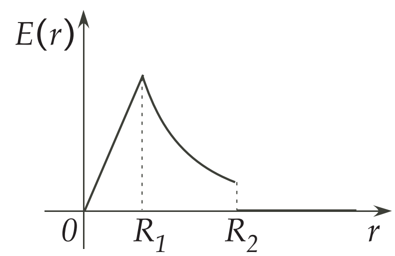
Fisica I per Ing. Elettronica □ e *Fisica* per Ing. Informatica □

A.A. 2009/2010 - Sesta prova di accertamento - 15 giugno 2010

Soluzione del problema n. 1b

1. Dalla simmetria sferica del sistema si deduce che il campo elettrostatico è diretto nella direzione radiale e dipende solo dalla distanza dal centro, e quindi poniamo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\hat{r}$. L'espressione per $E(r)$ può essere ricavata dal teorema di Gauss, applicato ad una generica superficie sferica di raggio r concentrica al sistema. Questo fornisce

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} & (r \le R_1) \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1 \le r < R_2) \\[2ex] 0 & (r > R_2) \end{cases}$$



In alternativa, le stesse espressioni avrebbero potuto essere ricavate sommando il campo generato da una distribuzione uniforme di carica in un volume sferico (di raggio R_1 e carica totale Q) a quello prodotto da una distribuzione uniforme di carica su una superficie sferica (di raggio R_1 e carica totale $-Q$).

2. Detti V_M e V_N, rispettivamente, i valori del potenziale nei punti M e N, dalla definizione di potenziale si ha

$$V_M - V_N = \int_{(R_1+R_2)/2}^{R_1} E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(R_1+R_2)/2}^{R_1} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\,\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \simeq -740 \text{ V},$$

avendo usato la seconda delle espressioni del campo elettrico ottenute nel punto 1.

3. Osserviamo innanzitutto che il potenziale dipende solo dalla distanza dal centro, per cui possiamo prendere come posizione di partenza della particella qualsiasi punto sulla superficie esterna (p.es., N). Indicando con P un generico punto sulla superficie sferica esterna e con v_1 la velocità finale della particella, la conservazione dell'energia meccanica fornisce

$$qV_N = \frac{1}{2}\,mv_1^2 + qV_P \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\,mv_1^2 = q(V_N - V_P) = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

avendo usato ancora la seconda delle espressioni del campo elettrico ottenute nel punto 1. Pertanto,

$$v_1 = \sqrt{\frac{q\,Q}{2\pi\varepsilon_0 m}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} \simeq 1.9 \text{ m/s}$$

Soluzione del problema n. 2b

1. Dalla definizione di capacità, la carica Q sulle armature del condensatore vale $Q = C\Delta V_{c0}$ dove ΔV_{c0} è la differenza di potenziale (ddp) ai suoi capi. Nel circuito dato, che si trova a regime con l'interruttore nella posizione A, il condensatore C si comporta come un circuito aperto e la resistenza R_1 è isolata dal resto del circuito. L'unica maglia in cui scorre una corrente è costituita dalla serie del generatore e delle resistenze r e R_2. La ddp ΔV_{c0} ai capi del condensatore è uguale alla ddp ΔV_{R2} ai capi della resistenza R_2, dal momento che essi sono in parallelo. A sua volta ΔV_{R2} si può ottenere applicando l'espressione per il partitore resistivo di tensione:

$$\Delta V_{c0} = \Delta V_{R2} = \frac{R_2}{r + R_2} f \qquad \Rightarrow \qquad Q = C\Delta V_{c0} = C\frac{R_2}{r+R_2} f$$

2. La potenza P_0 erogata dal generatore è $P_0 = f i_0$, dove i_0 è la corrente che scorre nel circuito nella situazione di regime commentata prima. Perciò:

$$i_0 = \frac{f}{r + R_2} \qquad \Rightarrow \qquad P_0 = f i_0 = \frac{f^2}{r + R_2}$$

