

Alcune applicazioni della legge di Ampère

Corso di Fisica per Ingegneria delle Tecnologie per il Mare
Università Roma Tre

Ricordiamo che la legge di Ampère consente di esprimere la circuitazione del campo magnetico \vec{B} lungo una linea chiusa ℓ attraverso il valore della corrente concatenata (i_c) con tale linea:

$$\oint_{\ell} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c, \quad (1)$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto. Si suppone di trovarsi in condizioni stazionarie, per cui la corrente concatenata con ℓ può essere espressa attraverso il flusso del vettore densità di corrente (\vec{J}) attraverso *qualsiasi* superficie (S) che abbia ℓ come contorno:

$$i_c = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS. \quad (2)$$

Il verso di \hat{n} , che determina l'orientazione della superficie, deve essere scelto in accordo con la regola della vite (il verso di percorrenza sul cammino ℓ deve essere visto come antiorario da un osservatore che si trovi sulla superficie, dal lato verso cui è orientato \hat{n}). Nel caso in cui la corrente concatenata sia trasportata da fili conduttori, l'integrale nella (2) si riduce alla somma delle correnti trasportate da ciascun filo, ciascuna col segno che le compete in base al verso della corrente e al verso di \hat{n} .

La legge di Ampère, esattamente come accade per la legge di Gauss nei confronti del campo elettrostatico, consente di calcolare in maniera estremamente semplice il campo magnetico dovuto a distribuzioni di correnti dotate di particolari simmetrie, senza dover far ricorso all'integrale della legge elementare di Laplace.

Filo rettilineo indefinito

Come primo esempio deriviamo l'espressione del campo magnetico prodotto in un generico punto dello spazio (diciamo P) da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente i , senza utilizzare la prima legge elementare di Laplace. Per inciso, la derivazione di tale espressione a partire dalla prima legge elementare di Laplace non è immediata. Viceversa, questa può essere ottenuta molto semplicemente dalla legge di Ampère senza dover risolvere alcun integrale. A tal fine, è essenziale poter fare previsioni sulle caratteristiche del campo magnetico (in base a considerazioni di simmetria) e, di conseguenza, scegliere un'opportuna linea (che chiameremo *linea di Ampère*) lungo la quale calcolare la

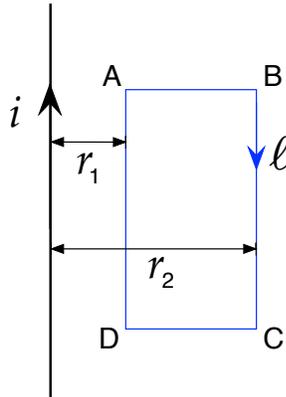


Figura 1:

circuitazione che compare nella (1). Potremo anche utilizzare altre proprietà del campo magnetico, come la sua solenoidalità, espressa dalla relazione

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = 0 \quad (3)$$

per qualsiasi superficie chiusa S , che implica che le linee di campo di \vec{B} devono necessariamente essere chiuse su se stesse.

Utilizziamo un sistema di riferimento in cui l'asse z coincide con il filo ed è orientato del verso della corrente. La prima condizione che deve essere certamente soddisfatta è che il campo magnetico in P non dipenda dalla coordinata z di tale punto (simmetria traslazionale lungo z). Per semplicità, quindi, prendiamo il punto P giacente nel piano $z = 0$. Inoltre, sfruttando la simmetria rotazionale intorno all'asse del filo, possiamo desumere che il modulo di \vec{B} , cioè B , deve dipendere soltanto dalla distanza dal filo. Se nel piano xy utilizziamo coordinate polari (r, φ) , questo significa che B dipende solo da r .

Rimangono da determinare direzione e verso di \vec{B} . Innanzitutto, possiamo escludere che \vec{B} abbia componente z diversa da zero. Per fare questo, consideriamo la linea di Ampère mostrata in fig. 1, di forma rettangolare. I contributi all'integrale dovuti ai lati AB e CD si cancellano perché i valori del campo sono uguali lungo i due segmenti ma tali segmenti sono percorsi in versi opposti. Lungo il segmento DA il campo è costante e vale $\vec{B}(r_1)$. Anche lungo BC è costante e vale $\vec{B}(r_2)$. I contributi all'integrale dovuti ai due segmenti valgono quindi, rispettivamente, $E_z(r_1)L$ e $-E_z(r_2)L$.

