Alcune applicazioni del teorema di Gauss

Diamo innanzitutto la definizione di *flusso del vettore* $\vec{v}$ attraverso la superficie S. Per cominciare col caso più semplice, consideriamo un fluido (per esempio, acqua) che si muove con velocità $\vec{v}$ in un tubo di sezione S. Il flusso di $\vec{v}$ attraverso S è definito come

$$\Phi_S(\vec{v}) = vS \ , \tag{1}$$

e rappresenta il volume di liquido che scorre nel tubo nell'unità di tempo. La stessa definizione può essere utilizzata per calcolare il flusso che passa attraverso una superficie piana quando questa sia immersa in un fluido che si muove con velocità $\vec{v}$. Per utilizzare la definizione (1) è necessario che la velocità del fluido sia uniforme su tutta la superficie (cio che il vettore $\vec{v}$ sia esattamente lo stesso in tutti i punti della superficie) e che il piano della superficie sia perpendicolare a $\vec{v}$. Si pensi, per esempio, all'acqua che attraversa una racchetta da tennis immersa in un fiume.

Naturalmente la definizione deve essere leggermente modificata quando la superficie non sia disposta perpendicolarmente alla direzione del moto del fluido. Infatti, per esempio, il flusso deve risultare nullo quando il piano della superficie considerata sia parallelo alla direzione del moto del fluido. A tale scopo, possiamo definire un versore (chiamiamolo $\vec{n}$) che consenta di individuare il piano sul quale giace la superficie. Prendiamo quindi $\vec{n}$ con direzione *perpendicolare* alla superficie stessa, e scegliamo di orientarlo in uno dei due modi possibili. Scegliendo il verso di $\vec{n}$ abbiamo orientato, in qualche modo, anche la superficie.

Quindi, in questa situazione più generale, se chiamiamo ϑ l'angolo che si forma tra i vettori $\vec{n}$ e $\vec{v}$ potremo definire il flusso di $\vec{v}$ attraverso S come

$$\Phi_S(\vec{v}) = vS\cos\vartheta \ . \tag{2}$$

In questo modo, infatti, torna la definizione data nell'eq. (1) quando la superficie è perpendicolare alla direzione di moto del fluido ($\vartheta = 0$, e quindi $\cos\vartheta = 1$), mentre viene uguale a zero quando la superficie è parallela a tale direzione ($\vartheta = 90°$, e quindi $\cos\vartheta = 0$). Una maniera più sintetica per esprimere la relazione (2) consiste nell'utilizzare la definizione di prodotto scalare e scrivere

$$\Phi_S(\vec{v}) = \vec{v}\cdot\hat{n}\,S \ . \tag{3}$$

Notiamo che la scelta di uno dei dei versi possibili per $\hat{n}$ determina il segno del flusso di $\vec{v}$ attraverso S. Infatti, indicando con $\hat{n}'$ il versore opposto a $\hat{n}$ (cioè $\hat{n}' = -\hat{n}$) e con $\Phi'_S(\vec{v})$ il flusso calcolato utilizzando $\hat{n}'$, si ha $\Phi'_S(\vec{v}) = -\Phi_S(\vec{v})$.

La definizione può essere ulteriormente generalizzata per poter considerare anche flussi attraverso superfici che non siano piane. In questi casi, infatti, bisogna tener conto che l'angolo ϑ dipende dal particolare punto della superficie che si sta considerando. Allora bisogna dividere la superficie S in tante superfici *elementari* (diciamo, $\mathrm{d}S$), piccole a piacere, tanto piccole da poter considerare ciascuna di esse come piana, e tali quindi da poter definire un angolo ϑ per ciascuna di esse. A questo punto potremo calcolare il flusso che passa attraverso ciascuna di queste superfici elementari mediante la definizione (3), cioè $\vec{v} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S$, e alla fine sommare tutti i contributi per ottenere il flusso totale. Rimanendo nell'esempio della racchetta immersa nel fiume, possiamo pensare che ora la racchetta (che è piana) sia sostituita da un retino per farfalle (che non è piano). In termini matematici, tale somma corrisponde ad un integrale, che scriveremo nella forma

$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_{\mathrm{S}} \vec{v} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S \ , \tag{4}$$

che corrisponde alla definizione più generale di *flusso del campo vettoriale* $\vec{v}$ *attraverso la superficie (orientata)* S.

