

Trasmissione e riflessione di onde piane su interfacce dielettriche (incidenza qualsiasi)

Corso di Ottica - Massimo Santarsiero

Consideriamo un'onda e.m. piana armonica, di pulsazione ω_i , che incide con vettore d'onda \mathbf{k}_i sulla superficie di separazione tra due mezzi dielettrici isotropi, lineari e omogenei (ILO). La permeabilità magnetica di entrambi i mezzi è presa approssimativamente pari a quella del vuoto e n_1 ed n_2 sono gli indici di rifrazione rispettivamente del primo e del secondo mezzo, con

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_r^{(1)}} ; \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_r^{(2)}} , \quad (1)$$

dove $\varepsilon_r^{(1)}$ e $\varepsilon_r^{(2)}$ sono le costanti dielettriche relative dei due mezzi. Il vettore elettrico dell'onda incidente pertanto si scriverà nella forma

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} , \quad (2)$$

dove \mathbf{E}_i è un vettore costante. Inoltre vale la seguente relazione

$$\omega_i = v_1 k_i = ck_i/n_1 , \quad (3)$$

dove v_1 è la velocità della luce nel mezzo 1 e c è la velocità della luce nel vuoto.

Conviene scegliere un sistema di riferimento cartesiano tale che il piano $z = 0$ coincida con la superficie di separazione tra i due mezzi e che il vettore \mathbf{k}_i sia contenuto nel piano xz (cioè con $k_{iy} = 0$), che verrà chiamato *piano d'incidenza*. La situazione è illustrata in Fig. 1.

Se l'onda incide sulla superficie provenendo dal mezzo 1, ci aspettiamo che la presenza dell'interfaccia dia luogo ad un'onda riflessa e ad un'onda trasmessa, come avviene nel caso di incidenza normale. Indicando con \mathbf{k}_r e \mathbf{k}_t rispettivamente i vettori d'onda di queste due onde e con ω_r e ω_t le corrispondenti pulsazioni, i campi elettrici delle due onde si scriveranno

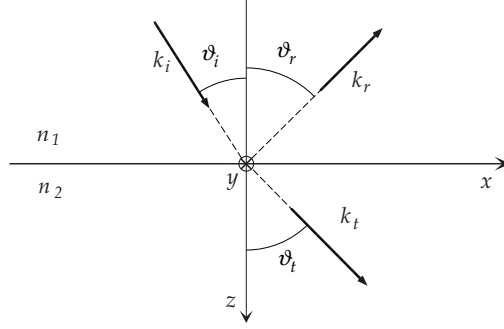


Figure 1:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} \quad \text{con } \omega_r = ck_r/n_1 \\
 \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)} \quad \text{con } \omega_t = ck_t/n_2
 \end{aligned} \tag{4}$$

con ovvio significato dei simboli.

I valori delle quantità presenti nell'eq. (4) sono, per ora, incogniti e devono essere dedotti dalle condizioni di continuità cui deve soddisfare il campo e.m. sull'interfaccia. Ricordiamo che, in assenza di correnti e cariche libere sull'interfaccia, le equazioni di Maxwell impongono la continuità delle componenti parallele all'interfaccia di \mathbf{E} e di \mathbf{H} e delle componenti ortogonali di \mathbf{D} e di \mathbf{B} . Per determinare i valori dei vettori d'onda delle tre onde presenti sull'interfaccia, si può prendere in considerazione uno qualunque dei campi elettrico o magnetico. Per esempio, se consideriamo la componente del campo elettrico parallela alla superficie (indicata con \parallel), calcolata sul piano della superficie ($z = 0$), la condizione di continuità impone che sia

$$\mathbf{E}_{i\parallel} e^{i(k_{ix}x - \omega_i t)} + \mathbf{E}_{r\parallel} e^{i(k_{rx}x + k_{ry}y - \omega_r t)} = \mathbf{E}_{t\parallel} e^{i(k_{tx}x + k_{ty}y - \omega_t t)} \tag{5}$$

per qualunque scelta di x , y , e t . Nello scrivere l'eq. (5) si è tenuto conto del fatto che $k_{iy} = 0$.

Affinché l'eq. (5) possa essere soddisfatta per qualsiasi scelta di x , y , e t , occorre che la dipendenza da queste tre variabili sia la stessa per tutti i termini dell'equazione. Ciò, in particolare, implica che la dipendenza dal tempo deve essere la stessa, ossia che

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \quad (6)$$

che nel seguito indicheremo semplicemente con ω . Questo significa, a sua volta, che i vettori d'onda nei due mezzi devono essere diversi, essendo legati alla pulsazione dalle relazioni (3) e (4).

