

# L'accelerazione nel moto vario bidimensionale

## Corso di Fisica Generale I - Primo modulo

Consideriamo un punto materiale che si muove sul piano  $(x, y)$  seguendo la traiettoria mostrata in Fig. 1.

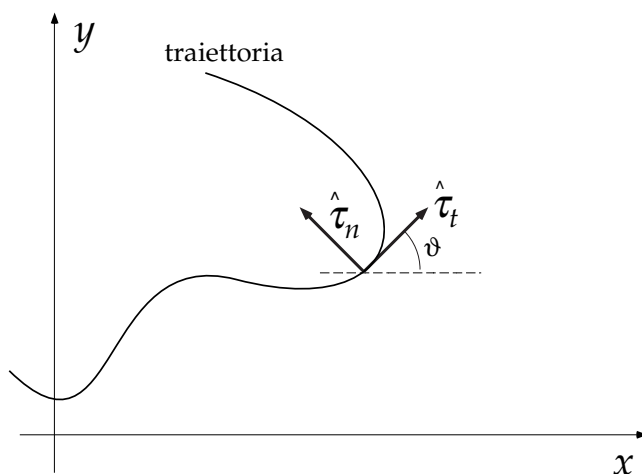


Figure 1:

Sappiamo che il vettore velocità al tempo  $t$ , cioè  $\mathbf{v}(t)$ , è sempre parallelo alla tangente alla traiettoria nel punto corrispondente all'istante  $t$ . Pertanto, introducendo la coppia di versori  $\hat{\tau}_t(t)$  e  $\hat{\tau}_n(t)$ , rispettivamente tangente e ortogonale alla traiettoria, possiamo scrivere:

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\hat{\tau}_t(t) , \quad (1)$$

dove  $v(t)$  (velocità scalare) è il modulo di  $\mathbf{v}(t)$ . Si noti che i versori  $\hat{\tau}_t$  e  $\hat{\tau}_n$  individuano direzioni che variano col tempo, poiché essi seguono la traiettoria del punto istante per istante.

Il vettore accelerazione  $\mathbf{a}(t)$  è definito come

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} , \quad (2)$$

e, come vedremo, in generale non è né parallelo né ortogonale alla traiettoria, ma avrà componenti sia nella direzione di  $\hat{\tau}_t(t)$  che nella direzione ortogonale. Per individuare la direzione di  $\hat{\tau}_t(t)$  possiamo definire l'angolo  $\vartheta(t)$ , compreso tra la direzione del versore stesso e la direzione orizzontale (asse  $x$ ), che sarà anch'esso una funzione del tempo.

Utilizzando la definizione (2) con il risultato (1), e applicando la regola per la derivazione del prodotto di due funzioni, si ha

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \hat{\tau}_t(t) + v(t) \frac{d\hat{\tau}_t(t)}{dt} . \quad (3)$$

Il primo addendo della Eq. (3) è un vettore tangente alla traiettoria, avente ampiezza pari alla derivata temporale della velocità scalare. Per capire cosa rappresenta il secondo addendo, dobbiamo innanzitutto effettuare la derivata temporale del versore  $\hat{\tau}_t$ . Dalla definizione di derivata, abbiamo che

$$\frac{d\hat{\tau}_t(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{\tau}_t(t)}{\Delta t} . \quad (4)$$

dove

$$\Delta \hat{\tau}_t(t) = \hat{\tau}_t(t + \Delta t) - \hat{\tau}_t(t) . \quad (5)$$

La costruzione geometrica di  $\Delta \hat{\tau}_t(t)$  è mostrata in Fig. 2, per un valore finito dell'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Dalla figura si può vedere che, poiché i versori hanno modulo unitario, il valore del modulo di  $\Delta \hat{\tau}_t(t)$  (che non è un versore) è pari a

$$|\Delta \hat{\tau}_t(t)| = 2 \sin \left( \frac{\Delta \vartheta}{2} \right) , \quad (6)$$

dove, naturalmente,  $\Delta \vartheta = \vartheta(t + \Delta t) - \vartheta(t)$ .

