Trasmissione e riflessione di onde piane su interfacce dielettriche (incidenza normale)

Corso di Ottica - Prof. Massimo Santarsiero

Consideriamo il caso di un'onda e.m. piana armonica, di pulsazione ω_i, che incide *normalmente* sulla superficie di separazione tra due mezzi dielettrici (ILO). Supponiamo che la permeabilità magnetica di entrambi i mezzi sia approssimativamente pari a quella del vuoto e indichiamo con n_1 ed n_2 gli indici di rifrazione rispettivamente del primo e del secondo mezzo, con

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_r^{(1)}}\ ; \qquad n_2 = \sqrt{\varepsilon_r^{(2)}}\ , \tag{1}$$

dove $\varepsilon_r^{(1)}$ e $\varepsilon_r^{(2)}$ sono le costanti dielettriche relative dei due mezzi.

Se l'onda incide sulla superficie provenendo dal mezzo 1 (vedi Fig. 1), ci aspettiamo che essa continui a propagarsi nel secondo mezzo, eventualmente con valori della pulsazione e dei campi differenti da quelli iniziali. Se il valore massimo del campo elettrico associato all'onda incidente vale E_i, ci proponiamo quindi di determinare i parametri dell'onda che viene trasmessa nel mezzo 2: in particolare, la sua direzione di propagazione, la pulsazione (ω_t) ed il valore massimo del campo elettrico (E_t), da cui potremo ottenere l'intensità dell'onda trasmessa. Per fare questo, faremo uso delle condizioni di continuità per i campi, derivate dalle equazioni di Maxwell.

Sulla superficie di separazione tra i due mezzi non sono presenti cariche libere nè correnti impresse, per cui le suddette condizioni implicano la continuità delle componenti *tangenziali* di **E** e di **H**, e la continuità delle componenti *normali* di **D** e di **B**. Nella situazione che stiamo considerando, poiché l'onda incidente è piana, i suoi vettori elettrico e magnetico saranno entrambi paralleli all'interfaccia. Ciò implica, in particolare, che anche i corrispondenti campi per l'onda trasmessa sono paralleli all'interfaccia perché, per le condizioni su **D** e su **B**, anche nel secondo mezzo non possono esservi componenti normali dei campi. Inoltre, considerando anche le condizioni su **E** e di **H**, si deduce che i campi elettrici e i campi magnetici delle onde incidente e trasmessa sono esattamente paralleli tra loro. L'onda trasmessa sarà

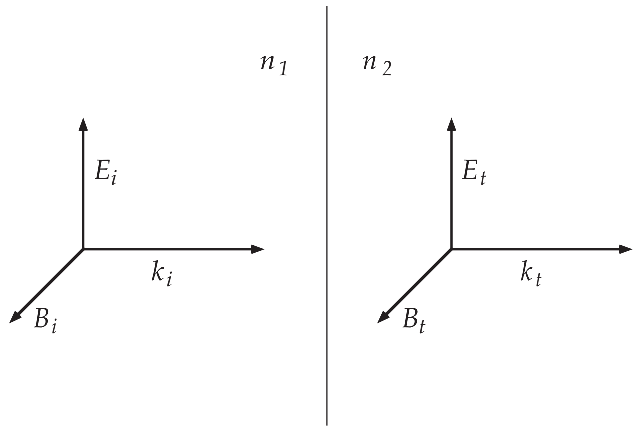

Figure 1:

pertanto anch'essa un'onda piana che si propaga lungo la direzione ortogonale alla superficie.

Applichiamo ora le condizioni di continuità di **E** e di **H** per determinare i parametri dell'onda trasmessa. Scriviamo l'espressione del campo elettrico nel primo mezzo in funzione del tempo, per un generico punto dell'interfaccia (posta, per semplicità, in $z = 0$):

$$E(t) = E_i e^{-i\omega_i t} \ , \tag{2}$$

che dovrà uguagliare il campo elettrico dell'onda trasmessa in ogni istante. Pertanto si deve avere

$$E_i e^{-i\omega_i t} = E_t e^{-i\omega_t t} \qquad \text{(per ogni } t) \ . \tag{3}$$

