Proprietà dielettriche della materia

Corso di Fisica per Ingegneria delle Tecnologie per il Mare
Università Roma Tre

I materiali conduttori sono caratterizzati dal fatto che nel loro interno sono verificate particolari condizioni per cui è possibile il moto di alcune delle cariche che li costituiscono. Per esempio, nei metalli, ogni atomo ha uno o più elettroni separati dal resto dell'atomo e liberi di muoversi (nella cosiddetta *banda di conduzione*). Con l'applicazione di un opportuno campo elettrico $\mathbf{E}$ si può provocare un moto ordinato di elettroni dando luogo ad una *corrente elettrica*. Nei fenomeni elettrostatici, le cariche sono fisse per definizione, condizione che richiede necessariamente che il campo all'interno debba essere nullo. Lo stato di un conduttore in equilibrio elettrostatico è quindi definito da

$$\mathbf{E} = 0 \tag{1}$$

all'interno del conduttore. Naturalmente, si deve intendere che questa è una condizione media macroscopica.

Avvicinando un conduttore, carico o scarico, ad un altro corpo carico, ovvero introducendo un campo esterno $\mathbf{E}_0$, il campo elettrostatico all'interno del conduttore non sarebbe più nullo. Questo fatto provoca un movimento dei portatori di carica (elettroni nel caso dei metalli) che si ridistribuiscono nel conduttore, determinando in esso variazioni locali della densità di carica (*carica indotta*). Quest'ultima produce un campo elettrico indotto $\mathbf{E}_i$ aggiuntivo che, internamente al conduttore, bilancia esattamente quello applicato dall'esterno, cioè $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_i = 0$ all'interno del conduttore. Come si può dimostrare partendo dalla legge di Gauss, la carica di un conduttore in equilibrio si distribuisce sempre sulla sua superficie. In presenza di cavità al suo interno, la carica si distribuisce solo sulla superficie esterna.

Vogliamo adesso studiare come cambia il campo elettrostatico nello spazio tra conduttori carichi quando questo viene riempito con un **materiale isolante**. Le sostanze isolanti hanno la proprietà di ridurre il campo elettrico nello spazio tra i

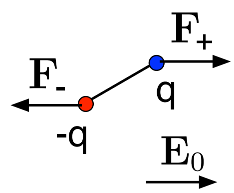

Figura 1

conduttori, e quindi anche la loro differenza di potenziale, e sono anche chiamate *sostanze dielettriche* o *dielettrici*. Vediamo i meccanismi che sono alla base di questo comportamento.

Nei materiali isolanti, a differenza che nei conduttori, gli elettroni non sono liberi di muoversi e, quindi, tutti gli atomi che li costituiscono rimangono neutri, anche in presenza di un campo elettrico applicato dall'esterno. Tuttavia, la presenza di un campo elettrico può influenzare l'orientazione nello spazio, o anche modificare la forma, delle singole molecole che costituiscono il materiale, con conseguenze osservabili a livello macroscopico.

Ciò è particolarmente evidente, per esempio, quando le singole molecole presentano un proprio *momento di dipolo*, ciò quando i centri di massa delle cariche positive e delle cariche negative che le compongono non coincidono tra loro, anche quando non è applicato alcun campo elettrico dall'esterno. Per esempio, questo è il caso della molecola di H_2O, poiché i due atomi di H non sono disposti simmetricamente rispetto all'atomo di O e si avrà, complessivamente, una maggiore concentrazione di elettroni intorno all'atomo di O. Sostanze di questo tipo prendono il nome di *sostanze polari*.

Pertanto il comportamento di queste molecole, qualora vengano immerse in in un campo elettrico, è simile a quello di un *dipolo elettrico* (cioè un sistema di due cariche puntiformi di segno opposto, vincolate agli estremi di un segmento di lunghezza fissata). La carica positiva è spinta dal campo elettrico nella direzione del campo, l'altra nella direzione opposta (vedi fig. 1). Se il campo è uniforme, le due forze hanno lo stesso modulo e quindi l'effetto complessivo sulla molecola è solo l'applicazione di un momento meccanico torcente, che tende a orientarla nella direzione del campo. Il fenomeno sarà contrastato dall'agitazione termica, che tenderà a orientare le molecole in direzioni casuali, ma è ragionevole pensare che, in presenza di un campo elettrico, le molecole tendano, in media, ad essere orientate nella direzione del campo. Questo fenomeno si chiama *polarizzazione dielettrica*.