La circuitazione di \vec{B} lungo tutto il percorso ℓ è quindi $[B_z(r_1) - B_z(r_2)]L$. Poiché non ci sono correnti concatenate con ℓ , per la legge di Ampère tale circuitazione deve essere nulla, e quindi $B_z(r_1) = B_z(r_2)$. Questo significa che la componente z del campo deve rimanere costante in tutto lo spazio (fino all'infinito). Tale possibilità deve essere scartata perché dà luogo a un risultato non plausibile fisicamente, a meno che non si assuma che la componente z del campo sia identicamente nulla. Se ne deduce che il vettore \vec{B} giace nel piano xy . Si potrebbe anche mostrare che la presenza di una componente del campo

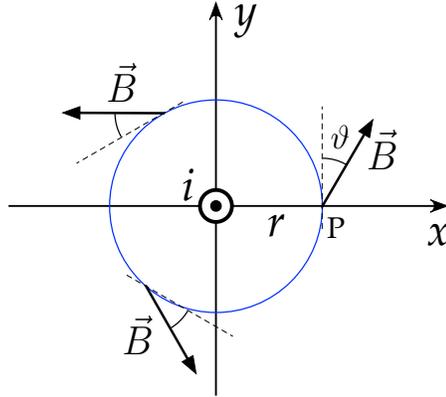


Figura 2:

parallela al filo (diversa da zero e uniforme in tutto lo spazio) contraddice la richiesta che le linee di campo di \vec{B} siano chiuse.

In fig. 2 è mostrato il piano xy con una possibile direzione del vettore \vec{B} nel punto P. Per la simmetria rotazionale intorno all'asse del filo, il campo in tutti i punti alla stessa distanza dal filo deve formare lo stesso angolo (ϑ) con la circonferenza di raggio r . Ma le proprietà di \vec{B} suggeriscono che ϑ non possa assumere un valore qualsiasi. Infatti, l'unico valore di ϑ compatibile col fatto che le linee di campo siano chiuse è $\vartheta = 0$.

In definitiva, in base solo alle proprietà di simmetria del sistema considerato e alla solenoidalità di \vec{B} , abbiamo dedotto che il campo magnetico in P è tangente alla circonferenza avente raggio r e asse coincidente con il filo rettilineo. Inoltre, il modulo di \vec{B} è costante lungo tutta la circonferenza. Questo fatto ci suggerisce di utilizzare la legge di Ampère avendo scelto per cammino d'integrazione proprio tale circonferenza. Ciò semplifica enormemente il calcolo dell'integrale nell'eq. (1) perché in ogni punto del percorso si ha $\vec{B}(r) \cdot d\vec{s} = B(r) ds$, per cui

$$\oint_{\ell} \vec{B}(r) \cdot d\vec{s} = \oint_{\ell} B(r) ds = B(r) \oint_{\ell} ds = B(r) 2\pi r, \quad (4)$$

avendo sfruttato il fatto che $\vec{B}(r)$ è costante lungo il percorso e quindi può uscire dall'integrale e che l'integrale di ds lungo la traiettoria non è altro che la lunghezza della circonferenza. Il verso di percorrenza della circonferenza è stato scelto in modo che la corrente che scorre nel filo risulti positiva quando si calcolerà la corrente concatenata con ℓ .

A questo punto possiamo applicare la legge di Ampère. In questo caso la corrente concatenata con la linea di Ampère è proprio la corrente che scorre nel filo, per cui, dalla (1),

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 i, \quad (5)$$

e quindi

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \quad (6)$$

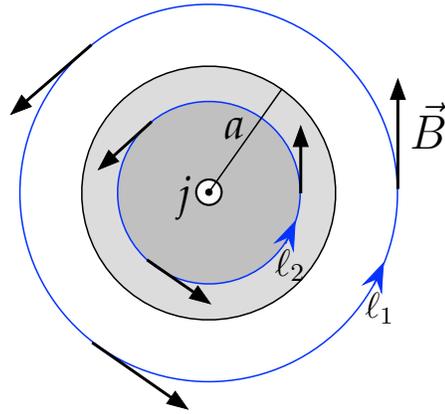


Figura 3:

che corrisponde alla legge di Biot e Savart.

Cilindro indefinito

In questo caso il filo rettilineo è sostituito da un cilindro circolare con raggio di base a . La corrente i è supposta essere distribuita all'interno del cilindro con densità di corrente uniforme. Tralasciamo tutte le considerazioni fatte nel caso precedente per ricavare la direzione di \vec{B} , perché esse valgono anche in questo caso. Pertanto, si trova esattamente lo stesso risultato, espresso dalla (4), per quanto riguarda la circuitazione di \vec{B} quando si prenda come linea di Ampère una circonferenza di raggio r coassiale col cilindro. La differenza, rispetto all'esempio precedente, consiste nel calcolo della corrente concatenata con tale circonferenza. Consideriamo separatamente i due casi $r > a$ e $r < a$.

