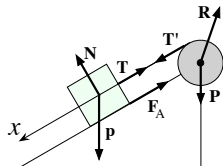


Fisica I per Ingegneria

A.A. 2015/2016 - Prova del 13 settembre 2016

Soluzione del problema

Lo schema delle forze è mostrato in figura.



Il corpo di massa m è soggetto alla propria forza peso ($\mathbf{p}$, di modulo mg), alla reazione normale del piano ($\mathbf{N}$), alla forza di attrito ($\mathbf{F}_A$) e alla tensione del filo ($\mathbf{T}$). La carrucola è soggetta alla propria forza peso ($\mathbf{P}$), alla reazione vincolare del perno ($\mathbf{R}$) e alla tensione del filo ($\mathbf{T}'$, di modulo pari a T).

Poiché il corpo non presenta accelerazione nella direzione ortogonale al piano, lungo tale direzione la risultante delle forze ad esso applicate deve essere nulla. Pertanto, $N = mg \cos \vartheta$ e quindi $F_A = \mu N = \mu mg \cos \vartheta$.

Applicando la seconda legge di Newton, per il moto corpo lungo l'asse x si ha

$$mg \sin \vartheta - \mu mg \cos \vartheta - T = ma, \quad (1)$$

mentre per la rotazione della carrucola intorno al proprio asse si ha

$$Tr = I\alpha = \frac{1}{2}Mr a \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}Ma, \quad (2)$$

dove si è indicato con r il raggio della carrucola, con I il suo momento d'inerzia ($I = Mr^2/2$) e con α la sua accelerazione angolare ($\alpha = a/r$), e si è tenuto conto che solo $\mathbf{T}'$ ha momento assiale diverso da zero.

- (a) Quando M è trascurabile, la presenza della carrucola non può avere alcun effetto sul moto del corpo e quindi la tensione del filo deve essere nulla. Questo è confermato dall'equazione (2), secondo la quale

$$M = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 0.$$

- (b) In questo caso, il corpo scivola sul piano inclinato con accelerazione costante $a = g(\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta)$ e, dopo aver percorso il tratto di lunghezza L , avrà velocità di modulo

$$v = \sqrt{2aL} = \sqrt{2gL(\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta)} \simeq 3.76 \text{ m/s}.$$

- (c) Se massa della carrucola non è trascurabile, si deve tener presente il sistema lineare costituito dalle equazioni (1) e (2), che può essere risolto per ottenere l'accelerazione (a_1) e la tensione (T_1). Esso fornisce

$$a_1 = \frac{g(\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta)}{1 + \frac{M_1}{2m}}; \quad T_1 = \frac{mg(\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta)}{1 + \frac{2m}{M_1}} \simeq 0.32 \text{ N}.$$

- (d) Poiché il corpo percorre il tratto di lunghezza L con accelerazione costante a_1 e con velocità iniziale nulla, si ha

$$L = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a_1}} \simeq 2.16 \text{ s}.$$

(Esempio di) risposta alla domanda

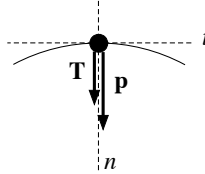
Per un generico punto materiale che si muova di moto curvilineo, la seconda legge di Newton può essere scritta utilizzando il sistema di riferimento intrinseco del punto, che è quello i cui assi sono tangente e normale, in ogni posizione, alla traiettoria del punto. In particolare, per le componenti tangenziale e normale (indicate, rispettivamente, con i pedici t e n) della risultante delle forze applicate al punto, si ha

$$F_t = m \frac{dv}{dt} ; \quad F_n = m \frac{v^2}{R} ,$$

dove m è la massa del punto, v il modulo della sua velocità e R il raggio di curvatura della traiettoria.

Nella situazione descritta nel testo, una massa puntiforme è trattenuta da un filo ideale e si muove di moto circolare su un piano verticale. Il raggio di curvatura della traiettoria coincide in ogni punto con la lunghezza del filo (ℓ). La massa è soggetta solo alla propria forza peso ($\mathbf{p}$, di modulo mg) e alla tensione del filo ($\mathbf{T}$).

Quando essa si trova sull'apice della traiettoria, entrambe le forze sono dirette nella direzione normale, come mostrato in figura:



In questa posizione, entrambe le forze sono dirette verso il basso: la forza peso per ovvie ragioni, e la tensione del filo perché esso può operare solo in trazione. Pertanto, la componente normale della risultante delle forze applicate è pari alla somma dei moduli delle due forze:

$$F_n = T + mg .$$

Quindi

$$T + mg = m \frac{v^2}{\ell} \quad \Rightarrow \quad T = m \frac{v^2}{\ell} - mg ,$$

che consente di calcolare la tensione del filo per ogni fissato valore della velocità v . In particolare, ponendo $v = 0$ si ottiene $T = -mg$. Questo valore non è accettabile perché significa che il filo dovrebbe esercitare sulla massa una forza diretta verso l'alto, per bilanciare la forza peso, ma questo non è possibile (la situazione sarebbe diversa se la massa fosse vincolata al centro di rotazione da una sbarretta rigida). Quindi, se la massa è sottoposta solo all'azione del suo peso e della tensione del filo, non potrà mai trovarsi nella posizione apicale della traiettoria con velocità nulla.

Dalla condizione che $T \geq 0$ segue che, nel punto più alto della traiettoria,

$$T = m \frac{v^2}{\ell} - mg \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v \geq \sqrt{g\ell} = v_{\min} .$$

Quando $v = v_{\min}$ il filo risulta inefficace ($T = 0$) e la forza centripeta necessaria affinché la traiettoria presenti il raggio di curvatura ℓ viene fornita esclusivamente dalla forza peso.