L'unico modo per soddisfare questa equazione per ogni valore di t è imporre che sia $\omega_i = \omega_t$. La frequenza delle due onde è quindi la stessa. La condizione (3) si riduce quindi a richiedere che

$$E_i = E_t \ . \tag{4}$$

Esattamente le stesse considerazioni possono essere fatte per il campo magnetico **H**, che portano all'analoga condizione

$$H_i = H_t \ . \tag{5}$$

Ora, è chiaro che le due condizioni (4) e (5) non possono essere soddisfatte contemporaneamente. Infatti, noi sappiamo che le ampiezze dei vettori elettrico e magnetico di un'onda piana sono legati tra loro dall'impedenza caratteristica del mezzo in cui l'onda si propaga:

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \simeq \frac{Z_0}{n} \ , \tag{6}$$

dove Z_0 è l'impedenza caratteristica del vuoto e n l'indice di rifrazione del mezzo. Nel nostro caso, se le impedenze caratteristiche dei due mezzi (Z_1 e Z_2) sono diverse e si ha $H_i = H_t$, dovrà essere necessariamente

$$E_t = Z_2 H_t = Z_2 H_i = \frac{Z_2}{Z_1} E_i \neq E_i \ . \tag{7}$$

Naturalmente questo non significa che le condizioni al contorno non sono rispettate nel caso che stiamo considerando, ma semplicemente che il fenomeno della trasmissione attraverso un'interfaccia dielettrica presenta aspetti che non sono stati presi in considerazione nel nostro semplice modello. In particolare, bisognerà ipotizzare nel mezzo 1 la presenza di un'altra onda piana, *riflessa* dalla superficie, che si propaga nella direzione opposta a quella incidente e che consente alla soluzione dell'equazione delle onde di soddisfare le opportune condizioni al contorno sull'interfaccia. Una situazione analoga la si incontra quando si cercano le soluzioni dell'equazione delle onde per una corda vincolata ad un estremo. In quel caso, per far sì che la corda non si muova in corrispondenza del vincolo bisogna aggiungere, alla soluzione "progressiva" dell'equazione delle onde, una soluzione "regressiva" di ampiezza uguale all'altra ma di segno opposto.

La situazione da cui bisogna partire è quindi quella mostrata in Fig. 2, in cui è stata aggiunta l'onda piana riflessa, avente campo elettrico massimo E_r. Alcune delle conclusioni raggiunte in precedenza continuano a valere anche in questo caso: in particolare, la frequenza delle tre onde deve essere la stessa e i vettori elettrici e magnetici delle tre onde devono essere tutti paralleli. Ciò significa che l'onda riflessa si propaga lungo la direzione dell'onda incidente, nel verso opposto (le cose cambiano se l'incidenza non è normale). Si noti che, poiché i vettori $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ devono necessariamente costituire una terna trirettangola destrorsa per entrambe le onde (quella incidente e quella riflessa), se si sceglie come verso positivo del campo elettrico quello del campo incidente, per il campo magnetico si dovrà scegliere il verso opposto a quello del campo incidente.

Tenendo conto della presenza dei due campi nel mezzo 1 e dell'orientazione

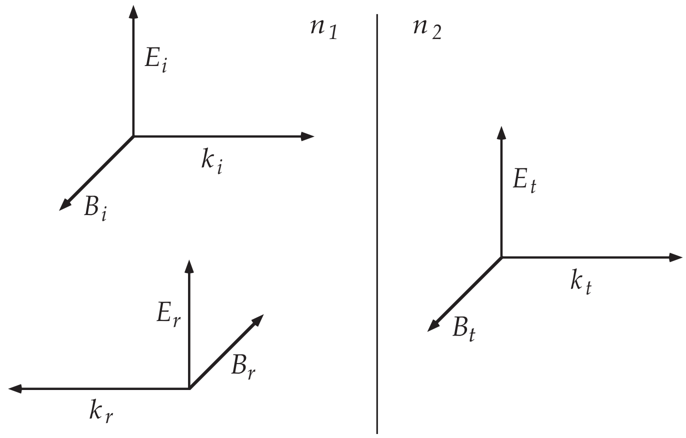

Figure 2:

dei vettori elettrico e magnetico, le relazioni di continuità (4) e (5) vengono sostituite da

$$E_i + E_r = E_t \tag{8}$$

e

$$H_i - H_r = H_t \ . \tag{9}$$

Quest'ultima equazione può essere scritta in termini dei corrispondenti campi elettrici, utilizzando le impedenze caratteristiche dei due mezzi, cioè

$$\frac{E_i - E_r}{Z_1} = \frac{E_t}{Z_2} \ , \tag{10}$$

da cui

$$E_i - E_r = \eta \ E_t \ , \tag{11}$$

dove è stato introdotto il parametro

$$\eta = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_2}{n_1} \ . \tag{12}$$