Quando $r > a$ prendiamo come linea di Ampère la linea ℓ_1 mostrata in fig. 3. La corrente concatenata con ℓ_1 coincide con tutta la corrente che scorre nel cilindro, che è i . Il risultato è quindi lo stesso ottenuto nel caso di un filo rettilineo ed espresso dall'eq. (6), cioè

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \quad (r > a). \quad (7)$$

Quando $r < a$, prendiamo come linea di Ampère la linea ℓ_2 . In questo caso solo una parte della corrente che scorre nel cilindro sarà concatenata con ℓ_2 . Per valutare tale corrente concatenata ricaviamo l'espressione della densità di corrente all'interno del cilindro, che indichiamo con j . Noi sappiamo che j è uniforme, per cui può essere calcolata come il rapporto tra i e la sezione del cilindro, cioè

$$j = \frac{i}{\pi a^2}. \quad (8)$$

A questo punto, la corrente concatenata con ℓ_2 sarà data dal flusso del vettore densità di corrente attraverso il cerchio di cui ℓ_2 è la circonferenza. Poichè la densità di corrente

è uniforme, tale flusso coincide con il prodotto tra j e πr^2 , per cui

$$i_c = \frac{i}{\pi a^2} \pi r^2 = \frac{i r^2}{a^2} . \quad (9)$$

Dalla legge di Ampère quindi si ha

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 \frac{i r^2}{a^2} , \quad (10)$$

da cui

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} r , \quad (r < a) . \quad (11)$$

Il campo magnetico, quindi, cresce linearmente dal centro del cilindro fino alla superficie laterale, mentre è indistinguibile da quello prodotto da un filo sottile per punti esterni al cilindro. Questo risultato ricorda quanto ottenuto per il campo elettrostatico prodotto da una sfera carica uniformemente nel volume.

Si possono considerare diverse varianti di questo esempio, lasciate come esercizi per lo studente. Per esempio, si può determinare il campo magnetico prodotto in tutto lo spazio da una sottile *buccia* cilindrica conduttrice di raggio di base b nella quale scorre la corrente i . In questo caso la corrente scorre esclusivamente sulla superficie laterale di un cilindro di raggio b . Naturalmente, la corrente è supposta uniformemente distribuita sulla superficie del conduttore, per poter sfruttare la simmetria cilindrica del problema.

Ancora, si può studiare il campo prodotto da un *cavo coassiale*. Si tratta di un conduttore cilindrico indefinito con raggio di base a , nel quale scorre la corrente i , circondato da una buccia cilindrica conduttrice di raggio di base b ($> a$), nella quale scorre la stessa corrente, ma in verso opposto. Anche in questo caso le correnti sono pensate uniformemente distribuite all'interno dei conduttori.

Solenoido rettilineo indefinito

Un solenoide rettilineo è una bobina di filo conduttore avvolto a spirale molto stretta su un supporto di forma cilindrica. Esso può essere pensato come costituito da una serie di spire circolari (di raggio a) parallele e molto vicine tra loro (fig. 4). Se il solenoide è indefinito, la lunghezza del cilindro è pensata come virtualmente infinita, così come il numero di spire che lo compongono. Un parametro significativo per un solenoide rettilineo è il numero di spire per unità di lunghezza (che indicheremo con n), definito come il rapporto tra il numero di spire presenti su un tratto di solenoide di lunghezza L e la lunghezza stessa. Il calcolo del campo magnetico prodotto da un solenoide rettilineo in cui venga fatta scorrere la corrente i potrebbe essere eseguito sovrapponendo i campi prodotti da una serie di spire parallele percorse da corrente, a patto di conoscere questi campi in tutto lo spazio. Tuttavia, il campo prodotto da una singola spira circolare ha una forma semplice solo sull'asse della spira, per cui è possibile calcolare il risultante campo prodotto del solenoide in maniera relativamente semplice solo sull'asse del solenoide. Lo studente è invitato a calcolare il campo prodotto sull'asse del solenoide utilizzando questo approccio.

