

Test di esempio: Gruppo 1 - Soluzioni commentate

1. Il grave si muove di moto parabolico e quindi, al vertice della traiettoria, sicuramente la componente verticale della sua velocità è nulla. Se è nulla anche la componente orizzontale significa che il grave è fermo nel vertice della traiettoria (ciò accade se la traiettoria è verticale, come, per esempio, nel caso in cui il grave è stato lanciato dal suolo con velocità diretta verticalmente). In tal caso, naturalmente, la coordinata x non varia durante il moto e il grave tocca terra all'ascissa x_1 . [c]
2. Riscriviamo per comodità l'equazione nella forma

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{|B|}{A}v = 0.$$

Questa è un'equazione differenziale della stessa forma di quella dell'oscillatore armonico. Il termine $|B|/A$ ha, correttamente, le dimensioni di una pulsazione al quadrato (si noti che, affinché l'equazione abbia senso dal punto di vista dimensionale, le dimensioni del termine $|B|/A$ devono essere quelle dell'inverso di un tempo al quadrato, indipendentemente dalle dimensioni fisiche della funzione incognita). Pertanto la funzione v , indipendentemente dal suo significato e dalle sue dimensioni, si potrà scrivere nella forma $V \sin(\omega t + c)$, con $\omega = \sqrt{|B|/A}$ e con V e c costanti dipendenti dalle condizioni iniziali. [b]

3. Dall'espressione della gittata in funzione del modulo della velocità di lancio e dell'angolo di lancio:

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\vartheta)}{g},$$

si possono calcolare le velocità corrispondenti agli estremi indicati per l'intervallo dei valori di ϑ . Prendendo $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, i valori della velocità iniziale corrispondenti agli estremi dell'intervallo sono 9.9 m/s e 10.6 m/s . Per valori intermedi di ϑ , il valore della velocità iniziale sarà contenuto entro questi due estremi e sarà quindi prossimo al valore 10 m/s . [b]

4. Bisogna calcolare, in funzione della distanza iniziale (D), il tempo (T) che impiegherebbe il ghepardo a raggiungere la gazzella, e quindi trovare D imponendo che tale tempo sia maggiore di $T_M = 15 \text{ s}$. Dette v_{gh} e v_{ga} , rispettivamente, le velocità del ghepardo e della gazzella, si ha $T = D/(v_{gh} - v_{ga})$, per cui $T > T_M$ implica $D > T_M(v_{gh} - v_{ga}) = 15 \text{ s} \times 30 \text{ km/h} = 15 \text{ s} \times (30/3.6) \text{ m/s} = 125 \text{ m}$. [c]
5. La Terra ruota intorno al proprio asse con una velocità angolare tale da farle compiere un giro completo in un periodo T pari a 24 ore, cioè 86400 s . Detta Ω tale velocità angolare, si ha $\Omega = 2\pi/T$. I punti sulla superficie terrestre si muoveranno tutti con la stessa velocità angolare (perché il periodo di una rotazione è lo stesso per tutti), ma lungo traiettorie circolari, il cui raggio (r) dipende dalla latitudine (α). In particolare, $r = R \cos \alpha$, con R il raggio della Terra ($R \approx 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$). La velocità tangenziale di un punto che si trovi alla latitudine α è pertanto

$$v = \Omega r = \frac{2\pi}{T} R \cos \alpha \approx 330 \text{ m/s}. [c]$$

6. L'equazione più generale per la traiettoria di un punto che si muove sotto l'azione della forza peso è

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2.$$

Si vede che, scegliendo opportunamente i parametri, si può ottenere qualsiasi parabola nel piano xy , purché questa abbia la concavità rivolta verso il basso. La parabola riportata nel testo non fa eccezione: essa corrisponde ad una traiettoria con $y_0 = h = 4 \text{ m}$, $x_0 = a = 0.5 \text{ m}$, $v_{0y} = 0$ e $v_{0x} = \sqrt{g/2b} = 1.56 \text{ m/s}$. [a]

7. La risposta giusta la si trova direttamente, per esclusione. Il moto non è di tipo armonico (perché è dato dalla somma di un termine armonico e di un termine lineare in t) e non c'è alcuna ragione per ritenere che il moto descritto non possa aver luogo (la funzione è definita e continua per ogni valore di t). L'unica risposta possibile è la prima. Si può verificare che essa è corretta, per esempio, calcolando la velocità del punto (cioè derivando la $x(t)$ rispetto a t) e osservando che, per i valori numerici forniti, essa è sempre positiva per $t > 0$. Pertanto, poiché il punto parte dalla posizione $x(0) = C (> 0)$, esso non passa mai per la posizione $x = 0$. [a]

8. L'uomo può muoversi lungo il corridoio nella direzione del treno o nella direzione opposta. Nel primo caso la velocità percepita da un osservatore solidale con la Terra sarà 110 km/h, nel secondo 90 km/h. Poiché la direzione dell'uomo non è specificata nel testo, la sua velocità rispetto alla Terra non può essere calcolata. [c]
9. Si può ragionare in termini di velocità relativa tra le due automobili. Se v è la velocità della prima automobile e $2v$ quella della seconda, le due automobili si avvicinano tra loro con velocità pari a v . Dovendo colmare la distanza D nel tempo t , la velocità relativa sarà quindi $v = D/t$, per cui la velocità dell'automobile inseguitrice sarà $2v = 2D/t$. [a]
10. Le componenti cartesiane della velocità del punto sono:

