Test a Risposta Multipla: Esempio3
- Soluzioni Commentate ($26 \div 55$) -

26. In questo test, come nei successivi cinque, viene richiesto di valutare un lavoro, o una grandezza legata ad esso, partendo dai valori, stimati solo in base alle nostre esperienze o alla nostra sensibilità, di altre grandezze fisiche. Naturalmente, in questo tipo di valutazioni non si possono che ottenere valori approssimati, che possono quindi fornire solo ordini di grandezza. Nel caso in questione, si tratta di valutare il peso di un libro sulla base dell'energia (E) che questo acquista cadendo da un tavolo. Dal teorema delle forze vive segue che l'energia cinetica acquistata dal libro è pari al lavoro totale compiuto dalle forza agenti su di esso. Se trascuriamo la resistemza dell'aria, tale lavoro coincide con il lavoro compiuto dalla forza peso, che è pari a mgh, dove h è l'altezza del tavolo. Per calcolare il peso del libro (mg) bisogna quindi conoscere h. Anche se il valore di h non viene fornito nel testo, si può prendere, come ordine di grandezza, $h \approx 1$ m, per cui risulta che $mg = E/h \approx 10$ N. Per fugare ogni dubbio, notiamo che la risposta [b] avrebbe implicato un'altezza del tavolo dell'ordine di 5 m, mentre questa sarebbe stata di 20 m per la risposta [c]. Tale tipo di controllo è consigliabile quando il valore ottenuto tramite le nostre stime non coincide con alcuna delle possibili risposte indicate nel test. [a]

27. 10 km/h equivalgono a circa 3 m/s (ricordiamo che 1 km/h = 1/3.6 m/s), mentre la massa di un uomo può essere stimata dell'ordine di 80 kg. Dal teorema delle forze vive segue che l'energia cinetica acquistata (o, come in questo caso, ceduta) dall'uomo è pari al lavoro totale compiuto dalle forze agenti su di esso. In questo caso l'energia cinetica dell'uomo deve passare dal valore iniziale, $mv^2/2$, a 0 e tale deve essere il modulo del lavoro (L) compiuto sull'uomo per fermarlo. Pertanto $L = mv^2/2 \approx 360$ J. [c]

28. In assenza di altre forze che compiano lavoro, l'energia cinetica ($mv^2/2$) acquistata da un corpo di massa m durante la discesa per un dislivello h è pari al lavoro compiuto su di esso dalla forza peso, che è mgh. Pertanto $v = \sqrt{2gh}$, indipendentemente dalla massa del corpo e, nel caso in questione, $v \simeq 2$ m/s. Incidentalmente, ricordiamo che questo valore non dipende dalla traiettoria seguita dal corpo e dalla presenza o meno di vincoli lisci, perché questi non compiono lavoro sul corpo in discesa. Il valore del peso dell'uomo fornito nel test è completamente inessenziale. [b]

29. Si tratta di stimare l'ordine di grandezza della massa del motorino con il guidatore. Un valore verosimile potrebbe essere $m \approx 10^2$ kg, mentre 50 km/h corrispondono a circa 14 m/s. L'energia cinetica risulta dell'ordine di $mv^2/2 \approx 10^4$ J. [b]

30. In questo caso si deve stimare la massa dell'automobile, che può essere dell'ordine di 10^3 kg (1 tonnellata), per cui $v = \sqrt{2E_c/m} \approx 30$ m/s. [b]

31. La massima velocità che può raggiungere un ghepardo è dell'ordine di 100 km/h, cioè circa 30 m/s, per cui $mv^2/2 \approx 22000$ J. [c]