Un caso particolare di flusso è quello che si calcola attraverso una *superficie chiusa*, che è una superficie che racchiude un volume. In questo caso è consuetudine orientare i versori normali alla superficie nel verso uscente dal volume racchiuso. Il flusso risulterà diverso da zero (in particolare, positivo) se all'interno della superficie c'è una *sorgente* che genera il fluido che poi passerà attraverso la superficie. L'integrale che esprime il flusso attraverso la superficie chiusa S si indica nel seguente modo:

$$\Phi_S(\vec{v}) = \oint_{\mathrm{S}} \vec{v} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S \ . \tag{5}$$

E' importante sottolineare che la superficie in questione non deve necessariamente corrispondere a qualcosa di fisicamente presente nello spazio, ma può essere benissimo una superficie ideale nello spazio.

Questa definizione di flusso può essere applicata a qualunque vettore. In particolare, possiamo considerare il flusso del *campo elettrostatico* attraverso una superficie, e quindi sostituire $\vec{E}$ a $\vec{v}$ nelle espressioni precedenti. E questo ci porta al teorema di Gauss. Il teorema di Gauss riguarda per l'appunto il flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa. Esso afferma che, qualunque sia la forma della superficie, e qualunque sia la distribuzione delle cariche elettriche nello spazio,

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{int})}}{\varepsilon_0} \ , \tag{6}$$

dove $Q_{tot}^{(\mathrm{int})}$ è la carica *totale* contenuta all'*interno* della superficie, e ε_0 è la costante dielettrica del vuoto, legata alla costante k presente nella legge di Coulomb dalla relazione $\varepsilon_0 = 1/(4\pi k)$.

Sottolineiamo il fatto che per il calcolo di $Q_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{int})}$ bisogna considerare la somma (algebrica, cioè considerando i segni) di tutte e sole le cariche presenti all'interno della superficie, e quindi le cariche esterne alla superficie non danno contributo al flusso. Facciamo inoltre notare che il calcolo di tale flusso potrebbe essere estremamente complicato, anche per una singola carica elettrica puntiforme (q), per una superficie chiusa generica. Viceversa, utilizzando il teorema di Gauss, tale flusso risulta semplicemente pari a q/ε_0 se la superficie racchiude la carica, oppure zero se la superficie non la racchiude.

Il teorema di Gauss può essere utilizzato per calcolare il valore del campo elettrico generato da distribuzioni di carica particolari, dotate di particolari simmetrie, senza dover utilizzare la sovrapposizione dei campi generati da un insieme di cariche puntiformi. Prendiamo come esempio il caso di una carica Q, distribuita all'interno di una sfera di raggio R con densità di carica dipendente solo dalla distanza (chiamiamola r) dal centro della sfera, cioè $\rho(r)$. Il problema gode quindi di simmetria sferica.

Innanzitutto, possiamo dare la relazione che lega $\rho(r)$ alla carica totale della sfera. Infatti, dalla definizione di densità di carica si ha

$$Q = 4\pi \int_0^R \rho(r)\, r^2 \,\mathrm{d}r \ . \tag{7}$$

Supponiamo ora di voler calcolare il campo elettrico in un generico punto dello spazio. Una maniera per calcolare tale campo potrebbe consistere nel considerare la sfera come costituita da un numero molto grande di cariche puntiformi, calcolare il campo elettrico dovuto a ciascuna di queste cariche, e infine sommare tutti i contributi al campo ottenuti in tal modo. La tecnica è molto complessa e laboriosa, anche considerando il fatto che ciascun contributo al campo è un vettore, per cui la somma dei contributi è una somma vettoriale. Viceversa, l'uso del teorema di Gauss porta alla soluzione in un modo estremamente semplice.

Sfruttiamo, innanzitutto, la simmetria del problema per affermare che il campo elettrico nel punto considerato non può che essere diretto lungo la retta congiungente il punto e il centro della sfera. Inoltre, sempre per la simmetria del problema, l'intensità del campo elettrico (E) deve dipendere soltanto dalla distanza tra il punto considerato e il centro della sfera, e non può dipendere dalle coordinate sferiche angolari (latitudine e longitudine) del punto considerato.

Tenendo conto di queste considerazioni risulta immediato calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una superficie sferica S (fittizia), che chiameremo *superficie di Gauss*, che abbia centro coincidente col centro della sfera carica, e raggio r. Infatti, con riferimento a quanto detto prima riguardo al calcolo del flusso per una superficie generica, risulta che il flusso è lo stesso per tutte le superfici elementari $\mathrm{d}S$ che costituiscono la sfera di raggio r, e che tale flusso elementare è pari a $E\,\mathrm{d}S$ (essendo $\vartheta = 0$ per tutte le superfici elementari). Quindi, dalla definizione di flusso, il flusso totale attraverso S risulta pari a

$$\Phi_S(\vec{E}) = E(r) \oint_{\mathrm{S}} \mathrm{d}S = E(r)\, S = 4\pi r^2 E(r) \ , \tag{8}$$

in quanto la superficie della sfera fittizia è $S = 4\pi r^2$.