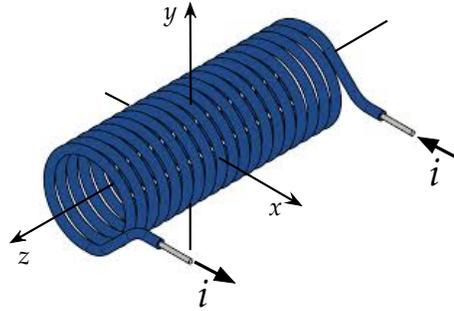


Figura 4:

L'uso della legge di Ampère, viceversa, consente di calcolare in maniera molto semplice il campo magnetico prodotto, in un punto qualsiasi nello spazio, da un solenoide rettilineo indefinito, al solito, ricorrendo alle sue proprietà di simmetria.

Intanto, se prendiamo come asse z l'asse del solenoide, sicuramente \vec{B} non può dipendere da z . Cominciamo ora a capire come dovrebbe essere diretto il campo in un generico punto. Per prima cosa, chiediamoci come dovrebbe essere orientato il vettore \vec{B}_\perp , cioè la componente di \vec{B} ortogonale all'asse z . Le considerazioni fatte a proposito del filo rettilineo ci portano a concludere che le linee di campo di \vec{B}_\perp devono essere circonferenze centrate sull'asse del solenoide, come mostrato in fig. 5, e che il modulo del campo deve essere costante lungo tali circonferenze. Questo ci aiuta a calcolare la circuitazione di \vec{B} lungo tali circonferenze, che risulta pari a $B_\perp(r) 2\pi r$ (sia per $r > a$ che per $r < a$). D'altro canto, la corrente concatenata a queste linee è sempre nulla per cui, applicando la legge di Ampère, risulta che $B_\perp(r) = 0 (\forall r)$. Il campo magnetico, dunque, non può che

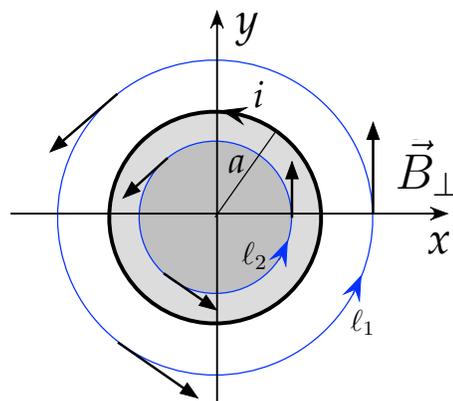


Figura 5:

essere orientato lungo l'asse z . Dobbiamo solo dedurre la dipendenza da r .

Per quanto riguarda il campo all'esterno del solenoide, potremmo ripetere lo stesso ragionamento utilizzato nel primo esempio (filo rettilineo indefinito) per dimostrare che, per soddisfare la legge di Ampère, la componente del campo parallela al filo deve essere

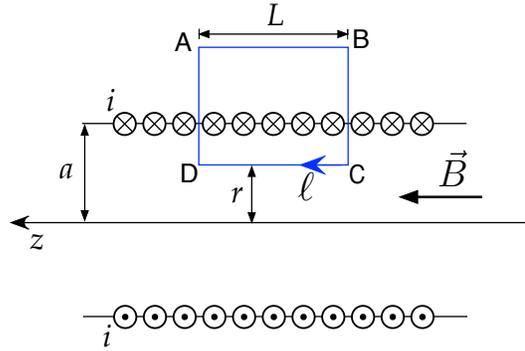


Figura 6:

uniforme in tutto lo spazio (vedi fig. 1 e relativi commenti), e quindi deve essere nulla. Pertanto,

$$B(r) = 0, \quad (r > a) . \quad (12)$$

Per quanto riguarda il campo all'interno, prendiamo la linea di Ampère mostrata in fig. 6 e calcoliamo la circuitazione di \vec{B} lungo di essa. Orientiamo ℓ in modo tale che la corrente concatenata con essa risulti positiva. I contributi all'integrale dovuti ai lati BC e DA sono nulli perché questi sono ortogonali a \vec{B} ; il contributo del lato AB è nullo perché all'esterno del solenoide il campo è nullo; il contributo del lato CD è pari a $B(r)L$, dove L è la lunghezza di CD. Pertanto

$$\oint_{\ell} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = B(r)L, \quad (13)$$

che, secondo la legge di Ampère, uguaglia $\mu_0 i_c$. La corrente concatenata a ℓ è pari a i , moltiplicata per il numero di spire che attraversano il rettangolo ABCD. Se n è il numero di spire per unità di lunghezza, i_c risulta pari a niL . Quindi si ha

$$B(r)L = \mu_0 niL, \quad (14)$$

da cui

$$B(r) = \mu_0 ni, \quad (r < a) . \quad (15)$$

In particolare, il campo risulta indipendente da r .