32. Alla soluzione si potrebbe giungere per esclusione. Infatti, il punto materiale è soggetto *soltanto* alla forza elastica, per cui il suo moto è necessariamente di tipo armonico e, dallo studio della cinematica del moto armonico, sappiamo che il punto possiede velocità nulla in corrispondenza degli estremi dell'intervallo di oscillazione. Comunque, verifichiamo che la risposta corretta è la prima. Per una forza elastica conosciamo l'energia potenziale in funzione della variabile spaziale ($U = kx^2/2$, con k costante elastica e x variabile spaziale, con $x = 0$ corrispondente alla posizione di equilibrio) e sappiamo che l'energia meccanica totale ($E = E_c + U$, con E_c = energia cinetica) si mantiene costante durante il moto. Questo, in particolare, significa che l'energia meccanica coincide con la sola energia cinetica quando il punto passa per la posizione di equilibrio (dove $U = 0$) mentre coincide con la sola energia potenziale nei punti in cui l'energia cinetica è nulla (cioè quando $v = 0$). Quest'ultima circostanza si verifica nelle posizioni $x = \pm A$, perché lì il punto inverte il suo moto e quindi la sua velocità deve essere nulla. Pertanto, l'energia meccanica del punto vale esattamente $E = kA^2/2$. Il valore di k non viene fornito, ma si conosce il valore della forza massima. Poiché la forza è di tipo elastico e quindi rispetta la legge di Hooke, il suo valore massimo risulta essere $F = kA$, cioè $k = F/A$, da cui $E = FA/2 = 0.1$ J. Tale valore va confrontato con il valore dell'energia meccanica calcolato in corrispondenza della posizione di equilibrio, che è $E = mv^2/2 = 0.4$ J. Se ne deduce che i valori numerici forniti nel testo sono inconsistenti tra loro. [a]

33. Durante il suo moto, il corpo è soggetto solo alla forza peso e alla reazione normale del piano inclinato. La prima è una forza conservativa mentre la seconda non compie lavoro, essendo diretta ortogonalmente alla traiettoria, per cui l'energia meccanica del grave si conserva durante il moto. Prendendo come riferimento per il calcolo dell'energia potenziale (U) la quota corrispondente alla base del piano, l'energia meccanica del grave vale quindi

$E = mv_0^2/2$, pari alla sua energia cinetica al momento del lancio. Il grave sale fino a fermarsi alla quota h, in cui la sua energia meccanica è tutta di tipo potenziale. A questa quota si ha $E = U(h) = mgh$, per cui $h = v^2/2g$, indipendentemente dall'inclinazione del piano. La distanza percorsa sul piano (d) invece dipende dall'angolo di base del piano θ, essendo $d = h/\sin\theta$. A parità di quota finale, quindi, all'aumentare dell'angolo di base la distanza percorsa diminuisce. [c]

34. Dal teorema delle forze vive segue che il lavoro totale compiuto sul punto materiale (cioè il lavoro compiuto dalla risultante di tutte le forze applicate al corpo, siano esse conservative o non conservative) è pari alla variazione della sua energia cinetica. Poiché il punto cui si fa riferimento nel testo è inizialmente fermo, la variazione di energia cinetica coincide con l'energia cinetica finale E_c. Se la forza applicata al punto (che è l'unica!) mantenesse un valore costante durante il moto, il lavoro da essa compiuto sarebbe pari a 6 J, e tale dovrebbe essere anche E_c, che invece è di 3 J. In realtà, il valore di 6 N indicato nel testo si riferisce solo al valore iniziale della forza applicata, ma è evidente che tale valore deve cambiare durante lo spostamento del punto. [c]

35. Supponiamo dapprima che il mazzo di chiavi venga lanciato verticalmente. La quota massima raggiunta (h) dipende dalla velocità (v) con cui esso viene lanciato. In particolare, utilizzando la conservazione dell'energia meccanica (vedi test 33), si ricava $h = v^2/2g$, ovvero $v = \sqrt{2gh}$. Si noti che questo valore della velocità iniziale è quello per cui il corpo arriva alla quota h con velocità nulla. Valori maggiori della velocità iniziale implicano che il corpo arriva alla quota h con un residuo di energia cinetica, e quindi con una velocità diversa da zero, che gli consentirebbe di raggiungere quote maggiori. Analogamente, se il mazzo fosse lanciato con un angolo di lancio $\theta \neq \pi/2$, la sua velocità nel vertice della traiettoria sarebbe necessariamente diversa da zero (varrebbe $v\cos\theta$, come la componente orizzontale della velocità iniziale) e quindi la sua energia meccanica dovrebbe essere maggiore di mgh. In conclusione, la minima velocità iniziale è proprio $v_{\min} = \sqrt{2gh}$, corrispondente al caso in cui il mazzo viene lanciato verticalmente e arriva al secondo piano con velocità nulla. Il valore di h non viene fornito ma può essere facilmente stimato, considerando che un piano di un condominio ha un'altezza media di 3 m, da cui $h \approx 6$ m. Pertanto $v_{\min} \approx 11$ m/s. [a]

