Laboratorio di Calcolo I

# Applicazioni :
# Metodo Monte Carlo

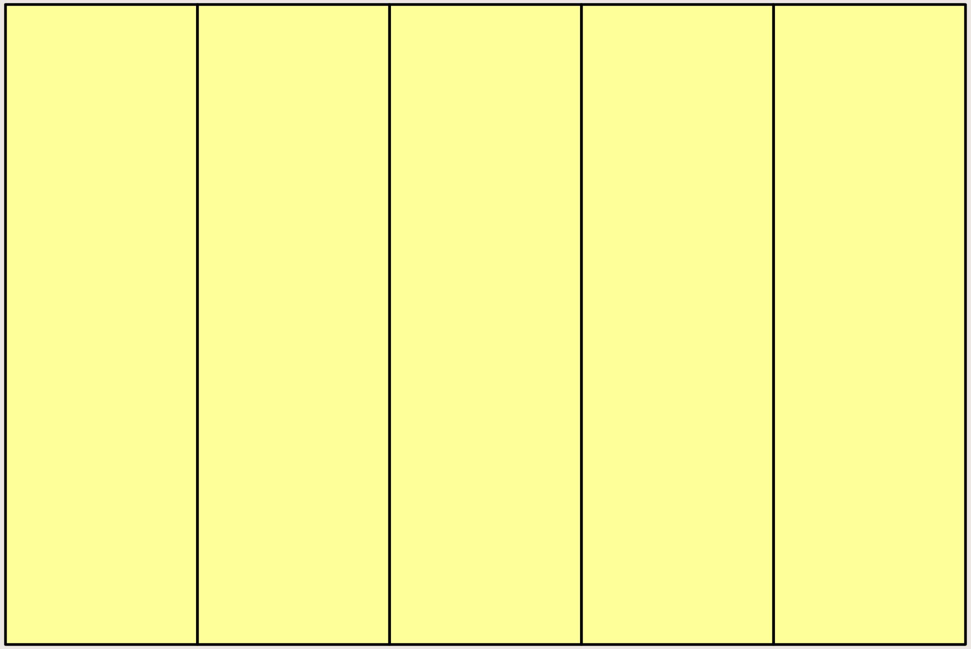
# Monte Carlo

- Il metodo di Monte Carlo è un metodo per la risoluzione numerica di problemi matematici che utilizza numeri casuali.
- Si applica sia a problemi che coinvolgano processi statistici che nella risoluzione di diversi problemi matematici quali la determinazione di un'area (integrale).