Le equazioni (8) e (11) costituiscono un sistema lineare che può essere facilmente risolto in funzione del campo E_i, fornendo le relazioni

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{1-\eta}{1+\eta}\, E_i \ , \\
E_t &= \frac{2}{1+\eta}\, E_i \ ,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

che danno le ampiezze dei campi elettrici delle onde riflessa e trasmessa in funzione di quello dell'onda incidente. Dalle relazioni (13) si possono definire i *coefficienti di riflessione* e di *trasmissione*, come

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{E_r}{E_i} = \frac{1-\eta}{1+\eta} \ , \\
t &= \frac{E_t}{E_i} = \frac{2}{1+\eta} \ ,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

rispettivamente. Bisogna fare attenzione a non confondere questi coefficienti, che esprimono i rapporti tra i *campi*, ed analoghe quantità che esprimono invece i rapporti tra le *intensità*, di cui parleremo dopo.

Discutiamo ora brevemente alcune conseguenze delle (14). Intanto, è immediato verificare che se i due mezzi hanno uguale indice di rifrazione (e quindi $\eta = 1$) l'interfaccia non ha alcun effetto sulla propagazione dell'onda incidente e non vi è alcuna onda riflessa. Poi, mentre t è una quantità reale sempre positiva, il coefficiente di riflessione r è anch'esso reale, ma può essere positivo o negativo a seconda che η sia minore o maggiore di 1. Questo significa che il campo trasmesso è sempre in fase con il campo incidente, mentre il campo riflesso è in fase se $n_1 > n_2$ ed è in controfase se $n_1 < n_2$.

Vediamo ora cosa succede se la radiazione incide sulla superficie di separazione dalla direzione opposta. Per calcolare i relativi coefficienti di riflessione (r') e di trasmissione (t'), è sufficiente scambiare tra loro gli indici di rifrazione dei due mezzi. Pertanto $\eta' = 1/\eta$ e, come si ricava facilmente,

$$
\begin{aligned}
r' &= -r \ , \\
t' &= \eta\, t \ .
\end{aligned}
\tag{15}
$$

In diverse applicazioni assumono particolare importanza i coefficienti di riflessione e di trasmissione *in intensità*, R e T, definiti come i rapporti tra le intensità delle onde riflessa e trasmessa e quella dell'onda incidente. Ricordando la definizione di intensità, cioè

$$I = \frac{E^2}{2Z}, \tag{16}$$

si ottiene, per i due coefficienti,

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_r}{I_i} = r^2 = \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^2 \ , \\ T &= \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_1}{Z_2}\, t^2 = \frac{4\eta}{(1+\eta)^2} \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Come è facile verificare, si ottengono gli stessi risultati per R' e T', mentre, come è richiesto dalla conservazione dell'energia, si ha sempre $R + T = R' + T' = 1$.

Per avere un'idea di quali valori possano assumere tali coefficienti in una situazione usuale, vediamo che per un'interfaccia aria-vetro, a frequenze ottiche, si ha $\eta \simeq 1.5$, per cui $R \simeq 0.04$, e lo stesso valore si ottiene per un'interfaccia vetro-aria. Questo significa che la potenza di un'onda luminosa si riduce circa del 4% ogni volta che l'onda attraversa una di tali interfacce.

Un'altra situazione particolarmente interessante è quella di un'onda piana che incide sulla superficie, piana, di un conduttore ideale. In questo caso il campo elettrico nel mezzo 2 deve essere nullo, per cui la condizione (8) assume la forma

$$E_i + E_r = 0 \ , \tag{18}$$

che è sufficiente a determinare completamente i campi dell'onda riflessa. In particolare si vede che il coefficiente di riflessione in campo (r) è pari a -1 e quello in intensità (R) a 1. Il conduttore si comporta quindi come uno specchio perfetto. Inoltre, poiché le ampiezze delle due onde presenti sono uguali, nel mezzo 1 si formerà un sistema di onde stazionarie con piani nodali paralleli alla superficie del conduttore, in cui i campi sono identicamente nulli, distanti $\lambda/2$ l'uno dall'altro.