36. Il lavoro (L) che occorre compiere per sollevare un corpo per un dislivello h è uguale (e opposto) al lavoro compiuto sul corpo nello stesso spostamento dalla forza peso. Quest'ultimo è indipendente dal percorso seguito e vale $-mgh$. Si può osservare che, se il lavoro che si compie contro la forza peso è maggiore di mgh e non vi sono altre forze agenti sul corpo, il lavoro totale compiuto sul corpo è maggiore di zero e, dal teorema delle forze vive, esso raggiunge la quota h con una velocità non nulla. Nel nostro caso, poiché la massa di un litro d'acqua vale $m = 1$ kg, si ha $L \simeq 100$ J. [c]

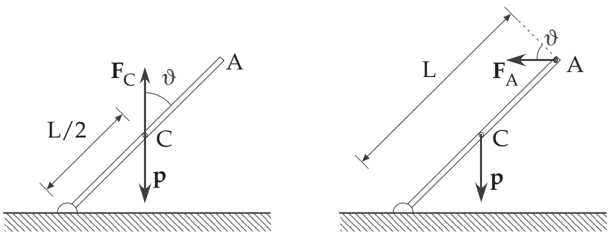
37. Il teorema delle forze vive afferma che il lavoro compiuto dalla risultante di tutte le forze applicate ad un corpo in un dato spostamento è pari alla variazione dell'energia cinetica del corpo. Quando un corpo si muove con velocità *costante in modulo*, la sua energia cinetica rimane costante, e quindi il lavoro totale compiuto sul corpo è nullo. Naturalmente, poiché sul corpo agiscono diverse forze, è possibile che alcune di esse compiano un lavoro positivo (in questo caso, la forza peso), altre un lavoro negativo (la forza di attrito), altre un lavoro nullo (la reazione normale del piano), ma la somma dei lavori di tutte le forze è sicuramente nulla. [b]

38. Il lavoro compiuto per comprimere la molla della quantità d lo si ritrova sotto forma di energia potenziale della molla, che è appunto $U = kd^2/2$. Tale energia viene successivamente utilizzata per far accelerare la massa che, una volta lanciata, dispone di un'energia cinetica ancora pari circa a $E_c = kd^2/2$ (sarebbe esattamente uguale a questo valore se si potesse trascurare completamente l'attrito con il piano durante la fase di lancio). Infine, l'energia cinetica del corpo viene completamente dissipata per attrito nel tratto di lunghezza L. Ciò avviene perché il lavoro compiuto dalla forza di attrito, per il teorema delle forze vive, uguaglia la variazione di energia cinetica, cioè $-F_A L = -E_c$. In definitiva, il lavoro compiuto dalla forza di attrito deve essere uguale, in modulo, all'energia potenziale della molla prima del lancio, cioè $F_A L = kd^2/2$, da cui $L = kd^2/2F_A$. E' chiaro che, se la stessa molla venisse compressa di una quantità doppia ($d' = 2d$), la distanza percorsa sul piano scabro sarebbe $L' = k(d')^2/2F_A = k(2d)^2/2F_A = 4kd^2/2F_A = 4L$. [c]

39. L'energia meccanica di un punto materiale si conserva ogni qual volta tutte le forze che compiono lavoro su di esso sono conservative. Le forze esercitate da vincoli lisci non compiono lavoro (perché sono dirette in direzione ortogonale al vincolo) mentre le forze elastiche sono forze conservative (come si può verificare facilmente calcolando il lavoro che esse compiono quando il loro punto di applicazione viene spostato tra due punti e notando che tale lavoro dipende solo dalle coordinate di questi punti). D'altro canto, le forze dipendenti dalla velocità, come le forze di attrito viscoso, non sono conservative perché il lavoro che esse compiono in uno spostamento del loro punto di applicazione non può dipendere solo dalle coordinate dei punti iniziale e finale, ma dipende anche da come è stato effettuato lo spostamento. [a]