Per poter applicare il teorema di Gauss ci serve conoscere la carica totale contenuta nella superficie di Gauss, cioè $Q_{\rm tot}^{\rm (int)}$. Conviene distinguere i due casi di $r > R$ (punto esterno alla sfera) e $r < R$ (punto interno alla sfera). Nel primo caso $Q_{\rm tot}^{\rm (int)}$ semplicemente coincide con la carica totale della sfera. Quindi, dalla (6) e dalla (8),

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \, , \tag{9}$$

da cui

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2} \qquad (r > R) \, . \tag{10}$$

E' interessante notare che questa espressione coincide con quella che si sarebbe ottenuta per il campo generato da una singola carica elettrica puntiforme di valore Q, posta nel centro della sfera carica, per la quale può essere utilizzata la legge di Coulomb. Inoltre, essa è assolutamente indipendente dalla particolare forma della funzione $\rho(r)$, per cui vale per qualunque distribuzione di carica, purché a simmetria sferica. Infine, notiamo che il presente risultato può essere applicato anche alla forza gravitazionale esercitata da corpi aventi distribuzioni di massa dotate di simmetria sferica.

Vediamo ora cosa succede in punti interni alla sfera ($r < R$). In questo caso il calcolo del flusso di $\vec{E}$ fornisce esattamente lo stesso risultato della (8), mentre la carica totale contenuta nella sfera di Gauss sarà solo una frazione, che dipenderà da r, della carica totale della sfera di raggio R. Per comodità indichiamo con $Q(r)$ la carica contenuta nella sfera di Gauss, che può essere calcolata come

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r)\, r^2\, \mathrm{d}r \, . \tag{11}$$

Utilizzando infine il teorema di Gauss, otteniamo

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \, , \tag{12}$$

da cui

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q(r)}{r^2} \qquad (r < R) \, , \tag{13}$$

che consente, una volta calcolato l'integrale nella (11), di ottenere l'espressione esplicita del campo in ogni punto interno alla sfera carica.

Conviene a questo punto prendere in considerazione degli esempi concreti di distribuzioni di carica. Il caso più semplice è quello per cui tutta la carica Q è distribuita *esclusivamente sulla superficie* della sfera di raggio R, mentre non vi è alcuna carica all'interno. In questo caso la carica contenuta nella sfera di Gauss è sempre nulla se $r < R$, per cui $Q(r) = 0$. Dalla (13) risulta quindi che il campo all'interno della sfera è ovunque nullo. Questo risultato non è assolutamente banale (tranne che per il centro della sfera) e sarebbe stato piuttosto complicato ricavarlo a partire dalla sovrapposizione dei

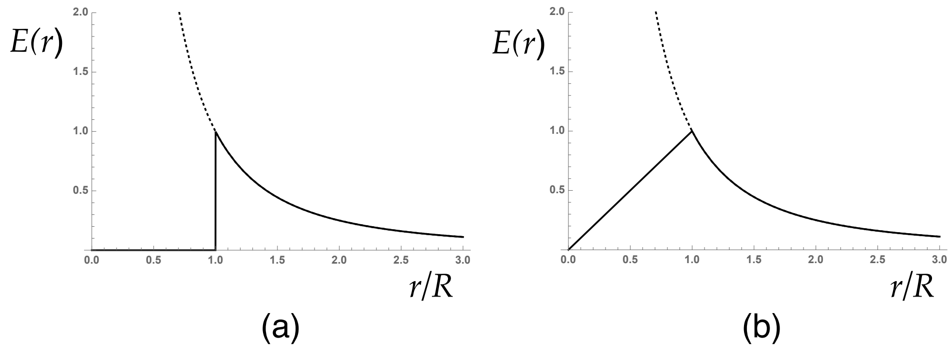

Figure 1: Andamento dell'ampiezza del campo elettrico in funzione di r/R per il caso di una sfera di raggio R uniformemente carica sulla superficie (a) e nel volume (b).

campi prodotti da cariche puntiformi distribuite sulla superficie della sfera. L'andamento del campo è mostrato in fig. 1(a).

