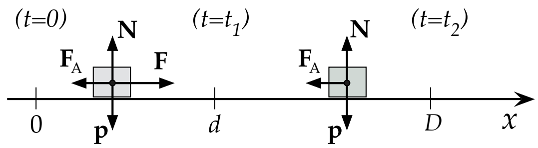
Fisica I per Ing. Elettronica, Ing. Informatica e Ing. Meccanica
A.A. 2013/2014 - Prima prova di accertamento - 24 aprile 2014

Soluzione del problema A

Nel primo tratto, il corpo è soggetto all'azione della forza peso $\mathbf{p}$ (di modulo pari a mg), della reazione vincolare $\mathbf{N}$, della forza $\mathbf{F}$ e della forza di attrito $\mathbf{F}_A$. Poiché il corpo non presenta accelerazione nella direzione verticale, la componente verticale della risultante di tutte le forze applicate deve essere nulla. Per questo motivo, $N = mg$. Pertanto, il modulo della forza di attrito radente dinamico risulta pari a $F_A = \mu N = \mu mg$.



1. La componente x della risultante delle forze applicate al corpo vale $F_x^{(\mathrm{tot})} = F - F_A = F - \mu mg$, per cui la sua accelerazione risulta

$$a_1 = \frac{F_x^{(\mathrm{tot})}}{m} = \frac{F}{m} - \mu g \simeq 1.1 \text{ m/s}^2$$

2. Poiché l'accelerazione calcolata nel punto 1 è costante, il corpo segue un moto uniformemente accelerato. Considerando che il corpo parte con velocità nulla, lo spazio da lui percorso fino al tempo t_1 vale

$$d = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m} - \mu g\right) t_1^2 \simeq 4.9 \text{ m}$$

Il corpo arriva alla fine del primo tratto con velocità $v_1 = a_1 t_1$. Quando $\mathbf{F}$ smette di agire, il corpo rimane soggetto all'azione delle altre tre forze, che restano invariate. In particolare, la componente x della risultante delle forze ora vale $F_x^{(\mathrm{tot})} = -F_A = -\mu mg$, per cui l'accelerazione del corpo risulta costante e pari a $a_2 = -\mu g$.

1. Essendo anche in questa fase il moto uniformemente accelerato, la velocità segue la legge oraria $v(t) = v_1 + a_2(t - t_1)$. Per calcolare il tempo necessario affinché il corpo si fermi è sufficiente imporre che all'istante t_2 risulti $v(t_2) = 0$. Pertanto

$$v(t_2) = v_1 + a_2(t_2 - t_1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (t_2 - t_1) = -\frac{v_1}{a_2} = \frac{a_1 t_1}{\mu g} = \left(\frac{F}{\mu mg} - 1\right) t_1 \simeq 0.83 \text{ s}$$

2. Poiché la forza di attrito è costante e diretta lungo la direzione dello spostamento, il lavoro compito da essa (W_A) nel tratto percorso (D) equivale al prodotto tra $-F_A$ e D. Il valore di F_A lo conosciamo già, mentre D può essere calcolato in vari modi: per esempio, mediante la legge oraria del moto uniformemente accelerato, oppure utilizzando la relazione $2a_2(D-d) = 0 - (1/2)mv_1^2$. Però il modo più semplice per calcolare W_A consiste nel considerare il teorema delle forze vive, tra la posizione iniziale e quella finale. Il corpo parte da fermo e arriva fermo, per cui il lavoro totale compiuto su di esso (W_{tot}) deve essere nullo. Al lavoro totale contribuisce, oltre a W_A, anche il lavoro compiuto da F nel primo tratto, che vale Fd. In definitiva:

$$W_{\mathrm{tot}} = Fd + W_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W_A = -Fd = -\frac{F}{2}\left(\frac{F}{m} - \mu g\right) t_1^2 \simeq -49 \text{ J}$$

Risposta alla domanda A

La coordinata del centro di massa di un sistema di N punti materiali, aventi masse m_i e posizioni individuate dai vettori $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$, è definita come

$$\mathbf{r}_{\rm cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \ ,$$

dove M è la somma di tutte le masse. La velocità del centro di massa risulta quindi

$$\mathbf{v}_{\rm cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \ ,$$

dove $\mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$ sono le velocità dei singoli punti. Si noti che non è necessario che tutti i punti del sistema siano fermi affinché il centro di massa sia fermo (si pensi, per esempio, ad un disco che ruota intorno al proprio asse di simmetria).

D'altro canto, la quantità di moto totale del sistema, definita come la somma delle quantità di moto dei singoli punti, risulta proporzionale alla velocità del centro di massa, essendo

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{\rm cm} \ .$$

E' quindi chiaro che se la velocità del centro di massa di un sistema è nulla, sarà nulla anche la sua quantità di moto totale.

Lo stesso **non** vale per l'energia cinetica totale di un sistema. Questa è definita come la somma delle energie cinetiche di tutti i punti, cioè

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \ .$$

Le quantità v_i^2 che compaiono nella sommatoria sono i moduli quadri delle velocità dei singoli punti materiali e sono tutti positive o, al più, nulle. In particolare, l'unico caso in cui l'energia cinetica di un sistema è nulla è quando tutti i suoi punti hanno velocità nulla. Pertanto non è sufficiente che il centro di massa di un sistema si a fermo perché l'energia cinetica totale del sistema sia nulla (si pensi ancora ad un disco che ruota intorno al proprio asse di simmetria).