Un risultato analogo lo si ottiene per quanto riguarda la dipendenza dei termini della (5) da x e da y . Deve essere, quindi,

$$0 = k_{ry} = k_{ty} , \quad (7)$$

per cui anche i vettori d'onda delle onde riflessa e trasmessa giacciono nel piano di incidenza, e

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} . \quad (8)$$

Quest'ultima equazione fornisce due relazioni che possono essere scritte introducendo gli angoli di *incidenza* (ϑ_i), di *riflessione* (ϑ_r), e di *trasmissione* (o di *rifrazione*, ϑ_t), definiti come gli angoli che i vettori d'onda delle rispettive onde piane formano con la normale alla superficie (vedi Fig. 1). Poiché si ha

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_i \sin \vartheta_i = \frac{\omega n_1}{c} \sin \vartheta_i \\ k_{rx} &= k_r \sin \vartheta_r = \frac{\omega n_1}{c} \sin \vartheta_r \\ k_{tx} &= k_t \sin \vartheta_t = \frac{\omega n_2}{c} \sin \vartheta_t , \end{aligned} \quad (9)$$

l'eq. (8) fornisce:

$$\sin \vartheta_i = \sin \vartheta_r \quad \Rightarrow \quad \vartheta_i = \vartheta_r \quad (10)$$

e

$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_t . \quad (11)$$

Le relazioni (7), (10) e (11) sono note come *leggi di Snell* (o di *Cartesio*) e sono sufficienti per determinare le direzioni di propagazione dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa (rifratta), una volta che sia nota la direzione di propagazione dell'onda incidente.

Ritorniamo adesso all'eq. (5),

$$\mathbf{E}_{i\parallel} + \mathbf{E}_{r\parallel} = \mathbf{E}_{t\parallel}, \quad (12)$$

in cui i fattori di fase sono stati semplificati in seguito alle considerazioni fatte in precedenza. La stessa condizione vale per la componente del campo magnetico parallela all'interfaccia:

$$\mathbf{H}_{i\parallel} + \mathbf{H}_{r\parallel} = \mathbf{H}_{t\parallel}. \quad (13)$$

Queste due ultime equazioni possono essere utilizzate per determinare le ampiezze delle onde riflessa e rifratta, nota quella del campo incidente, per qualunque polarizzazione del campo incidente. Conviene tuttavia prendere in considerazione separatamente due stati di polarizzazione particolari: quello in cui il campo elettrico oscilla lungo una direzione ortogonale al piano di incidenza (e quindi parallela all'interfaccia), detta *polarizzazione E*; quello in cui il campo magnetico oscilla lungo una direzione *ortogonale* al piano di incidenza, detta *polarizzazione H*. Poiché questi sono stati di polarizzazione lineari, lungo direzioni ortogonali, qualunque altro stato di polarizzazione (lineare, circolare o ellittico) può essere espresso come una opportuna sovrapposizione di questi due stati.

1 Polarizzazione E

Le direzioni dei campi sono quelle mostrate in fig. 2.

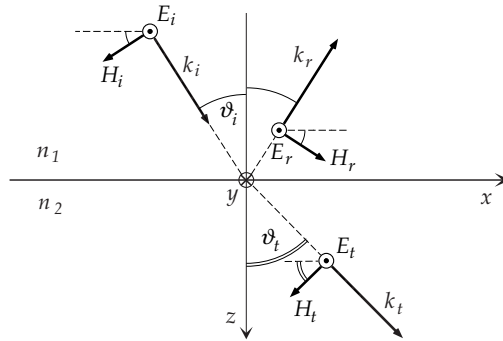


Figure 2:

Le eqq. (12) e (13) in questo caso si scrivono

$$E_i + E_r = E_t, \quad (14)$$

e

$$-H_i \cos \vartheta_i + H_r \cos \vartheta_r = -H_t \cos \vartheta_t. \quad (15)$$

