avente la stessa larghezza alla cintola, cioè

$$\vartheta = M^2\vartheta_g . \quad (17)$$

Il fattore  $M^2$  è utilizzato come un indicatore della qualità di un fascio luminoso, in quanto misura l'attitudine di un fascio a divergere, una volta

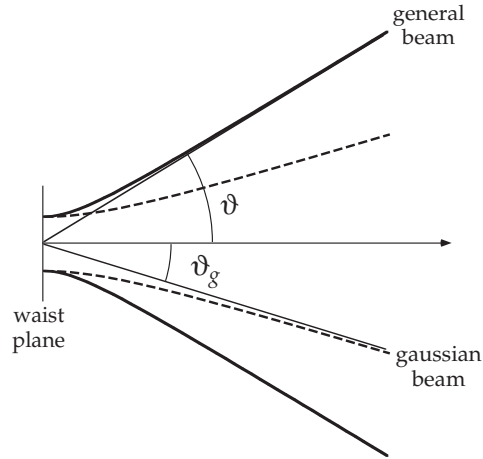


Figure 2: Propagazione della larghezza di un fascio di luce generico, confrontata con quella di un fascio gaussiano fondamentale avente la stessa larghezza di cintola.

che sia stata fissata la sua larghezza alla cintola. Maggiore è il suo valore, più il comportamento del fascio si discosta da quello di un fascio gaussiano fondamentale. E' per questo motivo che il fattore  $M^2$  viene anche chiamato “quality factor”, o, più propriamente, “propagation factor”.

Nonostante l'uso del fattore  $M^2$  come indicatore della qualità di un fascio luminoso stia diventando sempre più frequente e lo si trovi spesso anche tra le specifiche tecniche di sorgenti laser, esso è ancora trattato con qualche diffidenza da molti ricercatori. Le principali obiezioni sono legate al fatto che esso si basa sulla definizione di larghezza di un profilo in termini di momento del second'ordine. Essa, come abbiamo visto, può divergere anche in situazioni piuttosto frequenti nella pratica. Per esempio, quando si è in presenza di fasci che subiscono diffrazione da bordi netti, il valore di  $M^2$  è inevitabilmente infinito, mentre la qualità del fascio può essere considerata accettabile da un punto di vista applicativo. L'origine di questo comportamento anomalo del fattore  $M^2$  risiede nel fatto che, mentre la propagazione del fascio viene trattata in regime puramente parassiale, la presenza di bordi netti introduce nel campo delle componenti ad altissima frequenza, che sono responsabili del comportamento divergente della  $\sigma_\infty$ . Nonostante il fatto che qualunque divergenza viene eliminata se gli integrali sul piano trasformato vengono (ragionevole) limitati alla regione delle componenti omogenee,

$|\nu| < 1/\lambda$ , l'uso del fattore  $M^2$  rimane ancora piuttosto controverso.

Prima di concludere il presente paragrafo, accenniamo brevemente ad un'importante proprietà del fattore  $M^2$  di un fascio luminoso. Esso è infatti una quantità invariante per propagazione attraverso un qualsiasi sistema ottico parassiale, per cui si può dire che  $M^2$  costituisce una caratteristica intrinseca del fascio, indipendentemente dal sistema ottico che esso attraversa. Questa proprietà viene generalmente utilizzata nella misura sperimentale del fattore  $M^2$ . In generale, infatti, quando il fascio è ben collimato, si preferisce farlo passare attraverso un sistema ottico (anche solo una lente convergente) per rendere più vistose le variazioni della sua larghezza lungo l'asse di propagazione e più precisa la misura dell' $M^2$ .

## 4 Il fascio gaussiano *embedded*

Come si è visto, l'equazione (16) è identica, a parte la presenza del fattore  $M^2$ , all'espressione che regola la variazione della varianza di un fascio gaussiano fondamentale. Ciò suggerisce che si possa in qualche modo associare a qualsiasi fascio luminoso un certo fascio gaussiano la cui larghezza di cintola sia tale che la sua larghezza in propagazione sia sempre proporzionale a quella del fascio in oggetto (vedi Fig. 3)

Per fare questo è sufficiente dividere ambo i membri della (16) per  $M^2$  e porre  $\sigma_e(z) = \sigma(z)/\sqrt{M^2}$ . Si ottiene così

$$\sigma_e^2(z) = \sigma_e^2(z_0) + \left[ \frac{\lambda}{4\pi\sigma_e(z_0)} \right]^2 (z - z_0)^2, \quad (18)$$

che è esattamente la legge valida per un fascio gaussiano fondamentale avente larghezza alla cintola pari a  $\sigma_e(z_0)$ , corrispondente ad uno spot size di cintola, per la (4), dato da

$$w_e(z_0) = 2\sigma_e(z_0) = \frac{2\sigma(z_0)}{\sqrt{M^2}}. \quad (19)$$

Questa condizione quindi assicura che lo spot size del fascio gaussiano durante la propagazione rimanga sempre proporzionale, secondo lo stesso fattore, alla larghezza del fascio reale. Il fascio gaussiano ottenuto in questo modo prende il nome di fascio gaussiano *embedded* e rappresenta uno strumento molto utile per lo studio della propagazione dei fasci luminosi attraverso sistemi ottici parassiali.