40. La situazione è analoga a quella del test 38. In questo caso le sole forze che compiono lavoro sono le forze elastiche delle due molle (poiché la forza peso e la reazione normale sono dirette ortogonalmente alla traiettoria e non c'è attrito tra corpo e piano) e tali forze sono conservative. Ciò implica che l'energia meccanica si conserva durante il moto del corpo. In particolare, nello stato iniziale, cioè quello per cui la molla 1 è compressa e la massa è ferma, l'energia meccanica vale $E = k_1 d_1^2/2$. Quando il corpo abbandona la molla 1 e si muove sul piano liscio, la sua energia cinetica è ancora uguale a E e quando esso viene fermato dalla molla 2 tale energia cinetica viene integralmente convertita in energia potenziale della molla 2, cioè $E = k_2 d_2^2/2$. Uguagliando l'energia meccanica iniziale a quella finale si ha quindi $k_1 d_1^2/2 = k_2 d_2^2/2$, da cui $d_2 = \sqrt{k_1/k_2}\, d_1$. [b]

41. Le due situazioni sono mostrate in figura. In entrambi i casi la condizione di equilibrio rotazionale impone che la somma dei momenti assiali delle forze esterne agenti sulle sbarretta sia nulla. Le uniche forze che hanno momento non nullo rispetto all'asse di rotazione sono la forza peso della sbarretta ($\mathbf{p}$) e le forze applicate, $\mathbf{F}_C$ o $\mathbf{F}_A$, perché l'eventuale reazione della cerniera ha sicuramente momento nullo, essendo applicata sull'asse di rotazione.



Nel primo caso, il momento assiale di $\mathbf{p}$ è pari a $-(L/2)p\sin\vartheta$ (il segno meno è dovuto alla convenzione secondo la quale momenti assiali positivi inducono rotazioni in verso antiorario), mentre quello di $\mathbf{F}_C$ è dato da $+(L/2)F_C\sin\vartheta$, per cui $\tau = -(L/2)p\sin\vartheta + (L/2)F_C\sin\vartheta = 0$ implica $F_C = p$. Nel secondo caso, il momento della forza peso è uguale a prima, mentre quello di $\mathbf{F}_A$ vale $+LF_A\cos\vartheta$ e quindi la condizione $\tau = -(L/2)p\sin\vartheta + LF_A\cos\vartheta = 0$ impone $F_A = (1/2)p\tan\vartheta$. Se $\vartheta = 45°$, si ha $F_A = p/2$ e quindi $F_A = F_C/2$. [a]

42. L'energia cinetica del sistema (E_c) è data dalla somma delle energie cinetiche della carrucola e della massa, così come l'energia potenziale (U) è data dalla somma delle loro energie potenziali. L'energia meccanica (E), definita come la somma delle due precedenti, si conserva durante il moto e quindi deve assumere lo stesso valore nella situazione iniziale e in quella finale. Indicando con Δ le variazioni tra le quantità nella posizione finale e le stesse in quella iniziale, si ha quindi $\Delta E = \Delta E_c + \Delta U = 0$, da cui $\Delta E_c = -\Delta U$. Poiché il centro di massa della carrucola non si è spostato, l'energia potenziale della carrucola non è cambiata e quindi la variazione di energia potenziale del sistema coincide con la variazione di energia potenziale del solo corpo appeso (di massa m). Se questo è sceso di una quota pari ad h, tale variazione è pari a $-mgh$. In definitiva, $\Delta E_c = -\Delta U = mgh \simeq 20$ J. Bisogna osservare che, se il sistema è inizialmente in quiete, tale variazione di energia cinetica coincide con l'energia cinetica finale *totale* del sistema, che comprende sia l'energia cinetica traslazionale della massa ($mv^2/2$) che quella, rotazionale, della carrucola ($I\omega^2/2$). Per questo motivo, la velocità della massa che scende non sarà uguale a $\sqrt{2gh}$, come sarebbe se la carrucola non ci fosse, ma sarà minore di $\sqrt{2gh}$. [b]

43. L'energia cinetica di un corpo che ruota intorno ad un asse con velocità angolare ω è data da $E_c = I\omega^2/2$, dove I è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. Se il valore della velocità angolare viene portato a $\omega' = \omega/2$, l'energia cinetica di rotazione diventa $E_c' = I(\omega')^2/2 = I(\omega/2)^2/2 = (I\omega^2/2)/4 = E_c/4$. [c]

