Caduta di un grave in presenza di attrito viscoso

Corso di Fisica Generale I - Primo modulo

Supponiamo che un corpo venga lanciato con velocità v_0, verso il basso, da una certa quota e che esso, durante il suo moto, risenta di una forza di attrito viscoso proporzionale alla sua velocità $\vec{v}$. In formule, abbiamo

$$\vec{F}_A = -b\vec{v} \tag{1}$$

dove b è una costante positiva, avente dimensioni $[\mathrm{m}][\mathrm{t}]^{-1}$. Per semplicità, consideriamo la quota iniziale coincidente con la posizione $y = 0$ e orientiamo l'asse y verso il basso così che il moto, unidimensionale, avvenga nella direzione delle y crescenti.

La forza totale agente sul corpo è data dalla somma della forza peso (positiva, per la scelta fatta sul sistema di riferimento) e della forza di attrito (negativa), per cui, dal secondo principio della dinamica, si ha

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - bv \ , \tag{2}$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v = g \ , \tag{3}$$

dove è stato introdotto il parametro τ, definito come

$$\tau = \frac{m}{b} \ , \tag{4}$$

che ha le dimensioni di un tempo.

L'equazione (3) è un'equazione differenziale del primo ordine (compare solo la derivata prima) nell'incognita v, e può essere risolta operando la cosiddetta *separazione delle variabili.* Infatti, dalla (3) si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{1}{\tau} v \ , \tag{5}$$

da cui, considerando i differenziali come quantità algebriche,

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \dfrac{1}{\tau} v} = \mathrm{d}t \ . \tag{6}$$

A questo punto, entrambi i membri dell'Eq. (6) possono essere integrati, con estremi di integrazione corrispondenti, cioè

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{g - \dfrac{1}{\tau} v} = \int_0^t \mathrm{d}t' \ , \tag{7}$$

da cui, poiché $v(0) = v_0$,

$$- \tau \log \left(g - \frac{1}{\tau} v \right) \Bigg|_{v_0}^{v(t)} = t \ . \tag{8}$$

Questa espressione può essere risolta rispetto a $v(t)$ mediante i seguenti passaggi:

$$\log \frac{g - \dfrac{1}{\tau} v(t)}{g - \dfrac{1}{\tau} v_0} = - \frac{t}{\tau} \ ; \tag{9}$$

$$\log \frac{g - \dfrac{1}{\tau} v(t)}{g - \dfrac{1}{\tau} v_0} = e^{-t/\tau} \ ; \tag{10}$$

$$g - \frac{1}{\tau} v(t) = \left(g - \frac{1}{\tau} v_0 \right) \ e^{-t/\tau} \ ; \tag{11}$$

$$v(t) = \tau g - (\tau g - v_0) \ e^{-t/\tau} \ . \tag{12}$$

Dalla forma funzionale della $v(t)$ è immediato verificare che la velocità è pari a v_0 all'istante $t = 0$ mentre, quando $t \to \infty$, essa tende a stabilizzarsi su un valore dato da

$$v_L \equiv \tau g = \frac{m}{b} g \ , \tag{13}$$

che è indipendente dalla velocità iniziale. Con la definizione (13), la legge di variazione della velocità si può scrivere come

$$v(t) = v_L - (v_L - v_0) \ e^{-t/\tau} \ . \tag{14}$$

Il tempo τ dà una misura di quanto rapidamente il corpo raggiunge la velocità limite v_L. L'andamento di $v(t)$ per diversi valori di v_0 è mostrato in Fig. 1 in funzione della quantità adimensionale t/τ. Si noti in particolare che, quando il corpo viene lanciato con una velocità iniziale maggiore della velocità limite, essa diminuirà progressivamente per raggiungere, asintoticamente, il valore v_L.

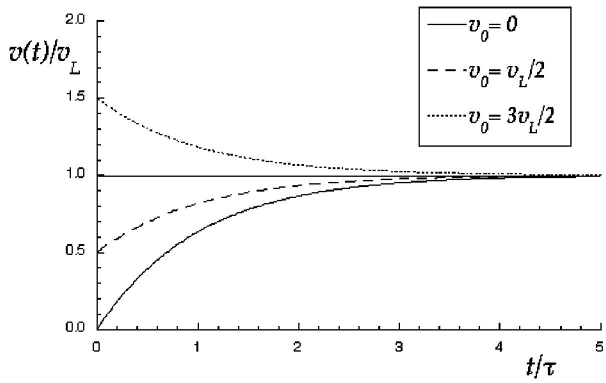

Figure 1: Andamento della velocità, normalizzata con la velocità limite, per diversi valori della velocità iniziale.