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2at \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = b \end{cases}$$

e il modulo della velocità è $v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$. Per $t = 1$ s, si ha $v_x = 4$ m/s e $v_y = 3$ m/s, da cui $v = 5$ m/s. [a]

11. Il moto dei due punti può essere ricondotto ad un moto unidimensionale. Il punto che si muove con velocità maggiore raggiungerà l'altro coprendo la distanza iniziale che lo separa dal primo (D), misurata lungo la circonferenza, nel tempo $D/|v_1 - v_2|$. Nel testo, dicendo che "i punti sono separati inizialmente di un angolo $\pi/2$ ", non viene specificato se la distanza che il più veloce dei due punti deve coprire è pari a $D = \pi R/2$ o a $D = 3\pi R/2$. I dati quindi non sono sufficienti per trovare la risposta. [c]
12. Si può trovare la soluzione semplicemente provando quale delle tre risposte soddisfa le condizioni iniziali date. In questo modo si vede che l'unica risposta che fornisce il corretto valore di $x(0)$ è la seconda (la prima dà lo stesso valore ma con il segno negativo, mentre la terza dà A). In un caso più generale, potrebbe essere necessario verificare anche il valore della velocità iniziale, $v(0)$. Un altro modo di procedere consiste nell'utilizzare le formule che forniscono i valori delle costanti A e φ in funzione dei valori iniziali di posizione e velocità. In tal caso però non bisogna dimenticare di verificare che il valore ottenuto tramite l'arcotangente non debba essere aumentato di π . Inoltre, si faccia attenzione a quale funzione trigonometrica è stata utilizzata per descrivere il moto armonico: le formule per A e ϕ sono diverse se si scrive la legge oraria del moto come $A \cos(\omega t + \varphi)$ o come $A \sin(\omega t + \varphi)$! [b]

13. Poiché

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t),$$

la legge oraria $x(t) = A \cos^2(\omega t)$ descrive un moto oscillatorio di ampiezza $A/2$ e pulsazione 2ω , che avviene intorno alla posizione $x = A/2$. [c]

14. Nel moto dei gravi, l'accelerazione è sempre un vettore di modulo pari a g , diretto verso il basso. [b]
15. L'accelerazione centripeta (o normale) rappresenta la componente ortogonale alla traiettoria dell'accelerazione di un punto. Il valore della componente normale lo si ottiene proiettando il vettore accelerazione lungo la direzione ortogonale alla traiettoria. Nel caso del moto di un grave, vale quanto detto a proposito del test 14, per cui il modulo dell'accelerazione vale g . Se la traiettoria forma l'angolo di α con la verticale, la componente normale sarà $a_n = g \sin \alpha$. In questo caso $\alpha = 45^\circ$, per cui $a_n = g/\sqrt{2}$. [a]
16. Nel vertice della traiettoria di un grave si annulla la componente verticale della velocità. Tale componente segue la legge di un moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $-g$ e con velocità iniziale data dalla componente verticale (v_{0y}) della velocità iniziale del grave. In particolare, il tempo necessario per raggiungere il vertice (t_v) corrisponde al tempo necessario affinché la velocità verticale si annulli, che è v_{0y}/g . La componente orizzontale della velocità iniziale non interviene in alcun modo nella determinazione di t_v . [b]
17. La distanza a cui ricade un grave che si muove di moto parabolico dipende dal tempo di volo e dalla componente orizzontale (v_{0x}) della velocità iniziale. Tale distanza, infatti, corrisponde allo spazio percorso da un punto che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_{0x} per un tempo pari al tempo di volo. Quest'ultimo, però,

dipende dalla componente verticale della velocità iniziale (vedi test 16). La gittata quindi dipende da entrambe le componenti della velocità iniziale. Lo si vede anche dall'espressione della gittata ottenuta nel caso in cui il grave venga lanciato da quota nulla, cioè:

$$R = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}. \text{ [c]}$$

18. Nel moto dei gravi, l'accelerazione è sempre un vettore di modulo pari a g , diretto verso il basso, qualsiasi siano il modulo e la direzione della velocità del grave. Ciò è vero anche quando si parla di "velocità iniziale". Tutto ciò che precede l'istante iniziale, e quindi un'eventuale accelerazione del grave per portarlo alla velocità iniziale, non ha alcuna influenza sul valore della accelerazione iniziale. [b]
19. Il raggio di curvatura (R) di una traiettoria in un punto può essere espresso mediante il modulo della velocità (v) del corpo in quel punto e la sua accelerazione normale (a_n): $R = v^2/a_n$. Per il calcolo di a_n si procede come nel test 15, solo che ora la traiettoria è orizzontale (nel punto che stiamo considerando) per cui $a_n = g$. Assumendo $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, con $v = 10 \text{ m/s}$ si ha $R \approx 10 \text{ m}$. [a]
20. L'accelerazione tangenziale rappresenta la componente parallela alla traiettoria dell'accelerazione di un punto. Il valore della componente tangenziale lo si ottiene proiettando il vettore accelerazione lungo la direzione della tangente alla traiettoria nel punto considerato. Nel caso del moto di un grave, l'accelerazione è sempre un vettore di modulo pari a g , diretto verso il basso. In particolare, nel vertice della traiettoria l'accelerazione è ortogonale alla traiettoria e quindi l'accelerazione tangenziale è nulla. Per inciso, questo corrisponde al fatto che la velocità presenta un minimo in corrispondenza del vertice della traiettoria. [b]