interpolazione

Interpolazione ed estrapolazione

- Il problema consiste nel calcolare il valore assunto da una funzione **f(x)** in un punto **x** arbitrario, noti i valori della funzione in un insieme finito di punti $\mathbf{x_i}$ con **i=1,...,N**.
- Se **x** è compresa tra due punti noti si parla di interpolazione, se è all'esterno dell'intervallo coperto dai punti noti si parla di estrapolazione.
- Illustriamo qui uno dei metodi più semplici.

Interpolazione mediante polinomi

Dato un qualsiasi insieme di N punti esiste un unico polinomio di ordine N-1 passante per questi punti. È definito dalla formula di Lagrange:

$$P_{N-1}(x)=\Sigma_i \left(\Pi_j \; (x-x_j)/(x_i-x_j) \right) f(x_i)$$

dove la sommatoria è sull'indice i e va da 1 a N, la produttoria è sull'indice j e va da 1 a N con j diverso da i

Errore

- L'errore commesso sull'interpolazione della funzione f nel punto x è

  $r(x)=f(x)-P_n(x)$ con n grado del polinomio interpolatore
- Se la funzione f è derivabile almeno n volte abbiamo un teorema che afferma che esiste almeno un punto ξ appartenente all'intervallo $x_1 \ldots x_N$ nel quale

  $r(x)=g(\xi)\Pi\,(x-x_i)$, dove la produttoria è su i

  compreso tra 1 e N, e g è la derivata n-ma

  (n=N-1) della funzione f

Esempio

- Supponiamo di cercare una funzione passante per i punti (0,0), (-1,1) e (1,1).
- Il polinomio di Lagrange avrà grado 2 e sarà dato da

$P_2(x) = (x+1)/(0+1)*(x-1)/(0-1)*0$ // i=1

$+(x-0)/(-1-0)*(x-1)/(-1-1)*1$ // i=2

$+(x-0)/(1-0)*(x+1)/(1+1)*1$ // i=3

$= x*(x-1)/2+x*(x+1)/2 = x^2$

Regressione (fit)

- se invece abbiamo un insieme di dati sperimentali che seguono un andamento funzionale previsto da un modello teorico dipendente da un insieme di parametri possiamo usarli per
  - estrarre i parametri del modello
  - stimare l'errore su di essi
  - valutare la bonta' della descrizione fornita dal modello

fit lineare

- il caso piu' semplice e piu' diffuso di fit e' quello lineare. La funzione che si suppone che possa descrivere i dati sperimentali e' una retta $y=Ax+B$.
- I dati sperimentali sono n coppie di punti (x_i,y_i) e le incertezze (errori) su queste grandezze. Per semplicita' assumiamo che le incertezze sulle x_i siano trascurabili rispetto a quelle sulle y_i che chiamiamo σ_i.
- I parametri A e B si determinano minimizzando la quantita' $\chi^2=\Sigma_{i=1,n}((\, y_i-(Ax_i+B))/\sigma_i)^2$
- le formule risultanti nella versione piu' idonea per il calcolo numerico si trovano sul testo al paragrafo 8.1.1