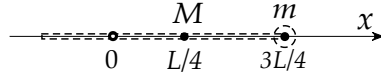


Soluzione del problema 1

- (a) Il centro di massa (CdM) del sistema può essere calcolato sostituendo a ciascun elemento del sistema (in questo caso, alla sbarra e alla sferetta) un punto materiale posizionato nel proprio CdM e avente massa uguale a quella dell'elemento:



Introducendo l'asse x mostrato in figura si ha, per la coordinata del CdM,

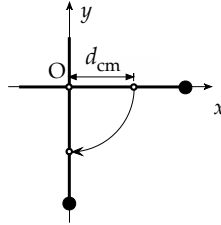
$$x_{\text{cm}} = \frac{ML/4 + 3mL/4}{M + m} = \frac{L}{4} \frac{M + 3m}{M + m} = 37.5 \text{ cm} ,$$

che coincide con la distanza del CdM dall'asse di rotazione (d_{cm}).

- (b) Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse dato può essere calcolato sommando i momenti d'inerzia della sferetta e della sbarra rispetto allo stesso asse. Il primo di essi è banalmente $I_{\text{sf}} = m(3L/4)^2$. Per il secondo (I_{sb}) si può sfruttare l'espressione di I_{cm} data nel testo e utilizzare il teorema di Huygens-Steiner (degli assi paralleli). Pertanto,

$$\begin{cases} I_{\text{sf}} = \frac{9}{16}mL^2 \\ I_{\text{sb}} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ML^2 \end{cases} \Rightarrow I = I_{\text{sf}} + I_{\text{sb}} = \frac{7M + 27m}{48}L^2 = 1.0 \text{ kg m}^2 .$$

- (c) Una volta lasciato libero di ruotare, il sistema acquista energia cinetica [$E_c = (1/2)I\omega^2$, con ω velocità angolare], a scapito della sua energia potenziale [$U = (M + m)gy_{\text{cm}}$, con y_{cm} coordinata verticale del CdM]. Poiché l'unica forza che compie lavoro è la forza peso, che è conservativa, si ha $\Delta E_c = -\Delta U$. La massima velocità angolare (ω_{max}) corrisponde alla posizione in cui il CdM raggiunge la quota minima, cioè quando la sbarra è verticale:

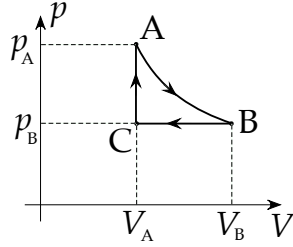


In tale posizione,

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}I\omega_{\text{max}}^2 = (M + m)g d_{\text{cm}} \Rightarrow \omega_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2g d_{\text{cm}}(M + m)}{I}} = 5.5 \text{ rad/s} .$$

Soluzione del problema 2

- (a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti ($pV = nRT$) e dai dati forniti dal testo:



- (b) Il lavoro totale compiuto dal ciclo corrisponde all'area racchiusa dalla curva nel grafico del punto precedente, che vale (con $V_B = 2V_A$ e $p_B = p_A/2$)

$$W = p_A V_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} - p_B (V_B - V_A) = \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right) p_A V_A = 773 \text{ J} .$$

- (c) Poiché $T_C < T_B$, il calore scambiato durante l'isobara è negativo (e quindi è ceduto). Pertanto, il sistema assorbe calore (Q_{ass}) solo nelle trasformazioni AB e CA. Nell'isoterma il calore assorbito (Q_{AB}) coincide con il lavoro compiuto (che è il primo termine nel risultato del punto precedente). Durante l'isocora il calore assorbito (Q_{CA}) è uguale alla variazione di energia interna che, per un gas perfetto monoatomico, vale $n c_V (T_A - T_C)$, con $c_V = (3/2)R$. Quindi

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{CA}} = 13.4\% .$$

(Esempio di) risposta alla domanda

Consideriamo un sistema costituito da N punti materiali di massa m_i ($i = 1, \dots, N$) situati in prossimità della superficie terrestre. Sia M la massa totale del sistema. Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse y verticale e poniamone l'origine, per semplicità, nel polo rispetto al quale calcoleremo i momenti. Ciascun punto è individuato dal raggio vettore $\mathbf{r}_i$ ed è soggetto alla forza peso $\mathbf{p}_i = -m_i g \hat{y}$. Il vettore $\mathbf{r}_{\text{cm}}$ individua la posizione del centro di massa (CdM) del sistema.

La forza peso totale agente sul sistema è pari a

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = - \sum_{i=1}^N m_i g \hat{y} = -g \hat{y} \sum_{i=1}^N m_i = -M g \hat{y},$$

che coincide con la forza peso che sarebbe applicata a un unico punto materiale di massa M .

Il momento totale della forza peso rispetto all'origine del sistema di riferimento è

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times (-m_i g \hat{y}) = \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) \times (-M g \hat{y}) = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{P},$$

che coincide con il momento della forza peso che sarebbe applicata a un unico punto materiale di massa M posizionato nel CdM del sistema.

L'energia potenziale gravitazionale del sistema è data dalla somma delle corrispondenti energie di ciascuno dei punti costituenti, cioè

$$U = \sum_{i=1}^N m_i g y_i = M g \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i \right) = M g y_{\text{cm}},$$

che coincide con l'energia potenziale che spetterebbe a un unico punto materiale di massa M posizionato alla quota del CdM del sistema.

Quanto ottenuto sopra vale per un qualsiasi insieme di punti materiali (corpi rigidi e non). Nel caso di un corpo rigido, in particolare, l'insieme delle forze parallele e la risultante applicata al centro di massa determinano anche lo stesso identico moto, in quanto quest'ultimo è determinato esclusivamente (solo per un corpo rigido) dalla somma delle forze e dei momenti esterni.

Nel caso dei tre punti materiali dati nel testo ($N = 3$) si ha: $\mathbf{r}_1 = (-\ell, \ell, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (0, \ell, 0)$, $\mathbf{r}_3 = (\ell, \ell, 0)$, con $\ell = 1$ m, mentre $m_i = m = 1$ kg $\forall i$. Quindi $M = 3$ kg e $\mathbf{r}_{\text{cm}} = (0, \ell, 0) = \ell \hat{y}$. Si ha:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}) & \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i = -3m g \hat{y} \simeq -30 \hat{y} \text{ N} & -M g \hat{y} \simeq -30 \hat{y} \text{ N} \\ \mathbf{M}) & \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = (-\ell m + 0m + \ell m) \hat{z} = 0 & \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{P} = 0 \\ U) & \sum_{i=1}^3 m_i g y_i = 3m g \ell \simeq 30 \text{ J} & M g y_{\text{cm}} \simeq 30 \text{ J} \end{array}$$