Condizioni di stabilità dell'equilibrio

Corso di Fisica I - Primo modulo

M. Santarsiero

Come è noto, ad ogni forza conservativa è possibile associare un'energia potenziale (U), funzione scalare del punto, attraverso cui è possibile calcolare il lavoro compiuto da tale forza lungo un certo percorso. In particolare, indicando con $\mathbf{F}$ tale forza e con W il lavoro da essa compiuto, è possibile scrivere

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = U(A) - U(B) \ , \tag{1}$$

avendo sfruttato il fatto che, essendo la forza conservativa, il suddetto integrale non dipende dal cammino percorso, ma solo dalle posizioni iniziale e finale del tragitto.

La funzione U può essere pertanto definita come

$$U(A) = -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \ , \tag{2}$$

dove il punto iniziale del cammino d'integrazione (O) può essere scelto a piacere. Tale arbitrarietà deriva dal fatto che nell'espressione (1) interviene solo la differenza tra i valori dell'energia potenziale nei due punti e quindi qualunque termine costante, aggiunto ad U, non influisce sul calcolo del lavoro.

Limitiamoci, per semplicità, al caso, unidimensionale, di una forza conservativa esercitata su un punto che si muove di moto rettilineo. Supponiamo inoltre che la forza sia diretta lungo la direzone del moto, così che le espressioni (1) e (2) si riducono a

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\, \mathrm{d}x = U(x_A) - U(x_B) \ , \tag{3}$$

e

$$U(x) = -\int_0^x F(x)\,\mathrm{d}x \ , \tag{4}$$

rispettivamente, dove il punto iniziale per il calcolo dell'energia potenziale è stato posto, per semplicità, in corrispondenza della coordinata $x = 0$. Per esempio, è semplice verificare che quest'ultima espressione fornisce $U(x) = -ax$ nel caso di forza costante, $F(x) = a$, mentre dà $U(x) = kx^2/2$ nel caso di forza elastica, $F(x) = -kx$.

A partire dalla definizione (4) è possibile ottenere l'espressione della forza $F(x)$, qualora sia nota l'energia potenziale. Infatti, invertendo la (4), si ha

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \ , \tag{5}$$

cioè la forza coincide con la derivata spaziale dell'energia potenziale, cambiata di segno. Per inciso, nel caso bi- o tridimensionale il risultato è analogo, ma alla derivata spaziale unidimensionale va sostituito il *gradiente* della funzione $U(\mathbf{r})$, ovvero,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \ . \tag{6}$$

E' chiaro quindi che lo studio della dinamica di un punto che si muove su una retta, soggetto solo a forze conservative, può essere affrontato indifferentemente partendo dalla funzione $F(x)$, che descrive la forza totale agente su di esso, o dalla corrispondente funzione $U(x)$, poiché è sempre possibile passare dall'una all'altra.

In particolare, concentriamoci su quelle che sono le *posizioni di equilibrio* di tale punto, cioè le posizioni in cui la forza assume il valore zero. Si parla di equilibrio perché un punto che si trovi in un certo istante in una di tali posizioni, con velocità nulla, vi rimane per sempre, essendo nulla la sua accelerazione, in base al secondo principio della dinamica. Stando all'eq. (5), dunque, le posizioni di equilibrio sono tutte quelle in cui si annulla la derivata dell'energia potenziale, e quindi corrispondono ai massimi, ai minimi o ai flessi orizzontali della funzione $U(x)$.

E' utile distinguere tre tipi di equilibrio: stabile, instabile, e indifferente. Nel primo caso, se il punto viene spostato (di una quantità sufficientemente piccola) dalla posizione di equilibrio, la forza che ne risulta cercherà di riportarlo nella posizione di equilibrio. Questo è il comportamento di qualunque *forza di richiamo*, come quella esercitata da una molla: per esempio, uno spostamento del punto verso destra a partire dalla posizione di equilibrio, provocherà l'insorgere di una forza diretta verso sinistra, e viceversa (uno spostamento verso sinistra causerà una forza diretta verso destra). In questa situazione, se si lascia con velocità nulla il punto in una posizione vicina alla posizione di equilibrio, esso comincerà ad oscillare intorno a tale posizione, ma rimarrà comunque nelle vicinanze di tale posizione, come accade ad una massa soggetta ad una forza elastica. Per questo motivo, tali posizioni si dicono di *equilibrio stabile*. Dal punto di vista analitico, se $x = x_0$ è la posizione di equilibrio (cioè $F(x_0) = 0$), questo significa che $F(x) < 0$ se $x > x_0$, mentre $F(x) > 0$ se $x < x_0$. In altri termini, la funzione $F(x)$ è decrescente nell'intorno di x_0, e quindi ha derivata negativa in x_0. Tale situazione è illustrata in fig. 1.

