Piccole oscillazioni

Corso di Fisica Generale I - Primo modulo

Consideriamo un punto materiale che si muove di moto unidimensionale sotto l'azione di un'energia potenziale $U(x)$, che supponiamo funzione continua e derivabile. La forza che il punto sperimenterà in ogni punto sarà quindi

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = U'(x) \; . \tag{1}$$

Le posizioni di equilibrio *stabile* sono quelle per cui l'energia potenziale assume un valore minimo. Esse, infatti, corrispondono alle posizioni per cui la forza è <u>nulla</u> e, inoltre, la funzione $F(x)$ ha pendenza <u>negativa</u>. Solo in queste condizioni, infatti, un piccolo spostamento del punto dalla posizione di equilibrio (sia verso destra che verso sinistra) darà origine ad una forza che tende a riportare il punto verso il punto di equilibrio (*forza di richiamo*). Nel caso contrario, cioè quando si è in prossimità di un massimo della $U(x)$, che corrisponde ad una forza nulla ma con pendenza positiva, un piccolo spostamento dalla posizione di equilibrio darà luogo ad una forza che tende ad allontanare il punto dalla posizione di equilibrio, per cui ci si trova nelle condizioni di equilibrio *instabile*.

Supponiamo ora di limitarci al caso in cui il punto si muove solo nelle immediate vicinanze di un punto di equilibrio stabile, diciamo $x = x_0$, per cui potremo usare, in luogo della funzione $U(x)$, il suo sviluppo di Taylor intorno a x_0 troncato al secondo ordine, cioè

$$U(x) \approx U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 \; . \tag{2}$$

Per quanto detto in precedenza, poiché $x = x_0$ è una posizione di equilibrio, allora $U'(x_0) = 0$, mentre $U''(x_0)$ è una quantità positiva perché l'equilibrio è stabile. Possiamo scrivere dunque

$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}\alpha(x - x_0)^2 \ , \tag{3}$$

dove α è una costante positiva data da

$$\alpha = U''(x_0) \ , \tag{4}$$

e a cui corrisponde una forza data da

$$F(x) \approx -\alpha(x - x_0) \ , \tag{5}$$

equivalente a quella di un oscillatore armonico centrato sulla coordinata $x = x_0$. Il parametro α gioca il ruolo che è della costante elastica (k) nel caso di un corpo soggetto ad una forza elastica. Per questo motivo, nel nostro caso la pulsazione delle oscillazioni di un corpo di massa m attorno alla posizione di equilibrio sarà data da

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \ . \tag{6}$$

Come dovrebbe essere evidente, l'approssimazione fatta (cioè sostituire l'andamento della funzione $U(x)$ con un andamento parabolico) è valida solo per valori piccoli della distanza dal punto di equilibrio x_0. E' per questo motivo che si parla di pulsazione (o di periodo $T = 2\pi/\omega$, o di frequenza $\nu = 1/T$) delle *piccole oscillazioni*.

Vediamo ora come questo tipo di approccio possa essere applicato ad un caso che è generalmente affrontato partendo dal secondo principio della dinamica e ricavando le leggi del moto: il pendolo semplice.

Le notazioni del problema sono indicate in Fig. 1, dove è mostrata la massa puntiforme m, soggetta alla forza peso e vincolata al punto O tramite un filo inestensibile di massa trascurabile di lunghezza l. La posizione del punto risulta individuata dall'angolo ϑ.

L'energia potenziale del corpo è data da

$$U(\vartheta) = mgl(1 - \cos\vartheta) \ , \tag{7}$$

avendo preso come quota di riferimento per l'energia potenziale la quota corrispondente alla posizione di equilibrio del pendolo.

L'andamento di $U(\vartheta)$ è mostrato in Fig. 2. Naturalmente esso è periodico, perché l'energia potenziale è la stessa se l'angolo ϑ viene aumentato di un numero intero di 2π.

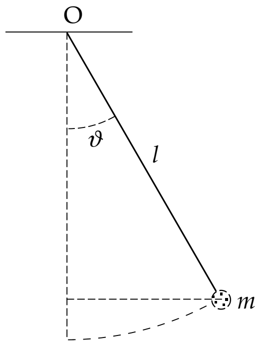

Figure 1: Il pendolo semplice

Lo sviluppo di Taylor della $U(\vartheta)$ troncato al secondo ordine è ottenuto dall'analogo sviluppo per la funzione $\cos\vartheta$ e risulta essere

$$U(\vartheta) \approx mgl\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\vartheta^2\right) = \frac{1}{2}mgl\vartheta^2 \ . \tag{8}$$

Questa parabola, che è quella che meglio approssima la energia potenziale nell'intorno del punto di equilibrio, è mostrata tratteggiata in Fig. 2.

A questo punto, per ottenere la pulsazione delle piccole oscillazioni, dobbiamo semplicemente calcolare $U''(0)$, ma con una piccola accortezza. Infatti, secondo la formulazione presentata in precedenza, la derivata va calcolata

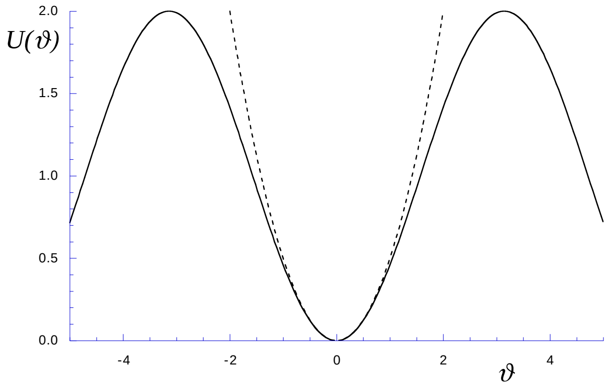

Figure 2: L'energia potenziale del pendolo semplice, dove si è posto $mgl = 1$.

rispetto alla variabile spaziale lungo cui si muove il punto materiale, che nel nostro caso non è ϑ, bensì $l\vartheta$. Per questo motivo, dalla (3) avremo che

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(l\vartheta)^2}\left(\frac{1}{2}mgl\vartheta^2\right) = \frac{1}{l^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\vartheta^2}\left(\frac{1}{2}mgl\vartheta^2\right) = \frac{mg}{l}\ , \tag{9}$$

a cui, secondo la (6), corrisponde la pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\ , \tag{10}$$

come è ben noto dalla teoria del pendolo semplice per piccole oscillazioni.