Esame di Fisica Generale I per Elettronici (Primo modulo)

Prova del 12 novembre 2001

Soluzioni dei problemi

PROBLEMA N.1

La risultante delle forze agenti sulla massa è (n.b.: i simboli in grassetto indicano vettori)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} ,$$

dove $\mathbf{R}$ è la reazione vincolare dell'asta. Tale forza è responsabile del moto circolare della massa per cui, se ℓ è la lunghezza dell'asta, deve valere

$$F_\perp = \frac{mv^2(\vartheta)}{\ell} .$$

Proiettando $\mathbf{F}$ lungo la direzione dell'asta si ha

$$F_\perp = mg\cos\vartheta - R ,$$

mentre $v(\vartheta)$ lo si determina dalla conservazione dell'energia:

$$mg\ell(1-\cos\vartheta) = \frac{1}{2}mv^2(\vartheta) \qquad \Rightarrow \qquad v^2(\vartheta) = 2g\ell(1-\cos\vartheta) .$$

1.1) Poiché l'asta ha massa trascurabile, la reazione da essa esercitata sulla massa ($\mathbf{R}$) è uguale ed opposta a quella esercitata sul suolo ($\mathbf{R}_s$). Richiedendo quindi $R_s = R = 0$ si ha, dalle formule precedenti,

$$mg\cos\vartheta_0 = 2mg(1-\cos\vartheta_0) \qquad \Rightarrow \qquad \cos\vartheta_0 = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta_0 \simeq 48.2^\circ .$$

1.2) Come sopra, ma per un generico valore di ϑ,

$$R_s = mg(3\cos\vartheta - 2) .$$

1.3) Affinché l'asta non scivoli, la forza di attrito statico deve essere pari alla componente orizzontale di $\mathbf{R}_s$ e minore della forza di attrito massima che il vincolo può esercitare. Quindi

$$F_{\rm att} = R\sin\vartheta < \mu R\cos\vartheta \qquad \Rightarrow \qquad \mu > \tan\vartheta .$$

In particolare, affiché l'angolo possa arrivare fino a ϑ_0, bisogna che sia

$$\mu > \mu_{\rm min} = \tan\vartheta_0 \simeq 1.12 .$$

PROBLEMA N.2

2.1) Elevando al quadrato le espressioni delle due coordinate, divise rispettivamente per a e per b, e sommandole tra loro si ha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ,$$

per cui il moto si svolge lungo un'ellisse centrata sugli assi cartesiani e avente semiassi a e b.

2.2) Derivando rispetto al tempo le leggi orarie si ottengono le componenti della velocità:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2\alpha t \, a \, \sin(\alpha t^2) \\ \\ \dot{y}(t) = 2\alpha t \, b \, \cos(\alpha t^2) \end{cases}$$

che, calcolate per $t = t_1$, danno

$$\begin{cases} \dot{x}(t_1) = -a\sqrt{2\pi\alpha} \\ \\ \dot{y}(t_1) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = a\sqrt{2\pi\alpha} \simeq 7.09 \text{ m/s} \ .$$

2.3) Sfruttiamo la relazione che lega il raggio di curvatura della traiettoria alla velocità e all'accelerazione normale del punto:

$$R = \frac{v^2}{a_n} \ .$$

Quando $t = t_1$ il punto si trova in $(0, b)$ e la sua velocità (di modulo v_1) è ortogonale all'asse y, per cui la componente normale della sua accelerazione coincide con la componente y dell'accelerazione, cambiata di segno, cioè

$$a_n = -\ddot{y}(t_1) = -2\alpha b \left[\cos(\alpha t_1^2) - 2\alpha t_1^2 \sin(\alpha t_1^2)\right] = 2\alpha b\pi$$

per cui

$$R = \frac{v_1^2}{2\alpha b\pi} = \frac{a^2}{b} = 4 \text{ m} \ .$$