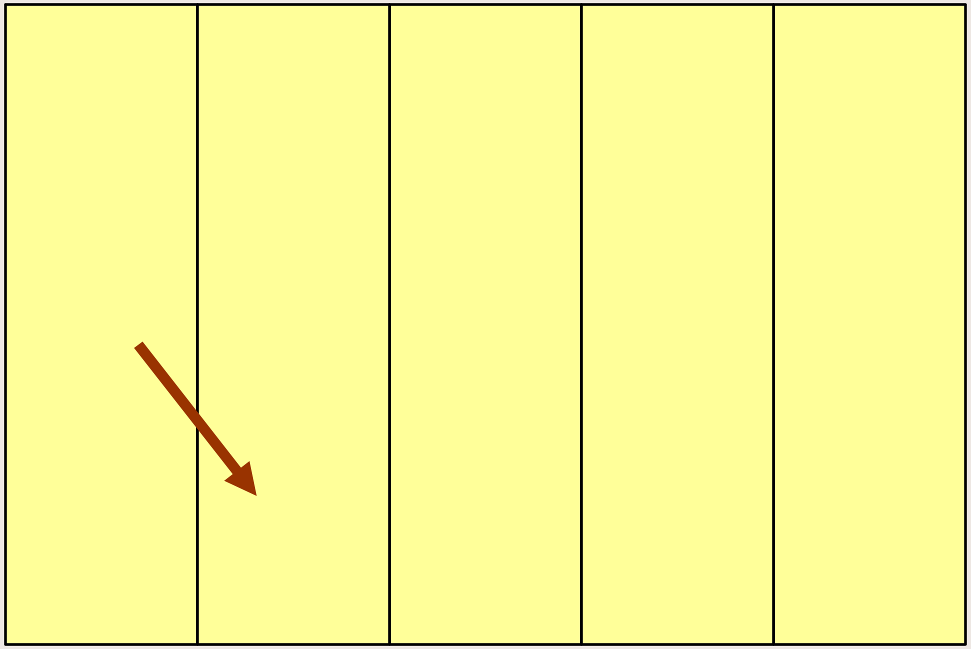
# Ago di Buffon

- Il primo Monte Carlo data della fine del XVIII secolo e serviva per la determinazione statistica del numero $\pi$:
- Si lascia cadere un ago di lunghezza $d$ su una superficie sulla quale si siano tracciate righe parallele a distanza $d$ l'una dall'altra...

