Integrali di linea su traiettorie bidimensionali

Corso di Fisica Generale I - Primo modulo

Consideriamo un integrale di linea del tipo

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \,, \tag{1}$$

calcolato lungo una particolare traiettoria che unisce i punti A e B sul piano xy. $\vec{F}$ è un vettore dipendente dal punto del piano e $\mathrm{d}\vec{s}$ è l'*elemento di linea*, avente modulo pari a $\mathrm{d}s$ e direzione parallela alla tangente alla traiettoria. In particolare, L_{AB} può essere interpretato come il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ quando il suo punto di applicazione si sposta da A a B lungo la traiettoria assegnata.

Una possibile maniera per trasformare l'integrale di linea di Eq. (1) in un integrale semplice consiste nell'adottare un sistema di riferimento cartesiano, per cui l'espressione (1) si può scrivere come

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B \left[F_x(x,y)\mathrm{d}x + F_y(x,y)\mathrm{d}y\right] = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} F_x[x,y(x)]\mathrm{d}x + \int_{y_A}^{y_B} F_y[x(y),y]\mathrm{d}y \,, \end{aligned} \tag{2}$$

Si è sfruttato il fatto che, poiché la traiettoria è fissata, ad ogni valore di x corrisponde un valore di y, e viceversa (ciò è stato evidenziato scrivendo esplicitamente $x(y)$ e $y(x)$ negli argomenti di F_x e F_y), per cui ciascuno dei due integrali nell'ultima riga dell'Eq. (2) è un integrale semplice, che può essere risolto con le tecniche note.

Come si può immaginare, tuttavia, tale approccio presenta dei problemi qualora almeno una delle funzioni $x(y)$ e $y(x)$ sia una funzione a più valori, per cui in questi casi esso va utilizzato con qualche cautela. Una situazione tipica si ha quando la traiettoria è *chiusa*, cioè quando il punto B coincide con il punto A, per cui $x_A = x_B$. In questi casi, non è vero in generale che $L_{AB} = 0$, anche se così potrebbe sembrare dalla forma (2) dell'integrale di linea. Una soluzione consiste nello spezzare la traiettoria in più tratti, lungo ognuno dei quali sia $x(y)$ che $y(x)$ assumono un solo valore.

Una procedura più generale consiste nell'adottare una rappresentazione *parametrica* della traiettoria. Ciò significa che viene introdotto un nuovo parametro scalare, diciamo h, tale che ad ogni valore di h si possa associare un ben determinato punto della traiettoria. Tale parametro può coincidere, per esempio, con la coordinata curvilinea della traiettoria o con il tempo, qualora si conosca la legge oraria del punto.

Le coordinate cartesiane del punto si potranno scrivere come funzioni di h, cioè come $x(h)$ e $y(h)$, che si suppongono note dalla conoscenza della traiettoria, per cui

$$
\begin{aligned}
L_{AB} &= \int_A^B [F_x(x,y)\mathrm{d}x + F_y(x,y)\mathrm{d}y] = \\
&= \int_{h_A}^{h_B} \left\{ F_x[x(h),y(h)]\frac{\mathrm{d}x(h)}{\mathrm{d}h} + F_y[x(h),y(h)]\frac{\mathrm{d}y(h)}{\mathrm{d}h} \right\} \mathrm{d}h \, ,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

avendo sfruttato il fatto che

$$
\mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{d}x(h)}{\mathrm{d}h}\right)\mathrm{d}h \; ; \qquad \mathrm{d}y = \left(\frac{\mathrm{d}y(h)}{\mathrm{d}h}\right)\mathrm{d}h \; . \tag{4}
$$

Questo è un integrale semplice nella variabile h e può essere risolto con le tecniche di integrazione note. Gli estremi di integrazione sono quei valori di h per cui le coordinate $x(h)$ e $y(h)$ coincidono con quelle dei punti A e B, rispettivamente.

Esempi

Come primo esempio consideriamo il caso in cui la traiettoria è rappresentata dall'equazione $y = f(x)$. In questo caso si potrà porre:

$$\begin{cases} x(h) = h \\ \\ y(h) = f(h) \end{cases} , \tag{5}$$

da cui

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(h)}{\mathrm{d}h} = 1 \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y(h)}{\mathrm{d}h} = f'(h) \end{cases} , \tag{6}$$

e l'integrale di linea diventa, secondo la (3)

$$L_{AB} = \int\limits_{h_A}^{h_B} \{F_x[h, y(h)] + F_y[h, y(h)]f'(h)\} \ \mathrm{d}h \ . \tag{7}$$

Come secondo esempio consideriamo una traiettoria circolare di raggio R. Ogni punto della traiettoria può essere individuato attraverso l'angolo che il raggio vettore forma con un asse di riferimento, per esempio l'asse x. Il parametro utilizzato per la rappresentazione potrà essere quindi proprio tale angolo. Porremo quindi

$$\begin{cases} x(h) = R\cos h \\ \\ y(h) = R\sin h \end{cases} , \tag{8}$$

da cui

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(h)}{\mathrm{d}h} = -R\sin h \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y(h)}{\mathrm{d}h} = R\cos h \end{cases} , \tag{9}$$

e l'integrale di linea diventa, secondo la (3)

$$L_{AB} = R\int\limits_{h_A}^{h_B} \{-F_x[R\cos h, R\sin h]\sin h + F_y[R\cos h, R\sin h]\cos h\} \ \mathrm{d}h \ . \tag{10}$$

Una forma significativa di quest'integrale la si ottiene introducendo le componenti tangenziale e normale di $\vec{F}$, rispetto alla traiettoria. Infatti si può mostrare facilmente che

$$\begin{cases} F_x[R\cos h, R\sin h] = F_n(h)\cos h - F_t(h)\sin h \\ \\ F_y[R\cos h, R\sin h] = F_n(h)\sin h + F_t(h)\cos h \end{cases} \tag{11}$$

per cui

$$\begin{aligned} L_{AB} = \quad & R\int_{h_A}^{h_B} \Big[-F_n(h)\cos h\sin h + F_t(h)\sin^2 h + F_n(h)\sin h\cos h + F_t(h)\cos^2 h\Big]\ \mathrm{d}h = \\ = \quad & R\int_{h_A}^{h_B} F_t(h)\left[\sin^2 h + \cos^2 h\right]\ \mathrm{d}h = R\int_{h_A}^{h_B} F_t(h)\,\mathrm{d}h\ , \end{aligned} \tag{12}$$

che coincide con l'integrale della sola componente tangenziale lungo la traiettoria.