Soluzione del problema n. 1

1. Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mga \qquad \Rightarrow \qquad v_A = \sqrt{v_0^2 - 2ga} \simeq 6.3 \text{ m/s}$$

Naturalmente, la direzione di $\mathbf{v}_A$ è quella della tangente alla guida nel punto A.

2. Ancora dalla conservazione dell'energia meccanica, sapendo che la velocità del corpo nel vertice della traiettoria vale $v_A \cos\alpha$, si ha

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 \cos^2\alpha + mgh \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{v_A^2}{2g}(1-\cos^2\alpha) = \frac{v_A^2 \sin^2\alpha}{2g} \simeq 1.5 \text{ m}$$

Allo stesso risultato si giunge partendo dalle equazioni della cinematica del moto parabolico.

3. La distanza orizzontale D può essere calcolata partendo dalle equazioni orarie per le componenti orizzontale e verticale del moto parabolico del corpo, oppure direttamente dall'equazione della traiettoria, che in questo caso risulta

$$y(x) = a + x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2v_A^2\cos^2\alpha}$$

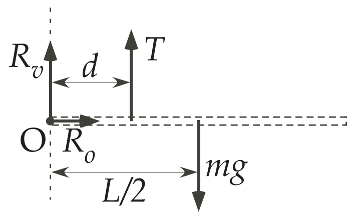
avendo scelto come x la coordinata orizzontale, con origine in corrispondenza del punto A, e come y la coordinata verticale, con origine sul suolo, crescente verso l'alto. Il punto di impatto al suolo corrisponde pertanto a $x = D$ e $y = 0$, per cui

$$0 = a + D\tan\alpha - \frac{g\,D^2}{2v_A^2\cos^2\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad D = \frac{v_A^2\sin(2\alpha)}{2g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2ag}{v_A^2\sin^2\alpha}}\right] \simeq 4.7 \text{ m}$$

avendo scelto, tra le due soluzioni dell'equazione di secondo grado in D, quella positiva.

Soluzione del problema n. 2

1. Le forze esterne applicate alla sbarra sono mostrate in figura. In condizioni di equilibrio, la risultante delle forze esterne e la risultante dei loro momenti devono essere nulle. Poiché la sbarra è omogenea, per il calcolo del momento dovuto alla sua forza peso, si pensa quest'ultima applicata al centro geometrico della sbarra. Prendendo come polo il punto O, si ha quindi



$$Td - mg\frac{L}{2} = 0; \qquad R_o = 0; \qquad R_v + T - mg = 0,$$

da cui

$$T = \frac{mgL}{2d} \simeq 50 \text{ N}; \qquad R_o = 0; \qquad R_v = mg - T = mg\left(1 - \frac{L}{2d}\right) \simeq -30 \text{ N}$$

I valori di R_o e R_v indicano che la reazione del perno è rivolta verso il basso.

2. Dopo il taglio del filo, la forza peso è l'unica forza esterna ad avere momento non nullo. Nell'istante immediatamente successivo al taglio, tale momento vale $M = mgL/2$. Dalla seconda equazione cardinale dei sistemi, quindi, tale momento è responsabile dell'accelerazione angolare della sbarra, secondo l'espressione $M = I\alpha$, con I momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione (in questo caso, $mL^2/3$) e α accelerazione angolare. Pertanto si ha

$$\frac{mgL}{2} = \frac{1}{3}mL^2\,\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{3g}{2L} \simeq 15 \text{ rad/s}^2$$

3. Indichiamo con E_c l'energia cinetica richiesta. Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha che la variazione di energia cinetica tra la posizione iniziale (sbarra orizzontale) e la posizione finale (sbarra verticale) è uguale ed opposta alla corrispondente variazione di energia potenziale, che in questo caso vale $-mgL/2$ (calcolata partendo dalla variazione di quota del centro di massa della sbarra). Quindi si ha

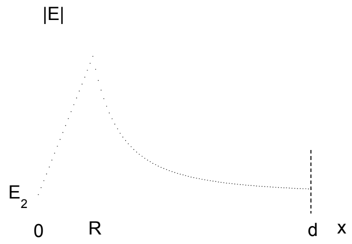
$$E_c = \frac{mgL}{2} \simeq 10 \text{ J}$$

Soluzione del problema n. 3

1. Il campo elettrostatico si determina, in base al principio di sovrapposizione, come somma vettoriale dei campi indipendentemente generati dalla sfera e dal piano.