In conclusione, il campo prodotto da un solenoide rettilineo indefinito è identicamente nullo all'esterno del solenoide e uniforme all'interno, dove è diretto lungo l'asse del solenoide (con verso individuato dalla regola della vite) e ha modulo pari a $\mu_0 ni$.

Solenoido toroidale

Naturalmente, nella pratica non si potrà mai avere a che fare con solenoidi di lunghezza infinita e il risultato ottenuto nella sezione precedente deve essere visto come un'approssimazione che funziona quando la lunghezza del solenoide è molto maggiore delle sue

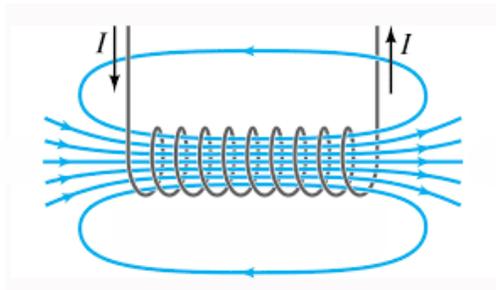


Figura 7:

dimensioni trasversali e quando si valuta il campo magnetico in punti interni al solenoide non troppo vicini ai suoi estremi. Analogamente, il campo all'esterno del solenoide non sarà rigorosamente nullo. Questo è dovuto, in ultima analisi, al fatto che le linee di campo di \vec{B} devono essere necessariamente chiuse, per cui, una volta uscite dal solenoide, esse si richiudono rientrando dall'altra parte (vedi fig. 7)

Per ovviare a questo, che in alcuni casi costituisce un inconveniente, si può pensare ad una geometria per cui le linee di campo si chiudano all'interno del solenoide. Questo si ottiene ripiegando il solenoide come una ciambella, portando le sue due basi a coincidere, come in fig. 8. Il solenoide in questo caso assume la forma che in geometria prende il nome di *toro*. Un toro è caratterizzato da due raggi di curvatura: il raggio di ogni singola

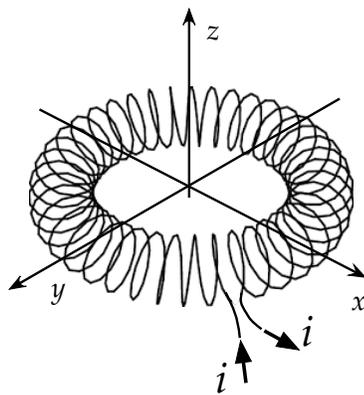


Figura 8:

spira (che chiameremo R_1) e il raggio della ciambella (R_2).

Considerazioni analoghe a quelle fatte per il solenoide rettilineo portano a concludere che \vec{B} è in ogni punto parallelo a circonferenze aventi asse coincidente con l'asse del solenoide (asse z). Inoltre, lungo tali conferenze il modulo di \vec{B} è uniforme. Per calcolare il valore del campo magnetico nel generico punto P, prendiamo come linea di Ampère una circonferenza passante per quel punto e avente asse coincidente con l'asse z (vedi fig. 9). Se r è la distanza del punto P dall'asse z , la circuitazione di \vec{B} risulta pari a

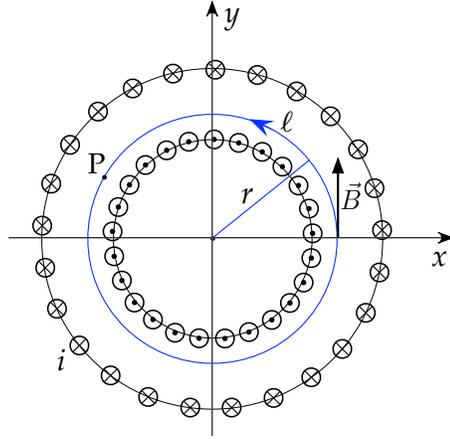


Figura 9:

$$\oint_{\ell} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = B(r) 2\pi r . \quad (16)$$

La corrente concatenata con ℓ sarà nulla se il punto P si trova al di fuori del solenoide, per cui

$$B(r) = 0 , \quad (\text{P esterno al solenoide}) . \quad (17)$$

Viceversa, se il punto P si trova all'interno del solenoide, indicando con N il numero totale di spire avvolte intorno al toro e con i la corrente che vi scorre, la corrente concatenata con ℓ sarà pari a Ni . Pertanto, in questo caso,

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 Ni , \quad (18)$$

da cui

$$B(r) = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} , \quad (\text{P interno al solenoide}) . \quad (19)$$

Si può verificare che, se $R_1 \ll R_2$, questa espressione coincide con quella ottenuta nel caso di solenoide rettilineo indefinito (eq. (15)).