Ricordando che $\vartheta_r = \vartheta_i$, quest'ultima equazione si potrà scrivere come

$$H_i - H_r = H_t \frac{\cos \vartheta_t}{\cos \vartheta_i} \equiv \chi H_t, \quad (16)$$

e ancora, poiché $H = E/Z = nE/Z_0$,

$$E_i - E_r = \frac{n_2}{n_1} \chi E_t \equiv \eta \chi E_t. \quad (17)$$

Le eqq. (14) e (17), in cui sono stati introdotti i parametri

$$\chi = \frac{\cos \vartheta_t}{\cos \vartheta_i} \quad (18)$$

e

$$\eta = \frac{n_2}{n_1}, \quad (19)$$

costituiscono un sistema lineare che può essere facilmente risolto in funzione del campo E_i . Si ottengono così le seguenti relazioni:

$$E_r = \frac{1 - \eta \chi}{1 + \eta \chi} E_i, \quad E_t = \frac{2}{1 + \eta \chi} E_i, \quad (20)$$

che danno le ampiezze dei campi elettrici delle onde riflessa e trasmessa in funzione di quello dell'onda incidente. Dalle relazioni (20) si possono definire i *coefficienti di riflessione* e di *trasmissione* (chiamati coefficienti di Fresnel) per polarizzazione E, come

$$r_E \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{1 - \eta \chi}{1 + \eta \chi}, \quad t_E \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{2}{1 + \eta \chi}, \quad (21)$$

rispettivamente. Si noti che le espressioni ottenute sono formalmente identiche a quelle valide per incidenza normale, a patto di sostituire, in queste ultime, il parametro η con $\eta \chi$.

Vale la pena di verificare che sia soddisfatta la condizione di conservazione dell'energia. Utilizziamo quindi ancora le intensità I_i , I_r e I_t , che rappresentano le potenze per unità di superficie trasportate dalle tre onde piane. Facendo riferimento alla superficie di separazione tra i due mezzi, si ha

$$I_i = \frac{|E_i|^2}{2Z_1} \cos \vartheta_i; \quad I_r = \frac{|E_r|^2}{2Z_1} \cos \vartheta_i; \quad I_t = \frac{|E_t|^2}{2Z_1} \cos \vartheta_t, \quad (22)$$

da cui

$$R = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = |r_E|^2; \quad T = \frac{|E_t|^2}{|E_i|^2} \frac{Z_1 \cos \vartheta_t}{Z_2 \cos \vartheta_i} = |t_E|^2 \eta \chi, \quad (23)$$

che, utilizzando le espressioni nell'eq. (21), forniscono $R + T = 1$.

Se la radiazione incide sulla superficie di separazione provenendo dal secondo mezzo, i coefficienti di riflessione e trasmissione si ottengono da queste espressioni scambiando i valori di n_1 e ϑ_i con n_2 e ϑ_t , rispettivamente, e risultano

$$r'_E = -r_E, \quad t'_E = \eta \chi t_E. \quad (24)$$

2 Polarizzazione H

Ora le direzioni dei campi sono quelle mostrate in fig. 3.

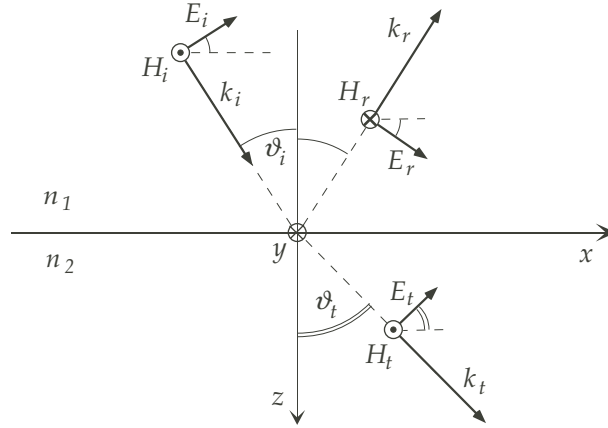


Figure 3:

Per conservare la convenzione utilizzata nel caso di polarizzazione E, il verso positivo del campo magnetico dell'onda riflessa è opposto rispetto a quello dell'onda incidente. Le equazioni di continuità per i campi magnetico ed elettrico in questo caso si scrivono

$$H_i - H_r = H_t, \quad (25)$$

e

$$E_i \cos \vartheta_i + E_r \cos \vartheta_r = E_t \cos \vartheta_t. \quad (26)$$

Ancora, poiché $H = E/Z = nE/Z_0$, l'eq. (25) si può scrivere come

$$E_i - E_r = \eta E_t, \quad (27)$$

mentre, poiché $\vartheta_r = \vartheta_i$, la (26) diventa

$$E_i + E_r = \chi E_t, \quad (28)$$

dove η e χ sono definiti nelle eqq. (19) e (18).