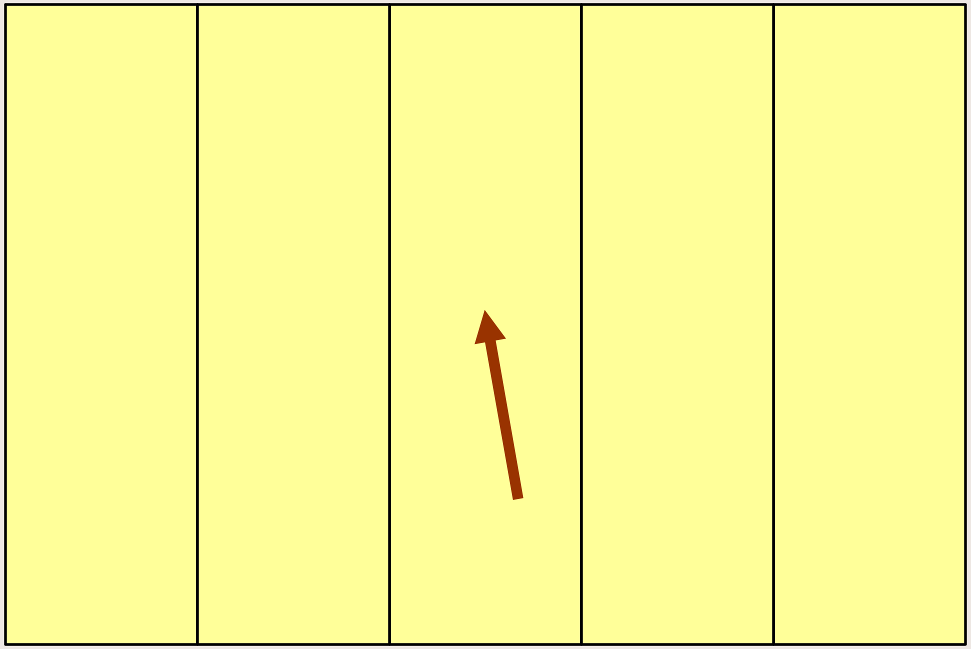
# Ago di Buffon



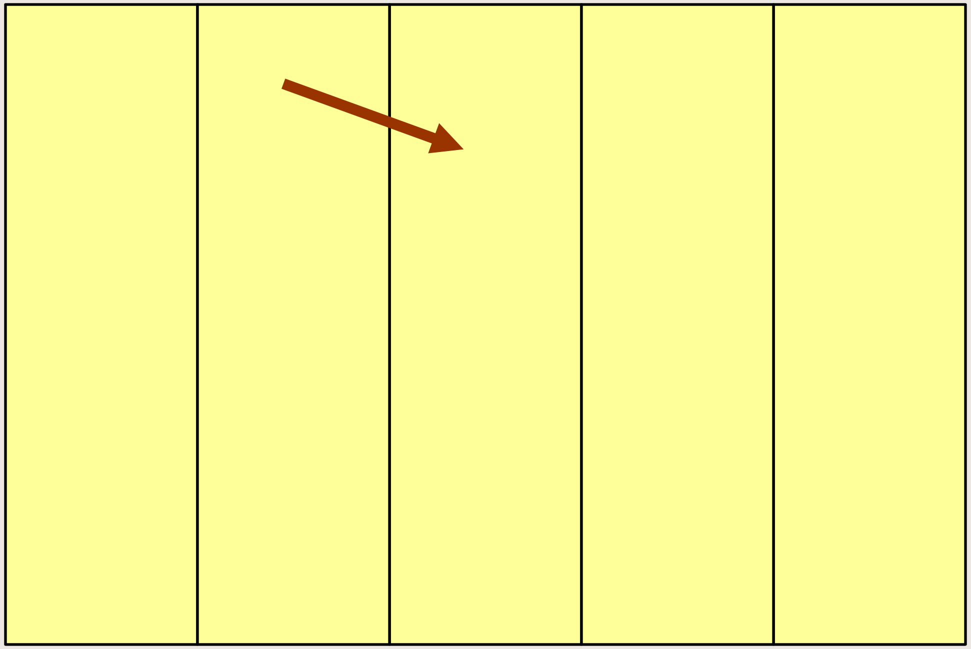
# Ago di Buffon



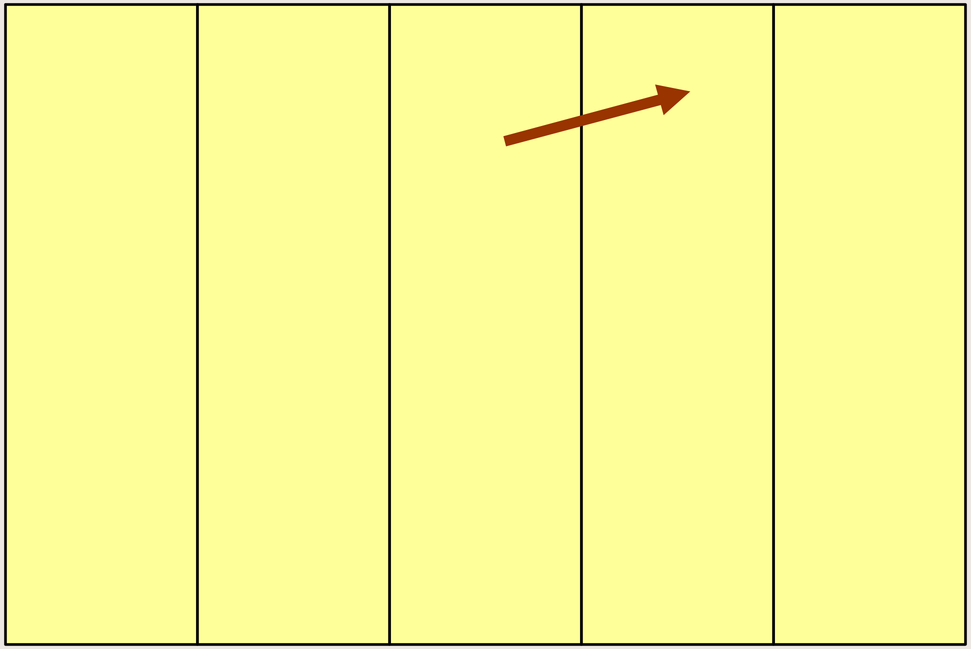
# Ago di Buffon



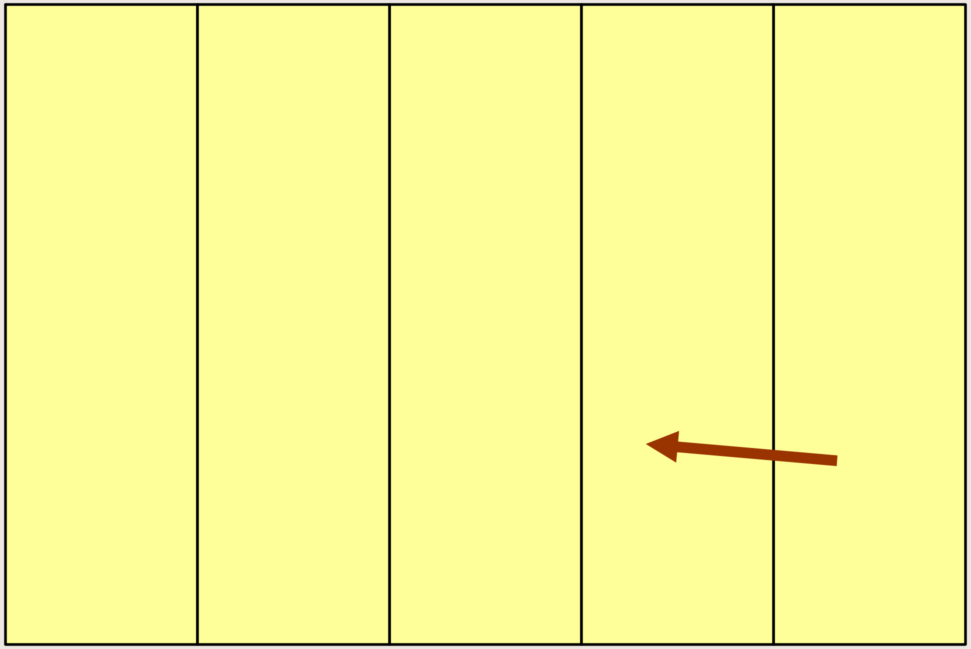