E' utile osservare che, se il campo elettrico non è uniforme, le forze agenti sulle due cariche di un dipolo non hanno lo stesso modulo, per cui la loro risultante sarà diversa da zero e tenderà a far accelerare il centro di massa del dipolo nella direzione

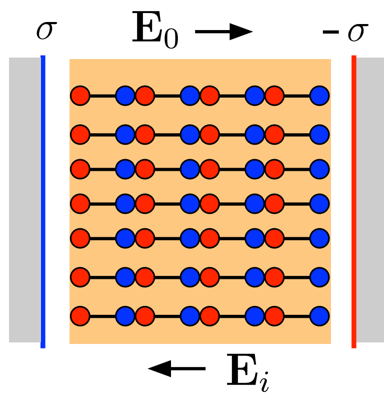

Figura 2

del campo (verso le zone in cui il campo è maggiore). Questo fenomeno spiega come mai corpi elettricamente neutri possano essere attratti da corpi carichi, come nel caso dei pezzetti di carta attratti da una bacchetta che sia stata caricata per strofinio.

In realtà, non è necessario che le molecole costituenti il materiale siano dotate di un proprio momento di dipolo per subire le azioni meccaniche descritte sopra, perché lo possono acquistare nel momento in cui vengono immerse in un campo elettrico. Infatti, in presenza di un campo elettrico esterno, i nuclei (che sono carichi positivamente) vengono spinti nella direzione del campo, mentre per gli elettroni accade il contrario. Pertanto, i centri di massa delle cariche elettriche positive e negative non coincideranno più e ogni singolo atomo potrà essere schematizzato come un dipolo elettrico. In questo caso, quindi, un momento di dipolo è indotto sui singoli atomi dalla presenza di un campo elettrico esterno.

Ora consideriamo l'effetto complessivo dell'allineamento delle molecole all'interno di un condensatore (p. es., piano). Possiamo osservare che all'interno del materiale gli eccessi di carica positiva e negativa di molecole contigue si annullano tra loro, dando luogo ad una densità di carica complessivamente nulla. Viceversa, questo non accade per le molecole che si trovano sulle superfici del materiale, vicino alle facce del condensatore, dove comparirà una densità di carica superficiale diversa da zero. L'effetto complessivo, quindi, sarà la comparsa di cariche di polarizzazione (Q_{pol}) sulle superfici del materiale a contatto con le armature del condensatore. Tali cariche avranno segno opposto rispetto a quelle (Q_{lib}, da *libere*) delle armature a cui sono affacciate e quindi produrranno un campo elettrico indotto che va a sottrarsi al campo esterno. Il campo totale ne risulta diminuito, e così anche la differenza di potenziale tra le armature, che in questo caso è pari al prodotto tra il campo elettrico e la distanza tra le armature.

In molti casi si può ipotizzare che la polarizzazione di un materiale produca un campo elettrico indotto proporzionale al campo esterno (*mezzi lineari*), che non dipenda da come è orientato il materiale rispetto alla direzione del campo (*mezzi isotropi*) e che sia uniforme in tutto il materiale (*mezzi omogenei*). Mezzi di questo tipo vengono comunemente indicati con la sigla *L.I.O.*

Per tenere conto della diminuzione del valore del campo elettrico in materiale L.I.O. si introduce un parametro scalare adimensionale, caratteristico del materiale, che prende il nome di *costante dielettrica relativa* o *permittività* del mezzo, tale che

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r} \;, \qquad \Delta V = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r} \;. \tag{2}$$

I valori di ε_r sono tipicamente maggiori per sostanze polari (p.es., per l'acqua vale circa 80) che per sostanze non polari (p.es., per il vetro vale circa 6).

Poiché la carica elettrica presente sulle armature del condensatore non viene modificata dalla presenza del materiale ma la differenza di potenziale ne risulta ridotta per un fattore ε_r, ne consegue che la capacità aumenta dello stesso fattore ε_r, cioè

$$C = \varepsilon_r C_0 \;, \tag{3}$$

per cui si può aumentare la capacità di un condensatore, a parità di geometria, inserendo del materiale dielettrico tra le armature.

Normalmente si introduce la *permittività elettrica assoluta*, indicata col simbolo ε e definita come

$$\varepsilon = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \;. \tag{4}$$

L'uso di questo parametro è particolarmente conveniente qualora ci si trovi di fronte a un sistema di cariche completamente immerso in un dielettrico L.I.O. In tal caso si possono utilizzare tutti i risultati ottenuti per lo stesso sistema nel vuoto, a patto di sostituire la permittività del dielettrico (ε) a quella del vuoto (ε_0).

Avendo, dunque, verificato la realtà fisica delle cariche di polarizzazione che vengono indotte da un campo elettrostatico, possiamo scrivere la *legge di Gauss* per il campo elettrico facendo apparire esplicitamente tali cariche:

$$\oint_\Sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\Sigma = \frac{Q_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{int})}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\mathrm{lib}}^{(\mathrm{int})} + Q_{\mathrm{pol}}^{(\mathrm{int})}}{\varepsilon_0} \;, \tag{5}$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore normale alla superficie in ogni punto (con verso uscente), secondo cui il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa Σ è uguale alla somma di tutte le cariche presenti all'interno, sia libere che di polarizzazione.