Ora, nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , prescritto dall'Eq. (4), il vettore  $\hat{\tau}_t(t + \Delta t)$  tenderà a sovrapporsi al vettore  $\hat{\tau}_t(t)$ , per cui l'angolo  $\Delta \vartheta$  tenderà a zero, mentre il vettore  $\Delta \hat{\tau}_t(t)$  tenderà a disporsi ortogonalmente a  $\hat{\tau}_t(t)$ . Per queste ragioni, per valori sufficientemente piccoli di  $\Delta t$ , l'espressione del modulo di  $\Delta \hat{\tau}_t(t)$  potrà essere approssimata da

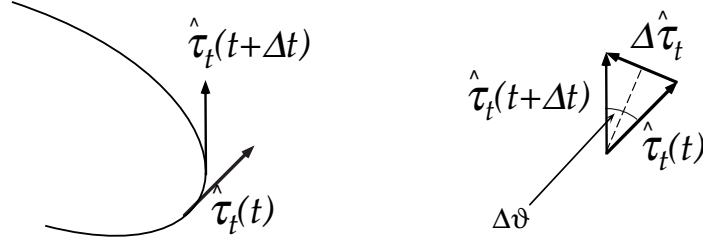


Figure 2:

$$|\Delta \hat{\tau}_t(t)| \approx \Delta \vartheta , \quad (7)$$

perché il valore del seno nell'Eq. (6) sarà molto simile a quello del suo argomento, mentre la direzione di  $\Delta \hat{\tau}_t(t)$  sarà specificata dal versore ortogonale  $\hat{\tau}_n(t)$ .

Quindi potremo scrivere

$$\frac{\Delta \hat{\tau}_t(t)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} \hat{\tau}_n(t) , \quad (8)$$

e, nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\frac{d\hat{\tau}_t(t)}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{\tau}_n(t) . \quad (9)$$

Ricordando l'Eq. (3), avremo

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \hat{\tau}_t(t) + v(t) \frac{d\vartheta(t)}{dt} \hat{\tau}_n(t) \equiv \mathbf{a}_t(t) + \mathbf{a}_n(t) , \quad (10)$$

che si interpreta come segue. Ad ogni istante di tempo il vettore accelerazione ha, in generale, componenti sia lungo la direzione parallela che lungo quella normale alla tangente alla traiettoria. La componente parallela,  $\mathbf{a}_t$ , dipende solo dalla variazione del modulo della velocità e quindi è nulla se il punto

materiale si muove, anche di moto curvilineo, ma con velocità costante in modulo. L'altra,  $\mathbf{a}_n$ , ha ampiezza proporzionale al modulo della velocità e alla variazione della direzione della velocità vettoriale del punto; quindi è nulla quando solo quando il punto è fermo o se il moto si svolge lungo una retta. In particolare, essa è diversa da zero se il punto si muove di moto curvilineo, anche se con velocità costante in modulo. Come risulta evidente dalla costruzione del vettore  $\Delta\hat{\tau}_t(t)$  (vedi Fig. 2), inoltre, la componente normale è sempre diretta verso la concavità della traiettoria.

Dall'Eq. (10), il modulo dell'accelerazione risulta essere

$$a(t) = \sqrt{\left[\frac{dv(t)}{dt}\right]^2 + \left[v(t)\frac{d\vartheta(t)}{dt}\right]^2}. \quad (11)$$

Un'utile espressione per l'accelerazione normale la si ottiene considerando il cerchio che meglio approssima la traiettoria in ogni punto (cerchio *osculatore*). Infatti, si può pensare che il punto materiale si muova, in ogni istante, su una traiettoria circolare coincidente con il cerchio osculatore. Per quanto detto in precedenza, l'accelerazione normale punta verso il centro del centro osculatore e il suo modulo può essere scritto, ricordando le formule valide per il moto circolare, nella forma

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (12)$$

dove  $R$  è il raggio del cerchio osculatore.