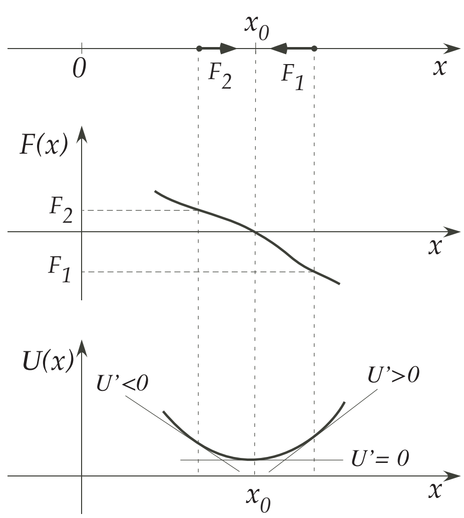

Figure 1: Andamenti di $F(x)$ e di $U(x)$ nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile.

Trasferendo tali considerazioni al comportamento della funzione $U(x)$, notiamo che il fatto che $F(x)$ abbia derivata *negativa* in x_0 implica che la derivata seconda di $U(x)$ sia *positiva*, perché, come abbiamo visto prima, la forza coincide con la derivata prima dell'energia potenziale, ma cambiata di segno. Pertanto, nei punti di equilibrio stabile l'energia potenziale deve presentare un *minimo*.

L'esempio più canonico di posizione di equilibrio stabile è, per l'appunto, proprio quello relativo alla forza elastica. In tale caso la forza, $F(x) = -kx$, ha derivata negativa in $x = 0$ e la corrispondente energia potenziale, $U(x) = kx^2/2$, ha un minimo nello stesso punto.

Una posizione di equilibrio *instabile*, viceversa, è una posizione per cui, per ogni spostamento del punto, seppur piccolo a piacere, la forza tende ad allontanarlo ulteriormente dalla posizione di equilibrio. E' chiaro che in questo caso valgono le considerazioni opposte rispetto a quelle fatte in precedenza. In particolare, la forza ha un andamento *crescente* nell'intorno di x_0 e quindi l'energia potenziale deve presentare un *massimo* in quel punto. La figura 2 mostra gli andamenti di $F(x)$ e di $U(x)$ intorno ad una posizione di equilibrio instabile. Esempi di equilibrio instabile sono una matita che si regge sulla punta in posizione verticale, una pallina posta sulla sommità di un dosso, o una macchina di Atwood dotata di una fune pesante.

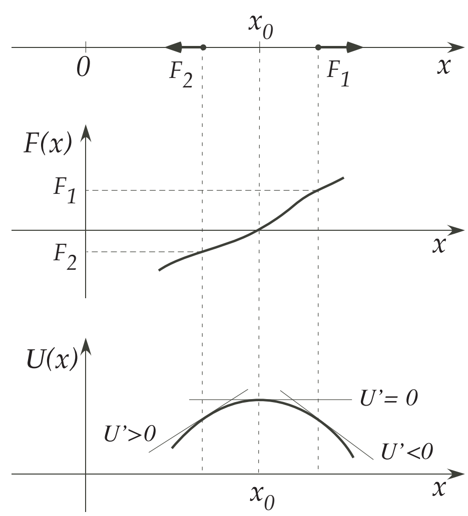

Figure 2: Andamenti di $F(x)$ e di $U(x)$ nell'intorno di una posizione di equilibrio instabile.

Qualora l'energia potenziale presenti un punto di flesso orizzontale in x_0, tale punto potrà essere considerato un punto di equilibrio instabile poiché, a seguito di uno spostamento del punto, il suo moto non rimarrebbe comunque confinato in un intorno di tale posizione.

L'equilibrio *indifferente*, infine, corrisponde al caso in cui l'energia potenziale assume un valore costante in tutto un intervallo di valori di x, per cui ciascun punto all'interno di tale intervallo può essere considerato punto di equilibrio.