Le equazioni (27) e (28) costituiscono un sistema lineare che fornisce le relazioni

$$E_r = \frac{\chi - \eta}{\chi + \eta} E_i, \quad E_t = \frac{2}{\chi + \eta} E_i, \quad (29)$$

e quindi i coefficienti di riflessione e di trasmissione per polarizzazione H risultano

$$r_H = \frac{\chi - \eta}{\chi + \eta}, \quad t_H = \frac{2}{\chi + \eta}, \quad (30)$$

rispettivamente. Anche in questo caso, scambiando n_1 ed n_2 , insieme a ϑ_i e ϑ_t , i coefficienti di riflessione e trasmissione risultano

$$r'_H = -r_H, \quad t'_H = \eta \chi t_H. \quad (31)$$

3 Discussione

Concentriamo ora la nostra attenzione sui coefficienti di riflessione r_E e r_H . Notiamo, innanzitutto, che le loro espressioni coincidono per le due polarizzazioni quando l'angolo di incidenza è uguale a zero, e coincidono con le espressioni ottenute per il caso di incidenza normale.

Studiamo gli andamenti di r_E e r_H in funzione dell'angolo di incidenza, considerando dapprima il caso $\eta > 1$ (cioè quando l'incidenza avviene dalla parte del mezzo con indice di rifrazione minore). Gli andamenti dei moduli dei coefficienti di riflessione sono mostrati in Fig. 4, per $\eta = 1.5$.

Si vede che esiste un valore di ϑ_i tale che $r_H = 0$, mentre ciò non succede per r_E . Ciò significa che, per quel valore dell'angolo di incidenza, qualunque sia la polarizzazione del campo incidente, il campo riflesso risulta polarizzato linearmente, con il campo elettrico che oscilla nella direzione ortogonale al piano di incidenza.

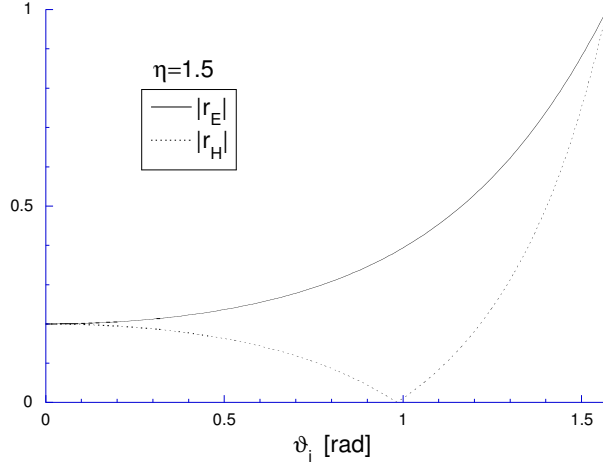


Figure 4: Modulo del coefficiente di riflessione, per polarizzazioni E e H, in funzione dell'angolo di incidenza ($\eta > 1$).

Come è evidente dall'eq. (30), il valore di ϑ_i per cui r_H si annulla (chiamato *angolo di Brewster*, ϑ_B) è quello per cui $\eta = \chi$. Utilizzando le definizioni (19) e (18), tale condizione risulta essere equivalente a

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos \vartheta_t}{\cos \vartheta_i}, \quad (32)$$

da cui, utilizzando la legge di Snell in Eq. (11), cioè $n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_t$, si ricava

$$\sin(2\vartheta_i) = \sin(2\vartheta_t), \quad (33)$$

che è soddisfatta per $2\vartheta_i = \pi - 2\vartheta_t$. Pertanto, in tale situazione valgono le seguenti relazioni:

$$\vartheta_i + \vartheta_t = \pi/2 \quad \text{per } \vartheta_i = \vartheta_B, \quad (34)$$

o, equivalentemente,

$$\tan \vartheta_B = \eta, \quad (35)$$

quest'ultima relazione discendendo direttamente dall'eq. (32), in cui si è posto $\cos \vartheta_t = \cos(\pi/2 - \vartheta_i) = \sin \vartheta_i$.

Nel caso $\eta < 1$ (cioè quando l'incidenza avviene dalla parte del mezzo con indice di rifrazione maggiore) gli andamenti di r_E e r_H , oltre all'angolo di Brewster, mostrano la presenza di un altro fenomeno interessante: la

riflessione totale. Già dalle stesse leggi di Snell si vede che, se $n_2 < n_1$, esiste un angolo di incidenza (detto *angolo limite*, o *angolo critico*, ϑ_L) tale che il corrispondente angolo di trasmissione è pari a $\pi/2$, cioè

$$n_1 \sin \vartheta_L = n_2 \sin(\pi/2) = n_2 \quad \Rightarrow \quad \sin \vartheta_L = \eta . \quad (36)$$

Nei testi di ottica di base viene detto, correttamente, che per valori dell'angolo di incidenza maggiori dell'angolo limite non si ha alcuna onda trasmessa, il campo viene completamente riflesso ed è per questo motivo che si parla di riflessione totale. Vediamo ora come questo risultato si ottenga dai valori che il coefficiente di riflessione assume per $\vartheta_i \geq \vartheta_L$.