Un semplice ragionamento consente di ricavare direttamente il valore della velocità limite senza risolvere alcuna equazione differenziale. Supponiamo, per comodità, che il corpo sia lasciato, all'istante $t = 0$, con velocità nulla. Inizialmente, quindi, la forza di attrito ha modulo nullo e il corpo risente esclusivamente della forza di gravità, per cui accelera verso il basso con accelerazione g. All'aumentare della velocità, anche la forza di attrito aumenta e quindi il corpo presenta un'accelerazione via via minore. La condizione limite viene raggiunta quando la forza di attrito uguaglia esattamente (in modulo) la forza peso, per cui la risultante delle forze agenti sul corpo è nulla. In queste condizioni il corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme. Dall'uguaglianza delle due forze agenti sul corpo si ha:

$$|F_A| = mg \qquad \Rightarrow bv_L = mg \qquad \Rightarrow v_L = \frac{m}{b} g \ , \tag{15}$$

che coincide con il risultato dato in Eq. (13).

L'andamento dell'accelerazione può essere ottenuto direttamente derivando l'espressione della velocità in Eq. (14), risultando

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[v_L - (v_L - v_0) \ e^{-t/\tau} \right] = \frac{1}{\tau} (v_L - v_0) \ e^{-t/\tau} = \left(g - \frac{v_0}{\tau} \right) \ e^{-t/\tau} \ . \tag{16}$$

Si vede che l'accelerazione vale $g - v_0/\tau$ per $t = 0$ e tende ad annullarsi con legge esponenziale, governata ancora dal parametro τ. In Fig. 2 sono mostrati alcuni andamenti di $a(t)$, in funzione della quantità t/τ, ottenuti per diversi valori della velocità iniziale v_0.

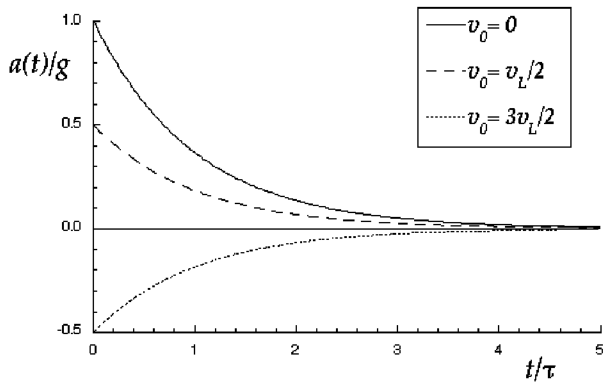

Figure 2: Andamento dell'accelerazione, normalizzata con l'accelerazione di gravità, graficato per diversi valori della velocità iniziale.

Calcoliamo infine lo spazio percorso dal corpo in funzione del tempo. Per fare questo, ci limitiamo, per semplicità, al caso in cui il corpo parte da fermo, ossia con $v_0 = 0$. L'espressione di $y(t)$ si ottiene integrando la velocità $v(t)$ con la condizione iniziale che sia $y(0) = 0$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^t v(t) \ \mathrm{d}t = v_L \int_0^t \left(1 - e^{-t'/\tau} \right) \ \mathrm{d}t' = \\ = & \ v_L t + \tau v_L \ e^{-t'/\tau} \Big|_0^t = \tau v_L \left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1 \right) \ . \end{aligned} \tag{17}$$

L'andamento della $y(t)$ è mostrato in Fig. 3, in funzione di t/τ. Si può notare come, per valori di t/τ molto piccoli, l'andamento sia simile a quello uniformemente accelerato che si avrebbe in assenza di forze di attrito (linea tratteggiata in figura). Questo fatto si può dimostrare partendo dall'espressione (17) ed approssimandola per valori piccoli di t/τ. In questa situazione, infatti, per l'esponenziale si può adottare uno sviluppo di Taylor troncato al secondo ordine, cioè

$$e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 , \tag{18}$$

che, sostituito nella (17) dà

$$y(t) \approx \tau v_L \left(\frac{t}{\tau} + 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\tau^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{v_L}{\tau}t^2 = \frac{1}{2}gt^2 . \tag{19}$$

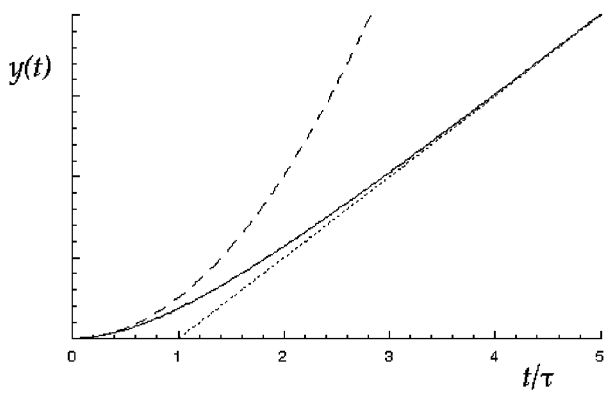

Figure 3: Spazio percorso in funzione del tempo. Sono anche mostrati gli andamenti corrispondenti al moto in assenza di attrito (curva tratteggiata) e al moto asintotico (curva puntinata).

Viceversa, nell'altro limite ($t >> \tau$) l'esponenziale nella (17) può essere trascurato rispetto all'unità per cui si ottiene

$$y(t) \approx \tau v_L \left(\frac{t}{\tau} - 1\right) = v_L(t - \tau) , \tag{20}$$

che corrisponde ad un moto con velocità uniforme v_L, mostrato in Fig. 3 con una retta puntinata.