Un altro caso piuttosto semplice da trattare è quello per cui la carica è distribuita uniformemente *all'interno* della sfera di raggio R. In questo caso la densità di carica, uniforme, è data da

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\,\pi\,R^3}\ . \tag{14}$$

Il calcolo di $Q(r)$ fornisce, tramite la (11),

$$Q(r) = Q\ \frac{r^3}{R^3} \tag{15}$$

da cui, per la (13),

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \frac{r}{R^3} \qquad\qquad (r < R) \tag{16}$$

e il campo cresce linearmente all'aumentare della distanza del centro.

Prima di passare a distribuzioni di carica con proprietà di simmetria differenti, calcoliamo anche il potenziale (elettrostatico) in tutto lo spazio per i due casi trattati adesso. Ricordiamo che il potenziale elettrostatico in un punto dello spazio corrisponde all'energia potenziale elettrostatica che possiede la carica unitaria quando si trova in quel punto. Indichiamo con $V(\vec{r})$ tale potenziale. Il potenziale, quindi, come l'energia potenziale, richiede di definire una posizione di riferimento nella quale esso è posto convenzionalmente uguale a zero. In molti casi, come quelli studiati adesso, è possibile e conveniente scegliere un punto all'infinito come posizione di riferimento.

Nel casi a simmetria sferica studiati prima, è chiaro che anche il potenziale dovrà rispettare la stessa simmetria, e perciò sarà funzione della sola distanza r dal centro del sistema. Per quanto detto, potremo scrivere

$$V(r) = \int_r^\infty E(r)\,\mathrm{d}r\ . \tag{17}$$

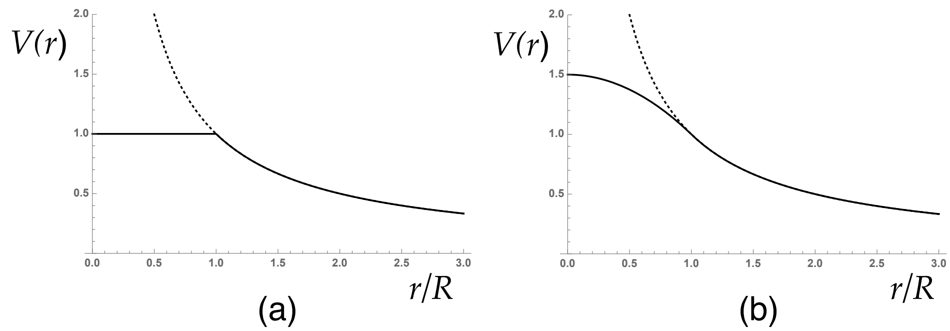

Figure 2: Andamento del potenziale in funzione di r/R per il caso di una sfera di raggio R uniformemente carica sulla superficie (a) e nel volume (b).

Si tratta di calcolare l'integrale nella (17) tenendo conto delle espressioni trovate per $E(r)$.

Poichè il campo elettrico esternamente alla sfera carica non dipende dalla particolare distribuzione di carica (eq. (10)) si ha, in ogni caso,

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, r} \qquad (r > R)\,, \tag{18}$$

come per una carica puntiforme.

In punti interni alla sfera, viceversa, il potenziale dipenderà da come è distribuita la carica e potremo scriverlo come

$$V(r) = \int_r^R E(r)\,\mathrm{d}r + \int_R^\infty E(r)\,\mathrm{d}r = \int_r^R E(r)\,\mathrm{d}r + \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R}\,. \tag{19}$$

In particolare, nel caso di carica distribuita esclusivamente sulla superficie, il campo elettrico è identicamente nullo all'interno della sfera, per cui l'integrale che compare nel termine più a destra nella (19) è nullo e si ha

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R} \qquad (r < R)\,, \tag{20}$$

che è costante.

Nell'altro caso (densità di carica uniforme nel volume), usando la (16), dopo qualche passaggio si ottiene

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\,\varepsilon_0\, R}\left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (r < R)\,. \tag{21}$$

Gli andamenti del potenziale nei due casi sono mostrati in fig. 2.

Vediamo ora l'applicazione del teorema di Gauss al caso di una distribuzione di carica superficiale uniforme, diciamo σ, su un *piano infinito*. Per fissare le idee, scegliamo un sistema di riferimento in cui il piano yz coincide con piano di carica. Pertanto, l'asse x sarà perpendicolare a tale piano, che corrisponde a $x = 0$. Ragioni di simmetria impongono che il campo elettrico in ogni punto dello spazio sia perpendicolare al piano di carica e che esso non dipenda dalle coordinate y e z, cioè che sia della forma $\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\,\hat{x}$. Inoltre, sempre per la simmetria del problema, deve anche valere che $E(-x) = -E(x)$, per cui ci basterà calcolare E nei punti con $x > 0$.