# Ago di Buffon



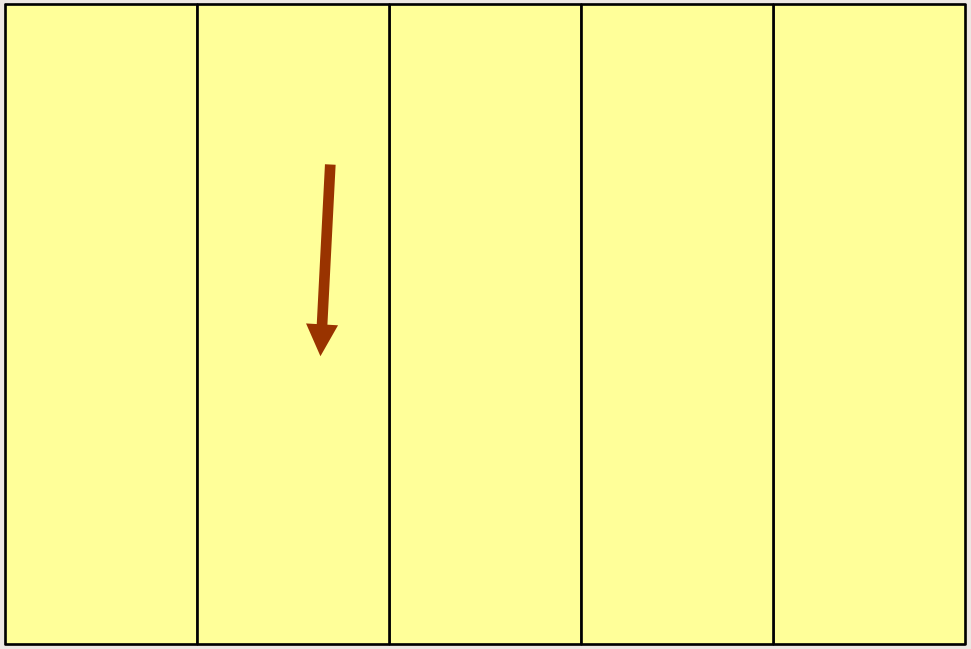
# Ago di Buffon



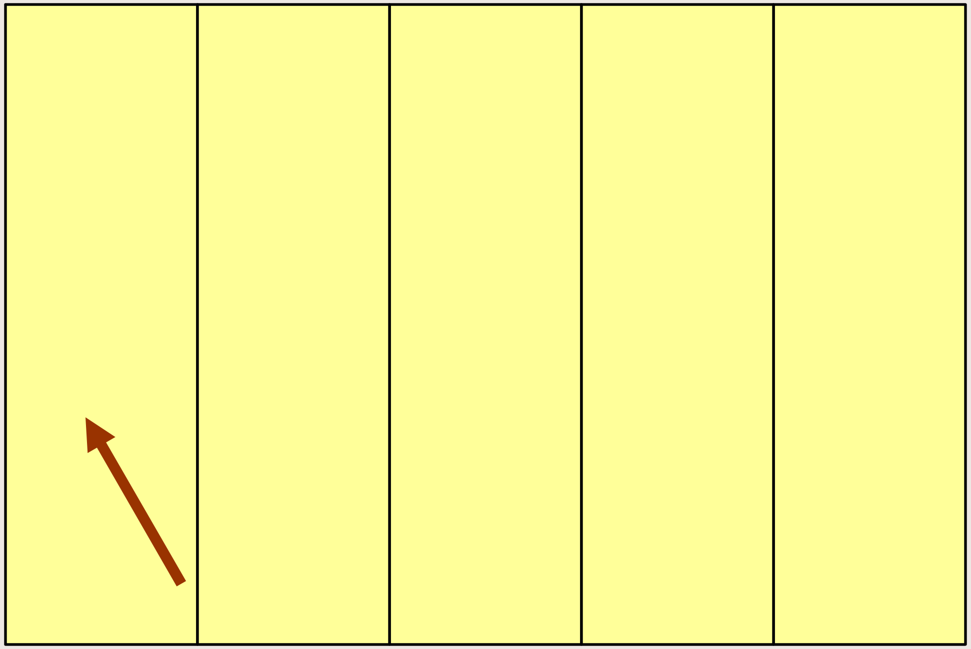
# Ago di Buffon



# Ago di Buffon



# Ago di Buffon



# Ago di Buffon

- La probabilità che l'ago incroci