44. Ogni punto di un corpo che ruota intorno ad un asse con velocità angolare ω si muove di moto circolare, con la stessa velocità angolare, su una circonferenza avente per raggio la distanza (R) del punto dall'asse di rotazione. La sua velocità sarà quindi $R\omega$ ed esso dovrà essere sottoposto ad una forza centripeta di valore pari a $F_c = mv^2/R = m\omega^2 R$. Nel caso presente, il corpo si muove con accelerazione angolare (α) *costante* e quindi la sua velocità angolare sarà una funzione lineare del tempo, del tipo $\omega(t) = \alpha t + \omega_0$. La corrispondente forza centripeta sarà quindi $F_c = m\omega^2 R = m(\alpha t + \omega_0)^2 R$, che è una funzione quadratica di t. [c]

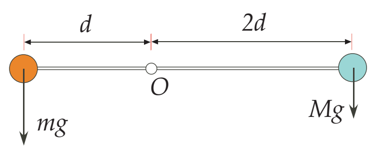
45. Consideriamo l'insieme dei due pattinatori come un unico sistema. Poiché i due pattinatori sono inizialmente fermi, il centro di massa del sistema è inizialmente fermo e, poiché su di esso non agisce alcuna forza orizzontale (trascurando le forza di attrito tra pattini e ghiaccio), la sua posizione non può cambiare nel tempo. Fissiamo un sistema di riferimento orizzontale, con l'origine coincidente con il centro di massa. Indicando con m e M le

masse dei due pattinatori, con $M > m$, e con x e X le rispettive coordinate, la coordinata del centro di massa risulta $x_{\rm cm} = (xm + XM)/(m + M) = 0$, da cui $x = -(M/m)X$. Se il pattinatore più pesante compie uno spostamento ΔX, quello più leggero ne compie uno pari a $\Delta x = -(M/m)\Delta X$, che è maggiore (in modulo) di ΔX e, ovviamente, diretto nel verso opposto. Alle stesse conclusioni si giunge considerando la quantità di moto del sistema (P), che è inizialmente nulla e tale deve rimanere. Indicando con v e V le velocità dei due pattinatori si ha $P = mv + MV = 0$, da cui $v = -(M/m)V$, per cui la velocità del pattinatore più leggero è maggiore (in modulo) di quella del pattinatore più pesante. Nello stesso intervallo di tempo, quindi, il pattinatore più leggero avrà percorso uno spazio maggiore. [c]

46. In un sistema di riferimento *inerziale*, la risultante delle forze esterne agenti su un sistema di punti materiali è proporzionale all'accelerazione del centro di massa del sistema, con fattore di proporzionalità pari alla massa del sistema ($\mathbf{F}_{\rm tot}^{(\rm ext)} = M\mathbf{a}_{\rm cm}$). Le forze interne, viceversa, non hanno alcun ruolo nel moto del centro di massa del sistema. Se le forze esterne non si compensano, quindi, il centro di massa si muove di moto accelerato. Tuttavia, lo stato di moto di un punto dipende dal sistema di riferimento da cui il punto viene osservato. E' chiaro che il moto del centro di massa in questione sarà sempre accelerato, se osservato da un qualunque sistema di riferimento inerziale, ma sarà sempre possibile immaginare un sistema di riferimento (necessariamente *non inerziale*) che si muove in maniera solidale al punto. In questo particolare sistema di riferimento il punto appare fermo. [b]

47. Come è stato ricordato a proposito del test 46, in un sistema di riferimento inerziale la risultante delle forze esterne agenti su un sistema di punti materiali è proporzionale all'accelerazione del centro di massa del sistema, con fattore di proporzionalità pari alla massa del sistema ($\mathbf{F}_{\rm tot}^{(\rm ext)} = M\mathbf{a}_{\rm cm}$). Le forze interne, viceversa, non hanno alcun ruolo nel moto del centro di massa del sistema. Inoltre, il fatto che il centro di massa si muova di moto rettilineo uniforme non dice nulla sul moto di ciascuno dei punti materiali che costituiscono il sistema. L'unica risposta possibile è quindi la terza. Infatti, se il centro di massa di un sistema di punti si muove di moto *rettilineo uniforme*, cioè $\mathbf{a}_{\rm cm} = 0$, la risultante delle forze esterne agenti sul sistema deve essere *necessariamente* nulla, cioè $\mathbf{F}_{\rm tot}^{(\rm ext)} = 0$, e tale valore si deve mantenere costante nel tempo. [c]