Prima di vedere perché, introduciamo un'altra grandezza caratteristica del profilo di un fascio luminoso: il suo raggio di curvatura equivalente.

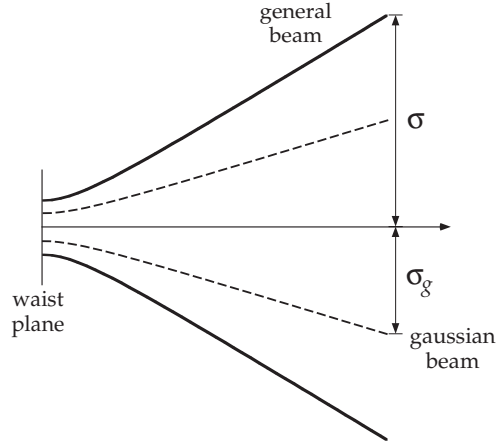


Figure 3: Propagazione della larghezza di un fascio di luce generico (linea continua) e di quella di un fascio gaussiano fondamentale (tratteggiata). La larghezza di cintura di quest'ultimo è scelta in modo tale da risultare proporzionale a quella del fascio generico ad ogni piano trasverso.

Come si può immaginare facilmente, esso rappresenta il raggio di curvatura parabolico che meglio approssima il fronte d'onda reale del fascio e viene utilizzato, per esempio, per determinare la lunghezza focale della lente che meglio riesce a collimare il fascio.

Dal punto di vista analitico, si dimostra che il raggio di curvatura equivalente può essere definito, su ogni piano trasverso, attraverso la relazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{\text{eq}}(z)} &= 2\pi\lambda \frac{\int x \operatorname{Im} \{V^*(x, z) \partial_x V(x, z)\} dx}{\int x^2 I(x, z) dx} \\ &= \frac{2\pi\lambda}{P_{\text{tot}} \sigma^2(z)} \int x \operatorname{Im} \{V^*(x, z) \partial_x V(x, z)\} dx . \end{aligned} \quad (20)$$

dove  $\operatorname{Im}\{\cdot\}$  rappresenta la parte immaginaria.

Una proprietà veramente notevole è che esso segue, durante la propagazione, la stessa legge di evoluzione valida per un fascio gaussiano, cioè:

$$R_{\text{eq}}(z) = (z - z_0) \left\{ 1 + \left[ \frac{4\pi\sigma^2(z_0)}{M^2\lambda(z - z_0)} \right]^2 \right\} . \quad (21)$$

Più precisamente, come risulta dalla (21) e dalla (19), esso si comporta esattamente come il raggio di curvatura del fascio gaussiano embedded. Questo fatto consente di sostituire un fascio luminoso generico, quando si è interessati ai soli suoi momenti del secondo ordine, con un fascio gaussiano fondamentale, per studiarne la propagazione in un sistema ottico parassiale. Basterà infatti conoscere la posizione e la larghezza della cintola (o, alternativamente, la larghezza e il raggio di curvatura su un piano qualsiasi), insieme al fattore  $M^2$ , per determinarne la larghezza attraverso un qualsiasi sistema ottico.

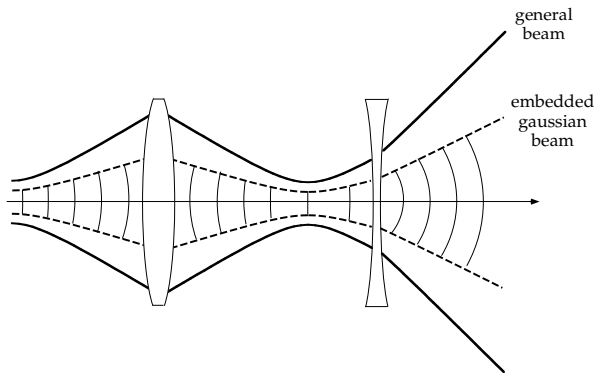


Figure 4: Esempio di propagazione di un fascio attraverso un sistema ottico. Le curve continue mostrano l'andamento della larghezza di un fascio generico, mentre quelle tratteggiate mostrano la stessa quantità per il corrispondente fascio gaussiano embedded.