una linea è data da $P = 2/\pi$
- Se l'ago viene lanciato $N$ volte, indicando con $Nx$ il numero di volte che l'ago incrocia una linea

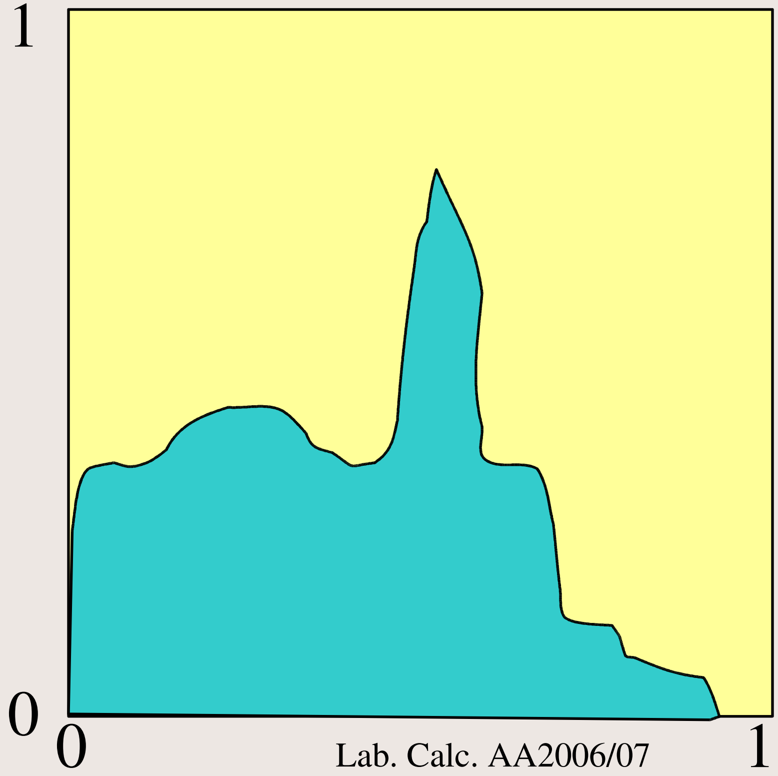
  $Nx/N$ tende a $P$ all'aumentare di $N$