Intanto, quando $\vartheta_i = \vartheta_L$ si ha $\sin \vartheta_t = 1$ e quindi $\cos \vartheta_t = 0$. Perciò $\chi = 0$ e, dalle eqq. (21) e (30),

$$|r_E| = |r_H| = 1 \quad (\vartheta_i = \vartheta_L) . \quad (37)$$

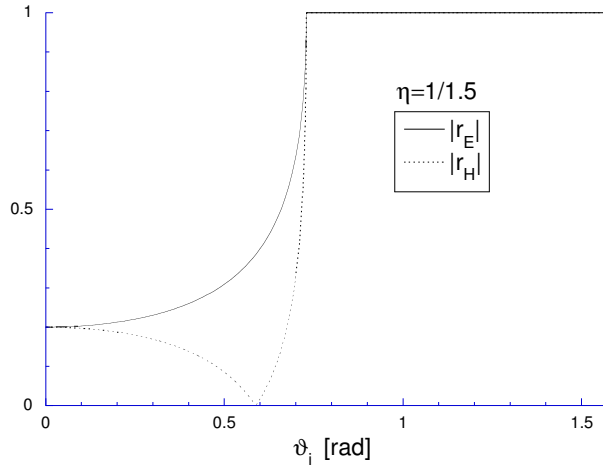


Figure 5: Modulo del coefficiente di riflessione, per polarizzazioni E e H, in funzione dell'angolo di incidenza ($\eta < 1$).

Il caso $\vartheta_i > \vartheta_L$ è leggermente più complicato. In questo caso, infatti, dalla legge di Snell per la rifrazione si ha

$$\sin \vartheta_t = \frac{1}{\eta} \sin \vartheta_i > \frac{1}{\eta} \sin \vartheta_L = 1 , \quad (38)$$

per cui $\sin \vartheta_t > 1$, e ϑ_t non può essere un angolo reale. In questo caso, si ha

$$\cos \vartheta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_t} , \quad (39)$$

che, essendo dato dalla radice quadrata di un numero negativo, è una quantità immaginaria. Lo stesso deve valere per χ , che può essere scritto nella forma

$$\chi = \frac{\cos \vartheta_t}{\cos \vartheta_i} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_t}}{\cos \vartheta_i} = i \frac{\sqrt{\sin^2 \vartheta_t - 1}}{\cos \vartheta_i} = i\chi_R \quad (\chi_R \text{ reale}), \quad (40)$$

per cui

$$r_E = \frac{1 - i\eta\chi_R}{1 + i\eta\chi_R}, \quad r_H = \frac{\eta - i\chi_R}{\eta + i\chi_R}. \quad (41)$$

Pertanto, sia r_E che r_H sono numeri complessi, ma sono scritti come il rapporto tra un numero complesso ed il suo coniugato, per cui i loro moduli sono entrambi unitari. Ciò significa che il campo riflesso è generalmente sfasato rispetto al campo incidente, ma la sua ampiezza è sempre uguale a quella del campo incidente. Si continuerà quindi a parlare di riflessione totale. Gli andamenti dei moduli dei coefficienti di riflessione sono mostrati in Fig. 5

È interessante notare come, in questa situazione, il coefficiente di trasmissione (per il campo) non è nullo per cui, immediatamente dopo la superficie di separazione tra i due mezzi, in realtà esiste un'onda trasmessa. Però, come si può verificare facilmente, tale onda non trasporta energia perché la componente z del suo vettore d'onda è k_{tz} è puramente immaginaria. Infatti, analogamente a quanto fatto a proposito dell'eq. (40), possiamo porre $\beta = \sqrt{\sin^2 \vartheta_t - 1}$, con β reale e positivo, per cui $k_{tz} = k_t \cos \vartheta_t = ik_t\beta$. L'espressione dell'onda trasmessa diventa pertanto

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_t e^{i(k_{tx}x + k_{ty}y - \omega t)} e^{-k_t\beta z}, \quad (42)$$

e la sua ampiezza si attenua esponenzialmente lungo z . Onde di questo tipo prendono il nome di *onde evanescenti*.