48. Dobbiamo imporre la condizione di equilibrio rotazionale della sbarretta intorno all'asse di rotazione (O), cioè che la somma dei *momenti assiali delle forze esterne* agenti sulla sbarretta sia nulla. Le uniche forze agenti sulla sbarretta che hanno momento assiale non nullo sono le forze peso delle due masse, pari rispettivamente a mg e a Mg.



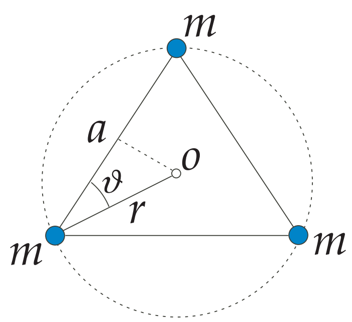
C'è un'altra forza agente sul sistema (non mostrata in figura), ed è la reazione vincolare dell'asse di rotazione sulla sbarretta. Tale forza fa sì che la risultante delle *forze esterne* agenti sulla sbarretta sia nulla, e che quindi il centro di massa del sistema non trasli, ma tale forza, essendo applicata direttamente sull'asse, ha braccio nullo e quindi ha momento assiale nullo. La risultante dei momenti assiali agenti sulla sbarretta è quindi data dalla somma dei momenti assiali delle due forze peso. Per quanto riguarda la forza applicata alla massa m, essa ha braccio pari a d, e quindi il corrispondente momento assiale vale mgd (con segno positivo, perché esso indurrebbe una rotazione antioraria al sistema). Per analoghe ragioni, l'altra forza peso ha invece momento assiale pari a $-2Mgd$. La somma dei momenti vale $mgd - 2Mgd = gd(m - 2M)$, che deve essere nulla in condizioni di equilibrio rotazionale, e quindi deve essere $(m - 2M) = 0$, da cui $M = m/2$. [c]

49. Il momento di inerzia di un cilindro omogeneo, di massa M e raggio di base R, che ruota intorno al proprio asse di simmetria vale $I_{\rm cm} = MR^2/2$. Il pedice "cm" è stato introdotto per sottolineare che l'asse di simmetria passa necessariamente per il centro di massa del cilindro. Per calcolare il momento d'inerzia (diciamo, I_O) rispetto ad un qualunqe altro asse parallelo all'asse di simmetria del cilindro ma posto ad una distanza d da esso, si può ricorrere al teorema di Huygens–Steiner (teorema degli assi paralleli), secondo il quale $I_O = I_{\rm cm} + Md^2$. In particolare, da quest'ultima espressione si vede che, al variare di d, il minimo valore del momento di inerzia lo si ottiene per $d = 0$, cioè quando l'asse passa per il centro di massa del sistema. Valori di d diversi da zero implicano infatti che a $I_{\rm cm}$ si debba sommare il termine Md^2, che è sempre positivo. Nel caso in questione, la distanza tra i due assi è esattamente pari a R che, per il solo fatto di essere una quantità diversa da zero, implica $I' > I$. [c]