   Il campo $\mathbf{E}_1$ della sfera, stante la simmetria sferica della sua distribuzione di carica, è radiale rispetto al centro O e dipende solo dalla distanza da O. Quindi, per il generico punto dell'asse x di coordinate $(x, 0, 0)$ con $x \geq 0$, $\mathbf{E}_1$ ha la sola componente lungo x, cioè $\mathbf{E}_1 = E_1\hat{\mathbf{x}}$. In base al teorema di Gauss, si ha:

$$E_1 = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{3\varepsilon_0} & x \leq R \\[2ex] \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \dfrac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 x^2} & x > R \end{cases}$$



   Il campo $\mathbf{E}_2$ determinato dal piano carico, in tutto il semispazio $x < d$, è perpendicolare al piano stesso (quindi parallelo all'asse x) e diretto nel verso delle x positive dato il segno della carica negativa del piano. Quindi $\mathbf{E}_2 = E_2\hat{\mathbf{x}}$ con:

$$E_2 = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\ , x < d$$

   Il campo complessivo sul segmento $\overline{\mathrm{OM}}$ è $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} = E\hat{\mathbf{x}}$ con:

$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{3\varepsilon_0} + \dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} & x \leq R \\[2ex] \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} & R < x < d \end{cases}$$

   Il grafico di $|\mathbf{E}| = E$ è riportato figura.

2. Per il calcolo del potenziale si può procedere partendo dalla definizione e integrando lungo l'asse x:

$$V(N) - V(M) = \int_R^d E(x)dx = \int_R^d \left(\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\right)dx = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right) + \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}(d - R) \simeq 3.0 \cdot 10^8 \text{ V}$$

3. La forza cui è sottoposta la carica q nel punto P è $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q(\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2})$, con $\mathbf{E_1}$ diretto lungo l'asse y e $\mathbf{E_1}$ lungo l'asse x. Per cui:

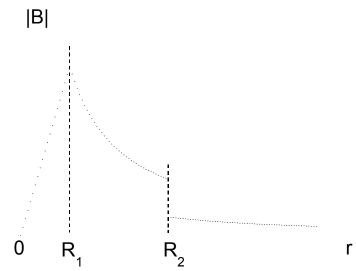
$$F_x = q\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0},\quad F_y = q\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

   da cui il modulo è $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \simeq 0.17$ mN mentre l'angolo formato da $\mathbf{F}$ con il semiasse positivo delle x è $\alpha = \arctan(F_y/F_x) \simeq 35.4°$.

Soluzione del problema n. 4

1. Stante la simmetria cilindrica del sistema, le linee di flusso di $\mathbf{B}$ saranno delle circonferenze centrate sull'asse del sistema e giacenti su piani perpendicolari ad esso. Fissando come verso convenzionalmente positivo quello antiorario, la componente B del campo $\mathbf{B}$ lungo le linee di flusso si determina applicando la legge di Ampère:

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i_1 r}{2\pi R_1^2} & r \leq R_1 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 i_1}{2\pi r} & R_1 < r < R_2 \\[2ex] \dfrac{\mu_0(i_1 - i_2)}{2\pi r} & r > R_2 \end{cases}$$



   dove r è la distanza dall'asse di simmetria del sistema. Si osservi che $i_1 > i_2$, per cui $\mathbf{B}$ ha sempre lo stesso verso qualunque sia r.

   Il grafico di $|\mathbf{B}| = B$ è riportato figura.

2. Una particella di carica q in moto con velocità $\mathbf{v_0}$ nel punto P è sottoposto alla forza di Lorentz $\mathbf{F_L} = q\mathbf{v_0} \times \mathbf{B}$. La forza risulta diretta verso l'alto (rispetto al piano del foglio su cui è riportato il disegno) e ha modulo $|\mathbf{F_L}| = q|\mathbf{v_0}|\dfrac{\mu_0(i_1 - i_2)}{2\pi d} = 5 \cdot 10^{-16}$ N.

3. Per calcolare la circuitazione richiesta, si applica legge di Ampère per il campo $\mathbf{H}$ lungo la linea C orientata indicata in figura:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = i_{conc}$$

   Dal momento che le correnti i_1 e i_2 sono distribuite uniformemente, rispettivamente sul cavo e sulla buccia, la linea quadrata è concatenata con un quarto di ciascuna delle due correnti. Tenendo conto dei versi, $i_{conc} = (i_1 - i_2)/4$ =0.25 mA.