Equazioni del moto circolare

Corso di Fisica Generale I - Primo modulo

M. Santarsiero

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una circonferenza di raggio R. Con riferimento alla Fig. 1, le coordinate del punto potranno essere espresse mediante l'angolo ϑ, che, per il momento, è una generica funzione del tempo.

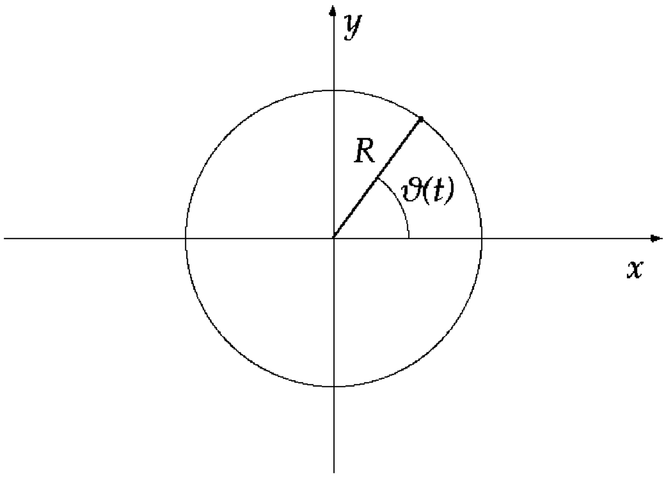

Figure 1:

Avremo quindi:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\vartheta(t) \ , \\ \\ y(t) = R\sin\vartheta(t) \ . \end{cases} \tag{1}$$

Da queste espressioni si possono calcolare, mediante derivazioni successive, le componenti della velocità $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, cioè

$$\begin{cases} v_x(t) = \dot{x}(t) = -R\,\dot{\vartheta}(t)\,\sin\vartheta(t)\ , \\ \\ v_y(t) = \dot{y}(t) = R\,\dot{\vartheta}(t)\,\cos\vartheta(t)\ , \end{cases} \tag{2}$$

e dell'accelerazione $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$,

$$\begin{cases} a_x(t) = \ddot{x}(t) = -R\left[\dot{\vartheta}^2(t)\cos\vartheta(t) + \ddot{\vartheta}(t)\sin\vartheta(t)\right]\ , \\ \\ a_y(t) = \ddot{y}(t) = R\left[-\dot{\vartheta}^2(t)\sin\vartheta(t) + \ddot{\vartheta}(t)\cos\vartheta(t)\right]\ , \end{cases} \tag{3}$$

che, una volta assegnata la funzione $\vartheta(t)$, consentono di determinare modulo, direzione e verso dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ ad ogni istante. La funzione $\dot{\vartheta}(t)$ prende il nome di *v*elocità angolare (e viene spesso indicata con $\omega(t)$), mentre $\ddot{\vartheta}(t)$ è l'*a*ccelerazione angolare (talvolta indicata con $\alpha(t)$).

Consideriamo ora il caso particolare in cui il punto si muove lungo la circonferenza con velocità costante. Ciò, in particolare, significa che la velocità angolare è costante e cioè $\omega(t) = \omega =$ costante, per cui $\vartheta(t)$ è una funzione lineare di t:

$$\vartheta(t) = \vartheta(t_0) + \omega\cdot(t - t_0)\ . \tag{4}$$

Nel seguito prenderemo, per comodità, $t_0 = 0$ e $\vartheta(0) = 0$, per cui

$$\vartheta(t) = \omega t\ . \tag{5}$$

Con queste posizioni, le espressioni (1)-(3) diventano

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\omega t\ , \\ \\ y(t) = R\sin\omega t\ , \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = -\,\omega R\sin\omega t\ , \\ \\ v_y(t) = \omega R\cos\omega t\ , \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = -\,\omega^2 R\cos\omega t\ , \\ \\ a_y(t) = -\,\omega^2 R\sin\omega t\ , \end{cases} \tag{8}$$

che possono essere scritte in forma vettoriale come

$$\mathbf{r}(t) = R\,(\cos\omega t, \sin\omega t)\ , \tag{9}$$

$$\mathbf{v}(t) = \omega\, R\,(-\sin\omega t, \cos\omega t)\ , \tag{10}$$

$$\mathbf{a}(t) = -\,\omega^2\, R\,(\cos\omega t, \sin\omega t)\ . \tag{11}$$

Analizziamo ora queste espressioni per determinare modulo, direzione e verso di ciascuno di questi tre vettori.

Per quanto riguarda $\mathbf{r}$, si verifica facilmente che

$$|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = R\,\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = R\ , \tag{12}$$

che rende conto del fatto che il vettore $\mathbf{r}$ dal centro del sistema di riferimento punta sempre su un punto della circonferenza.

Il modulo di $\mathbf{v}$ si determina allo stesso modo e risulta

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \omega R\,\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} = \omega R\ . \tag{13}$$

La sua direzione viene facilmente individuata se si calcola il prodotto scalare tra $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{r}$, che fornisce

$$\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = \omega R^2\,(-\sin\omega t\ \cos\omega t + \cos\omega t\ \sin\omega t) = 0\ . \tag{14}$$

Pertanto il vettore $\mathbf{v}$ è sempre ortogonale a $\mathbf{r}$ ed è disposto come in figura 2. Che il verso di $\mathbf{v}$ sia proprio quello mostrato in figura lo si capisce notando che, se ϑ è compreso tra 0 e $\pi/2$, la componente v_x è negativa mentre v_y è positiva, come si evince dalla (10). Poiché il punto si muove lungo una circonferenza, il raggio vettore che individua un punto è sempre ortogonale alla tangente alla circonferenza in quel punto, per cui la velocità risulta sempre tangente alla traiettoria. Questo fatto, come è noto, non dipende dal tipo di moto considerato ma si verifica sempre, essendo una conseguenza diretta della definizione di velocità vettoriale.