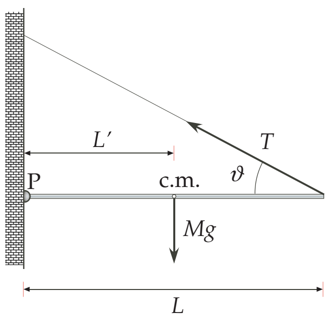
50. L'energia cinetica di rotazione di un corpo che ruota intorno ad un asse con velocità angolare ω può essere espressa come $E_c = I\omega^2/2$, dove I è il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse di rotazione. Nel problema in questione, c'è quindi da valutare in quale dei due casi il momento d'inerzia del corpo è maggiore. Trattandosi di un insieme discreto di masse puntiformi, conviene calcolare il momento d'inerzia del corpo come la somma dei momenti d'inerzia delle singole masse, cioè $I = \sum_i m_i R_i^2$. Nel primo caso (asse di rotazione passante per m_1), il momento d'inerzia della prima massa è nullo perché essa si trova a distanza nulla dall'asse, mentre quello della seconda vale $m_2\ell^2$, dove ℓ è la lunghezza della sbarretta. Pertanto, $I^{(1)} = m_2\ell^2$. Nel secondo caso (asse di rotazione passante per m_2), la seconda massa ha momento d'inerzia nullo mentre quello della prima vale $m_1\ell^2$, per cui il momento d'inerzia del corpo vale $I^{(2)} = m_1\ell^2$. Poiché $m_1 > m_2$, si ha $I^{(2)} > I^{(1)}$ e quindi $E_c^{(2)} > E_c^{(1)}$.

    Allo stesso risultato si sarebbe giunti considerando direttamente la somme delle energie cinetiche delle due masse. Infatti, nel primo caso la particella 1 è ferma, mentre l'altra si muove di moto circolare con velocità pari a $v = \omega\ell$, e quindi l'energia cinetica totale vale $E_c^{(1)} = m_2v^2/2$. Nel secondo caso la massa 2 è ferma mentre la prima si muove alla velocità v, e quindi l'energia cinetica totale vale $E_c^{(2)} = m_1v^2/2$. Poiché $m_1 > m_2$, $E_c^{(2)} > E_c^{(1)}$. [b]

51. Trattandosi di un insieme discreto di masse puntiformi, conviene calcolare il momento d'inerzia del corpo come la somma dei momenti d'inerzia delle singole masse, cioè $I = \sum_i m_i R_i^2$. In questo caso, le tre masse hanno lo stesso momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione (O) perché hanno tutte la stessa massa (m) e sono tutte alla stessa distanza (r) dall'asse di rotazione, per cui, detto I_1 il momento d'inerzia di ciascuna delle masse, si ha $I_1 = mr^2$ e il momento d'inerzia dell'intero sistema sarà $I = 3I_1 = 3mr^2$. Si tratta solo di valutare r. Poiché il triangolo su cui sono disposte le masse è equilatero, l'angolo ϑ mostrato in figura è di $30° = \pi/6$, per cui $r = (a/2)/\cos(\pi/6) = a/\sqrt{3}$. Il momento d'inerzia del sistema vale quindi $I = 3mr^2 = 3m(a/\sqrt{3})^2 = ma^2$. [b]

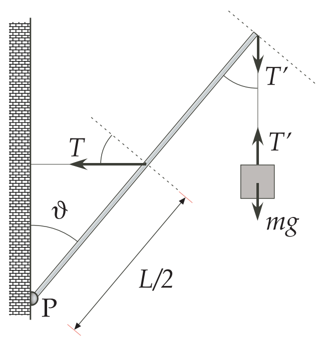


52. L'equilibrio rotazionale della sbarra richiede che la somma dei momenti assiali delle forze esterne agenti sulla sbarra sia uguale a zero. In questo caso le uniche due forze che agisono sulla sbarra e hanno momento assiale non nullo rispetto all'asse di rotazione sono la forza peso (pari a Mg) e la tensione del filo (T). Sulla sbarra agisce anche la reazione del vincolo in P (non mostrata in figura), ma essa ha braccio nullo e quindi ha momento assiale nullo.



    La forza peso produce un momento assiale esattamente uguale a quello che produrrebbe un punto materiale di massa M, posto nel centro di massa del corpo (c.m.). In questo caso il centro di massa è supposto trovarsi a distanza L' dall'asse di rotazione e la forza peso è diretta in direzione ortogonale alla sbarra, per cui il momento assiale di tale forza è pari a $\tau_1 = -MgL'$ (il segno meno è dovuto al fatto che tale momento, da solo, indurrebbe una rotazione oraria del corpo). La tensione del filo è applicata all'estremo libero della sbarra, cioè a distanza L dall'asse di rotazione, e la sua componente ortogonale alla sbarra vale $T \sin\vartheta$. Il momento assiale di tale forza è quindi pari a $\tau_2 = +TL\sin\vartheta$. L'annullamento del momento assiale totale impone che sia $\tau_1 + \tau_2 = -MgL' + TL\sin\vartheta = 0$, da cui $T = MgL'/(L\sin\vartheta)$. Mantenendo fissati gli altri parametri, al diminuire dell'angolo ϑ, $\sin\vartheta$ diminuisce e quindi T aumenta. Nella configurazione (1) l'angolo è maggiore, per cui la tensione è minore. [a]