Il problema che sorge nell'uso della (5) è che vi compaiono anche le cariche di polarizzazione, che generalmente non sono note. A tal proposito è possibile definire il vettore $\mathbf{D}$, detto di **induzione dielettrica**, come

$$\mathbf{D} = \varepsilon \, \mathbf{E} \tag{6}$$

che descrive il modo in cui un campo elettrico $\mathbf{E}$ influenza la disposizione delle cariche elettriche in un mezzo, tenendo conto della polarizzazione elettrica del materiale. Poiché stiamo supponendo che il mezzo sia L.I.O., il vettore $\mathbf{D}$ è sempre proporzionale a $\mathbf{E}$ perché la permittività dielettrica è una costante scalare. Una trattazione leggermente più complessa è richiesta quando il campo esterno non è costante nel tempo. Se il campo esterno varia in maniera armonica, la permittività elettrica è ancora uno scalare (per mezzi L.I.O.), ma dipende dalla frequenza del campo.

Possiamo fare pochi semplici passaggi per capire come è legato il vettore $\mathbf{D}$ alle cariche elettriche in gioco. Infatti, usando le relazioni (6), (2) e (4) otteniamo

$$\oint_\Sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\Sigma = \oint_\Sigma \varepsilon \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\Sigma = \oint_\Sigma \varepsilon \, \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\Sigma = \oint_\Sigma \varepsilon_0 \, \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\Sigma \, . \tag{7}$$

Inoltre, ricordando che il flusso di $\mathbf{E}_0$ è legato alle cariche libere secondo il teorema di Gauss, cioè

$$\oint_\Sigma \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\Sigma = \frac{Q_{\mathrm{lib}}}{\varepsilon_0}, \tag{8}$$

ricaviamo che il vettore $\mathbf{D}$ soddisfa l'equazione

$$\oint_\Sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\Sigma = Q_{\mathrm{lib}}, \tag{9}$$

che è nota come **legge di Gauss per l'induzione dielettrica**. Essa afferma che il flusso dell'induzione dielettrica attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma delle sole cariche libere contenute all'interno della superficie stessa. Come per il caso della legge di Gauss per il campo elettrico, questa espressione è molto utile per risolvere problemi di elettrostatica in presenza di materiali isolanti per sistemi dotati di particolari simmetrie, perché non vi compaiono le cariche di polarizzazione. Una volta ottenuto $\mathbf{D}$, il corrispondente campo elettrico può essere calcolato invertendo la (6).

Come esempio di applicazione della (9) consideriamo il campo prodotto da un conduttore che occupa il semispazio $x < 0$ e sulla cui superficie piana in $x = 0$ sia presente della carica elettrica con densità superficiale σ uniforme. Il materiale è rivestito da uno strato piano di materiale dielettrico di spessore d e permittività

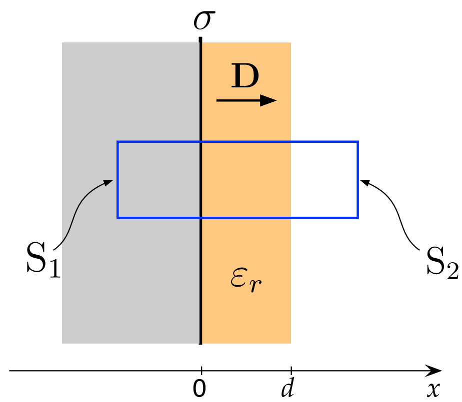

Figura 3

relativa ε_r (vedi fig. 3). Dobbiamo calcolare in campo elettrico in tutto lo spazio. Indichiamo con x la coordinata del punto in cui vogliamo calcolare il campo. Per applicare la (9) scegliamo come superficie di Gauss la superficie totale di un cilindro (in figura mostrato in sezione mediante il rettangolo blu) avente le basi parallele al piano conduttore e area di base S. Una delle due basi (S_1) è posta all'interno del conduttore, dove il campo è nullo; l'altra (S_2) è fuori dal conduttore. Per la simmetria del problema il campo elettrico deve essere diretto lungo l'asse x e deve dipendere solo da x.

Il flusso di $\mathbf{D}$ attraverso Σ coincide con il flusso attraverso S_2, perché su S_1 il campo è nullo, mentre sulla superficie laterale il campo è parallelo alla superficie. Pertanto si ha

$$\oint_\Sigma \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Sigma = D(x)\,S \tag{10}$$

D'altro canto, tale flusso deve uguagliare la somma delle cariche libere in essa contenute, che in questo caso è σS. Pertanto,

$$D(x) = \sigma \qquad (x > 0) \tag{11}$$

ed è uniforme in tutto il semispazio $x > 0$. Viceversa, il campo elettrico non sarà uniforme perché sono presenti mezzi con diverse permittività relative. In definitiva:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\[2ex] \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r} & (0 < x < d) \\[2ex] \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & (x > d) \end{cases} \tag{12}$$