  e quindi

  $2\,N/Nx$ tende a $\pi$

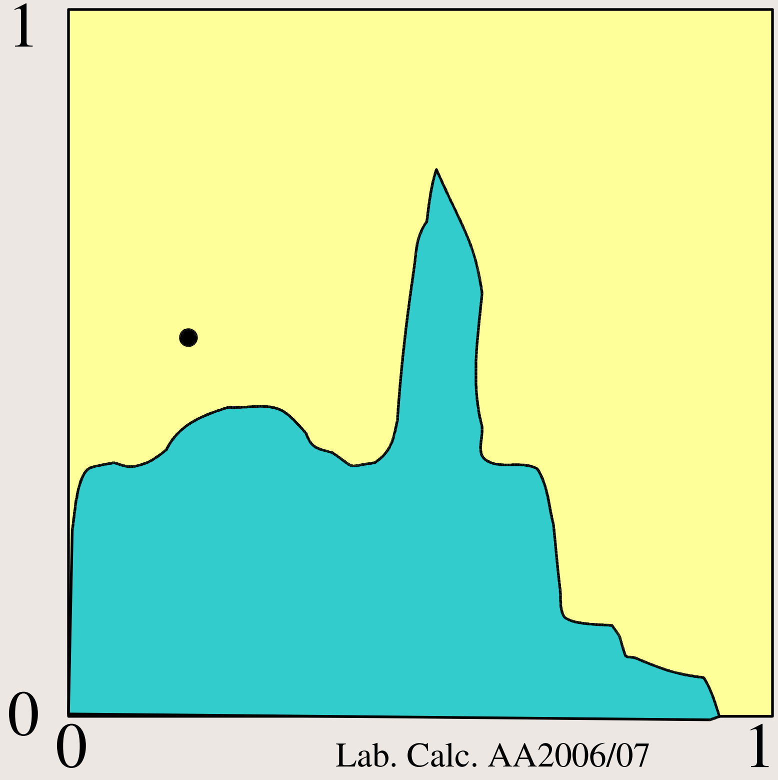
# Misura di un'area

- Sia una generica superficie A completamenta contenuta in un quadrato di lato unitario



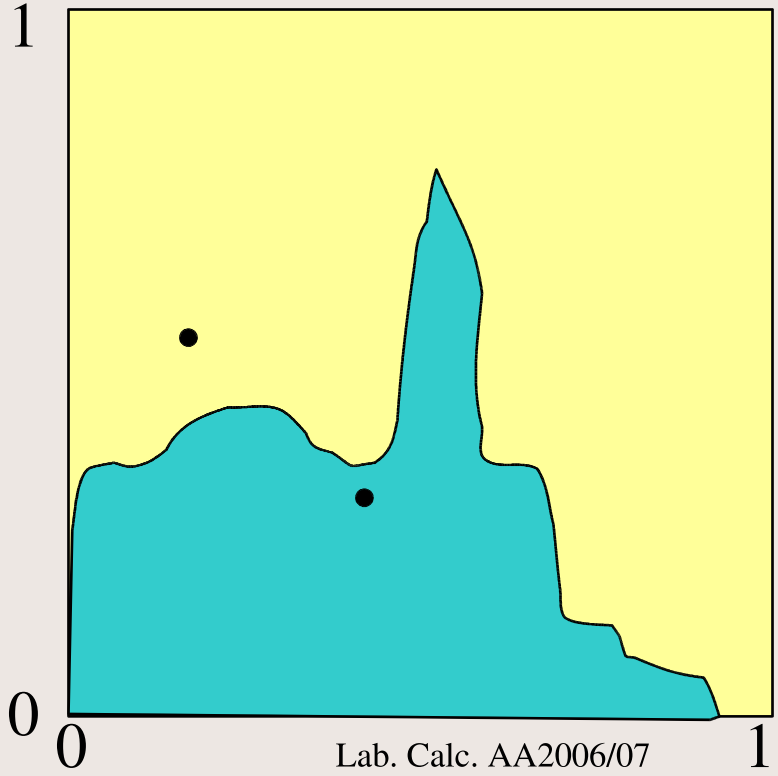
# Misura di un'area

- estraiamo una coppia di numeri casuali (x,y) tra loro indipendenti e compresi tra 0 e 1 e li rappresentiamo come un punto nel piano xy