Veniamo ora al vettore $\mathbf{a}(t)$. Confrontando la (11) con la (9), si vede che si può scrivere

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t)\ , \tag{15}$$

da cui si vede direttamente che

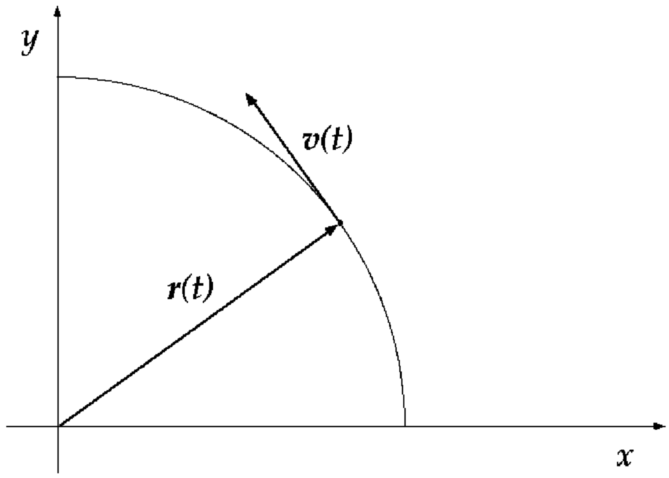

Figure 2:

$$a = |\mathbf{a}(t)| = \omega^2 R \tag{16}$$

e che $\mathbf{a}(t)$ è sempre antiparallelo (cioè ha la stessa direzione e verso opposto) al raggio vettore $\mathbf{r}(t)$, per cui punta sempre verso l'origine del sistema di coordinate (per questo motivo l'accelerazone in questo caso si dice *centripeta*). Poiché il punto si muove lungo una circonferenza, l'accelerazione in ogni punto è quindi diretta ortogonalmente alla traiettoria. Ciò è consistente con il fatto che, essendo costante il modulo di $\mathbf{v}$, la componente di $\mathbf{a}$ tangente alla traiettoria deve essere nulla.

La forma di $\mathbf{a}(t)$ può essere anche ricavata a partire dall'espressione generale

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}_t(t) + v(t)\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}_n(t) \ , \tag{17}$$

dove $\hat{\tau}_t$ e $\hat{\tau}_n$ sono, rispettivamente, i versori tangente e normale alla traiettoria in un punto e φ è l'angolo che $\hat{\tau}_t$ (e quindi $\mathbf{v}$) forma con l'asse delle x (vedi figura 3).

Poiché v è costante, la componente di $\mathbf{a}$ tangente alla traiettoria è nulla. Per quanto riguarda la componente normale, invece, si può notare che $\varphi = \vartheta + \pi/2$, per cui

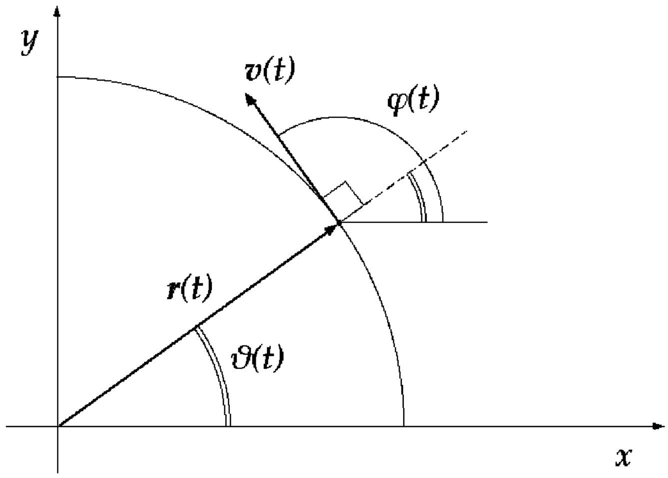

Figure 3:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vartheta(t)}{\mathrm{d}t} = \omega \tag{18}$$

e che il modulo della componente normale dell'accelerazione risulta

$$\left| v\,\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \right| = |v\,\omega| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}\ , \tag{19}$$

avendo usato per le ultime uguaglianze la relazione (13), cioè $v = \omega R$.

Prima di concludere, può essere interessante notare come, nel caso di un *generico* andamento di ϑ in funzione di t, si possa ritrovare l'espressione (17) partendo dalla (3). Usando l'equazione (2), infatti, si vede che i versori $\hat{\tau}_t$ e $\hat{\tau}_n$ devono avere la forma

$$\hat{\tau}_t = (-\sin\omega t, \cos\omega t)\ , \qquad \hat{\tau}_n = (-\cos\omega t, -\sin\omega t)\ . \tag{20}$$

Il versore $\hat{\tau}_t$ è stato preso come il vettore unitario avente la stessa direzione e verso di $\mathbf{v}$, mentre per $\hat{\tau}_n$ è stato preso il versore ortogonale a $\hat{\tau}_t$ che punta verso l'interno della circonferenza.

Utilizzando l'equazione (20), l'accelerazione (3) si può scrivere in forma vettoriale come

$$\mathbf{a}(t) = R\,\ddot{\vartheta}(t)\,\hat{\tau}_t(t) + R\,\dot{\vartheta}^2(t)\,\hat{\tau}_n(t)\;, \tag{21}$$

che coincide esattamente con la (17), poiché

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\omega(t)R] = R\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\omega(t) = R\ddot{\vartheta}(t) \tag{22}$$

e

$$v(t)\,\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = v(t)\,\frac{\mathrm{d}\vartheta(t)}{\mathrm{d}t} = R\omega(t)\dot{\vartheta}(t) = R\dot{\vartheta}^2(t)\;. \tag{23}$$