Per il calcolo di E alla coordinata x, scegliamo come superficie di Gauss, S, la superficie totale di un cilindro avente l'asse diretto lungo l'asse x, area di base Σ, altezza pari a $2x$, disposto simmetricamente rispetto al piano di carica. Dividiamo la superficie totale di tale cilindro in tre parti, per analizzarne separatamente il contributo al flusso totale uscente: la superficie laterale e le due basi.

Poiché il campo elettrico è parallelo all'asse x, esso è anche parallelo alla superficie laterale in tutti i suoi punti e quindi il flusso attraverso di essa è identicamente nullo. Invece, il flusso attraverso ciascuna base è uguale a $\Sigma\, E(x)$, perché lì il campo è uniforme e perpendicolare alla base. In definitiva, si ha

$$\Phi_S(\vec{E}) = 2\,\Sigma\, E(x) \tag{22}$$

D'altronde, la carica racchiusa nel cilindro di Gauss è pari alla densità di carica σ per l'area della regione di intersezione tra cilindro di Gauss e piano di carica, che è proprio Σ, e quindi

$$Q_{\text{tot}}^{(\text{int})} = \Sigma\,\sigma\ . \tag{23}$$

Dal teorema di Gauss (eq. (11)) discende quindi

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (x > 0)\ , \tag{24}$$

che risulta essere uniforme in tutto il semispazio. Per $x < 0$ si ha pertanto

$$E(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (x < 0)\ . \tag{25}$$

L'andamento del campo è mostrato in fig. 3(a).

Analogamente a quanto fatto per gli esempi presedenti, possiamo ora calcolare il potenziale in ogni punto dello spazio. Anche questo dovrà dipendere solo dalla coordinata x. Per questa distribuzione di carica non è possibile scegliere un punto all'infinito come riferimento per il potenziale perché, essendo il campo uniforme, il suo integrale dal generico punto fino all'infinito darebbe un valore infinito. Possiamo però scegliere qualsiasi altro punto, al finito. Per comodità, scegliamo un punto del piano $x = 0$, cosí che sia $V(0) = 0$. Dalla definizione di potenziale si ha quindi

$$V(x) = \int_x^0 E(x)\,\mathrm{d}x\ , \tag{26}$$

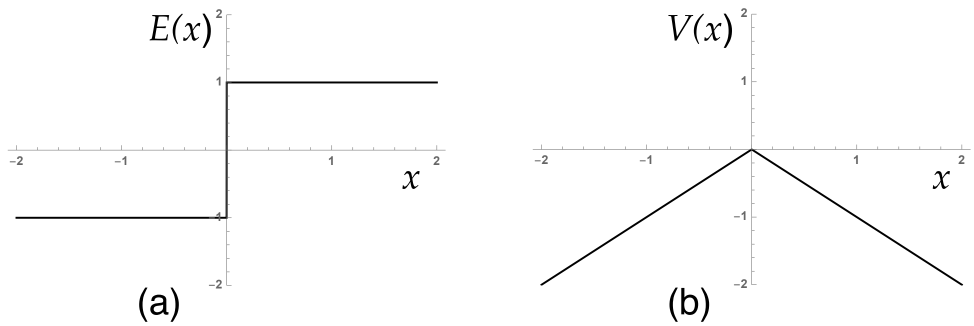

Figure 3: Andamento dell'ampiezza del campo elettrico generato da uno strato di carica omogeneo nel piano $x = 0$ (a). Corrispondente andamento del potenziale, avendo scelto $V(0) = 0$ (b).

e, utilizzando i risultati (24) e (25),

$$V(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |x| \,, \tag{27}$$

mostrato in fig. 3(b).

A partire da questi risultati, mediante sovrapposizione, si possono ricavare molto facilmente gli andamenti in tutto lo spazio del campo e del potenziale generati da due strati di carica paralleli, aventi densità di carica superficiali uguali (σ) e separati da una distanza d. Oppure, aventi densità di carica σ e $-\sigma$, rispettivamente. O, ancora, con densità di carica generiche σ_1 e σ_2. Questi casi sono lasciati come esercizio per lo studente.

In maniera sostanzialmente analoga a quanto fatto per ricavare la (24) e la (25), cioè attraverso l'applicazione del teorema di Gauss, è possibile calcolare il campo generato in tutto lo spazio da una carica distribuita in una lastra piana di spessore d con densità di volume uniforme ρ. Anche questo caso è lasciato come esercizio.