53. Valgono le considerazioni generali fatte a proposito del test 52. In questo caso le forze applicate alla sbarra sono la tensione del filo collegato al muro (T) e quella del filo a cui è appeso il corpo di massa m (T'). Quest'ultima tensione è pari a mg perchè anche il corpo appeso deve essere in equilibrio. La massa della sbarra è invece trascurabile.



La sbarra, di lunghezza L, è soggetta ai momenti assiali $\tau_1 = +(L/2)T\cos\vartheta$ e $\tau_2 = -LT'\sin\vartheta = -mgL\sin\vartheta$, la cui somma deve annullarsi, cioè: $\tau_1 + \tau_2 = (L/2)T\cos\vartheta - mgL\sin\vartheta = 0$. Questo implica $m = T/(2g\tan\vartheta)$. Il massimo valore di m per cui il filo non si spezza è quindi $m_{\mathrm{M}} = T_{\mathrm{M}}/(2g\tan\vartheta)$ che, con i valori forniti, dà $m_{\mathrm{M}} \simeq 6$ kg. [a]

54. Il problema potrebbe essere risolto calcolando l'accelerazione angolare del cilindro dovuta alla forza di attrito applicata alla sua superficie esterna. Infatti, la somma dei momenti assiali agenti sul cilindro deve uguagliare il prodotto del momento d'inerzia per l'accelerazione angolare, cioè $\tau^{\mathrm{tot}} = I\dot{\omega}$. Tale somma coincide, in questo caso, con il solo momento assiale della forza di attrito, che vale $-RF_a$ (dove si è assunto antiorario il verso di rotazione del cilindro e quindi negativo il momento della forza di attrito). Una volta calcolata l'accelerazione angolare, che risulta costante, si potrebbero calcolare la velocità angolare e la coordinata angolare in funzione del tempo (moto circolare uniformemente decelerato), e quindi calcolare, in funzione di F_a, il tempo necessario per fermare il cilindro e il numero di giri percorsi.

    Un approccio sicuramente più rapido consiste nell'utilizzare il teorema delle forze vive per i moti rotatori. Questo afferma che il lavoro compiuto dalla somma dei momenti assiali deve uguagliare la variazione di energia cinetica rotazionale del corpo, cioè $L^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{AB}} = E_c^{(\mathrm{B})} - E_c^{(\mathrm{A})}$. Nell'istante in cui viene applicata la forza l'energia cinetica vale $I\omega^2/2$ mentre quando il cilindro si è fermato essa è ovviamente nulla, per cui il lavoro totale compiuto dalla forza di attrito deve essere pari a $-I\omega^2/2$. Tale lavoro è dato dal momento della forza d'attrito ($-RF_a$) moltiplicato per la differenza angolare tra la posizione finale e quella finale, che è $2\pi n$, dove n è il numero di giri, e quindi $L^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{AB}} = -2\pi nRF_a$. Dal teorema delle forze vive perciò risulta $2\pi nRF_a = I\omega^2/2$, da cui $F_a = I\omega^2/(4\pi nR) = MR\omega^2/(8\pi n)$ e quindi (con $M = 0.5$ kg, $R = 0.5$ m, $\omega = 10$ rad/s e $n = 4$) $F_a \simeq 0.5$ N. [a]

55. Il moto del centro di massa di un sistema di punti materiali dipende solo dalla risultante delle forze esterne agenti sui punti (in particolare, $\mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}_{\mathrm{tot}} = M\mathbf{a}_{\mathrm{cm}}$). Nel caso in questione, per come sono orientate le due forze esterne e per il loro valore, la risultante delle forze esterne è esattamente nulla. Pertanto, il centro di massa del sistema avrà accelerazione nulla e, essendo inizialmente fermo, rimarrà fermo. [a]