3. In seguito alla commutazione nella posizione B dell'interruttore, il generatore e la resistenza r vengono escluse dal circuito, rimanendo su un ramo aperto in cui non può scorrere corrente (perciò il generatore non eroga corrente né energia). L'unica corrente presente nel circuito è quella della scarica del condensatore C sul parallelo delle resistenze R_1 e R_2. Per la conservazione dell'energia, l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule su R_1 e R_2 sarà l'energia U_{C0} che il condensatore ha immagazzinata a regime prima della commutazione stessa, cioè in $t = 0^-$. Quindi:

$$E_{diss} = U_{C0} = \frac{1}{2}C(\Delta V_{C0})^2 = \frac{1}{2}Cf^2\left(\frac{R_2}{r+R_2}\right)^2$$

   Come si vede questa energia non dipende dal valore di R_1. In alternativa, ma in questo caso il procedimento è inutilmente più lungo, si può calcolare l'energia dissipata come l'integrale della potenza istantanea dissipata:

$$E_{diss} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty R_p i^2(t) dt$$

   dove $P(t) = R_p i(t)^2$ è la potenza dissipata su $R_p = R_1R_2/(R_1+R_2)$, parallelo di R_1 e R_2. La corrente $i(t)$ è la corrente che totale che fluisce nel parallelo di R_1 e R_2, ottenibile come $\Delta V_C/R_p$. Ricordando che nel processo di scarica di un condensatore, la ddp vale $\Delta V_C = \Delta V_{C0}e^{-t/\tau}$ (con $\tau = R_pC$), si ha:

$$E_{diss} = \int_0^\infty R_p\left(\frac{\Delta V_{C0}}{R_p}e^{-t/\tau}\right)^2 dt = \frac{(\Delta V_{C0})^2}{R_p}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt =$$

$$= \frac{(\Delta V_{C0})^2}{R_p}\left(-\frac{\tau}{2}\right)e^{-2t/\tau}|_0^\infty = \frac{(\Delta V_{C0})^2}{R_p}\left(-\frac{R_pC}{2}\right)(-1) = \frac{1}{2}C(\Delta V_{C0})^2$$

   uguale all'espressione ricavata precedentemente (come deve essere), e sempre indipendente da R_1.

Valori numerici: $R_1 = 6\ \Omega$; $r = 1\ \Omega$; $C = 270$ pF; $f = 12$ V;
Risultati numerici: $Q = 2.43$ nC; $P_0 = 36$ W; $E_{diss} = 10.9$ nJ;

Soluzione del problema n. 3b

1. Trattandosi di un solenoide rettilineo indefinito, il campo è nullo al di fuori di esso ed è uniforme all'interno, dove vale

$$\mathbf{B} = B\,\hat{z}\ , \quad \text{con}\ \ B = \mu_0 n i \simeq 2.5\ \text{mT}\ ,$$

avendo definito l'asse z in direzione ortogonale al foglio, con verso uscente.

2. Orientando la spira in verso antiorario, il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso di essa risulta

$$\Phi_{\mathbf{B}} = \int \mathbf{B}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = B\,b\,\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\mu_0 n i b^2 \simeq 1.13\ \mu\mathrm{T}\,m^2$$

3. Quando la spira si muove con velocità v diretta come in figura, il flusso di $\mathbf{B}$ ad essa concatenato aumenta con legge lineare finché la spira non è entrata completamente nel solenoide (ciò avviene all'istante $t = t_1 = b/2v$). Quando la spira è entrata completamente nel solenoide, il flusso è massimo e rimane costante. In formule, si ha

$$\Phi_{\mathbf{B}}(t) = \begin{cases} \mu_0 n i b\left(\dfrac{b}{2} + vt\right) & 0 < t \le t_1 \\[2ex] \mu_0 n i b^2 & t > t_1 \end{cases}$$

Poiché $\Phi_{\mathbf{B}}$ varia nel tempo, nella spira circola la corrente indotta

$$i_i(t) = -\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{B}}}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 n i b v}{r} & 0 < t \le t_1 \\[2ex] 0 & t > t_1 \end{cases}$$

Essa quindi è costante e scorre in verso orario nell'intervallo $0 < t \le t_1$, dove vale $i_i \simeq -113$ mA, mentre è nulla per istanti successivi.