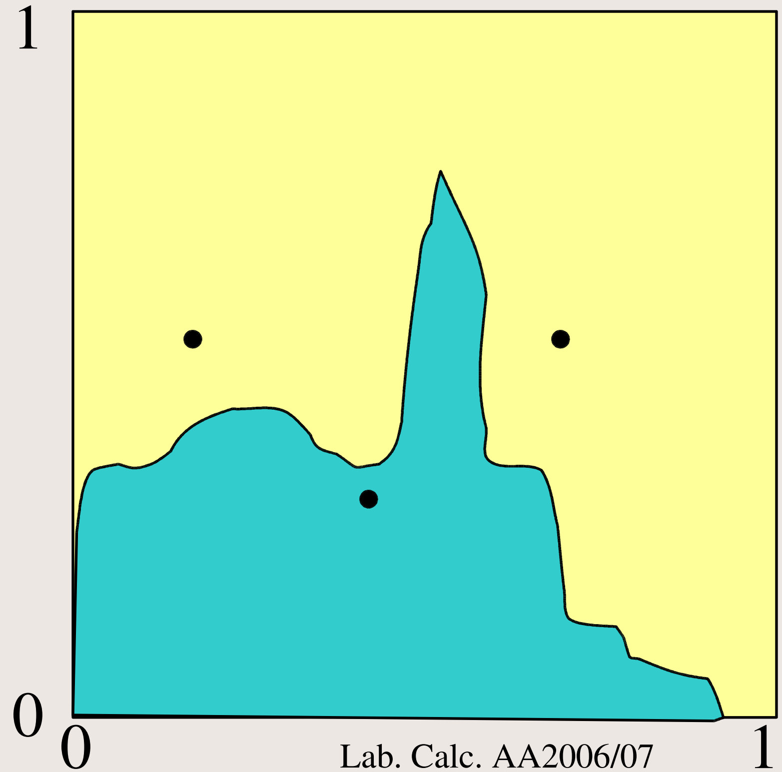


# Misura di un'area

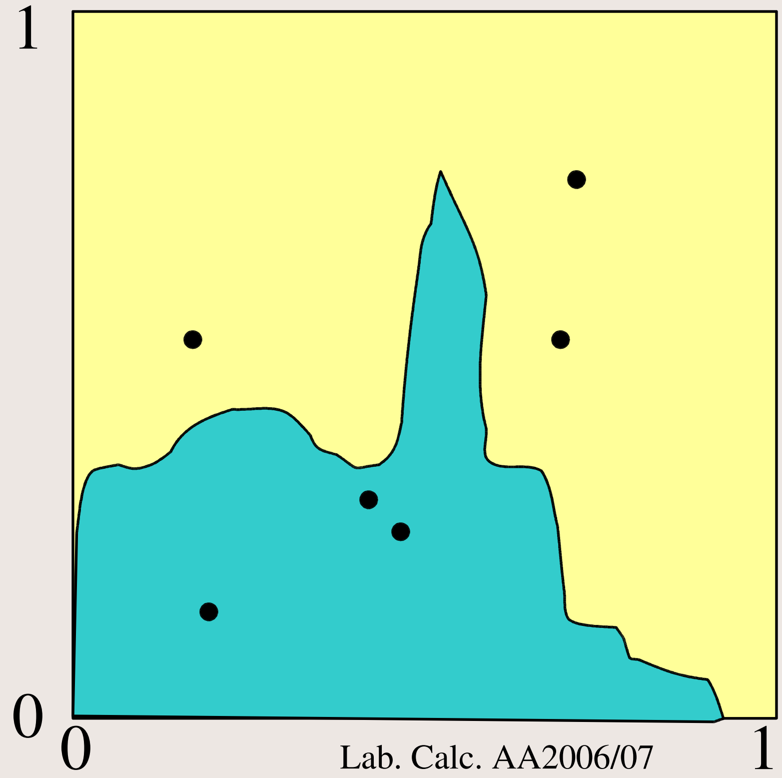
- Procediamo estraendo altre coppie



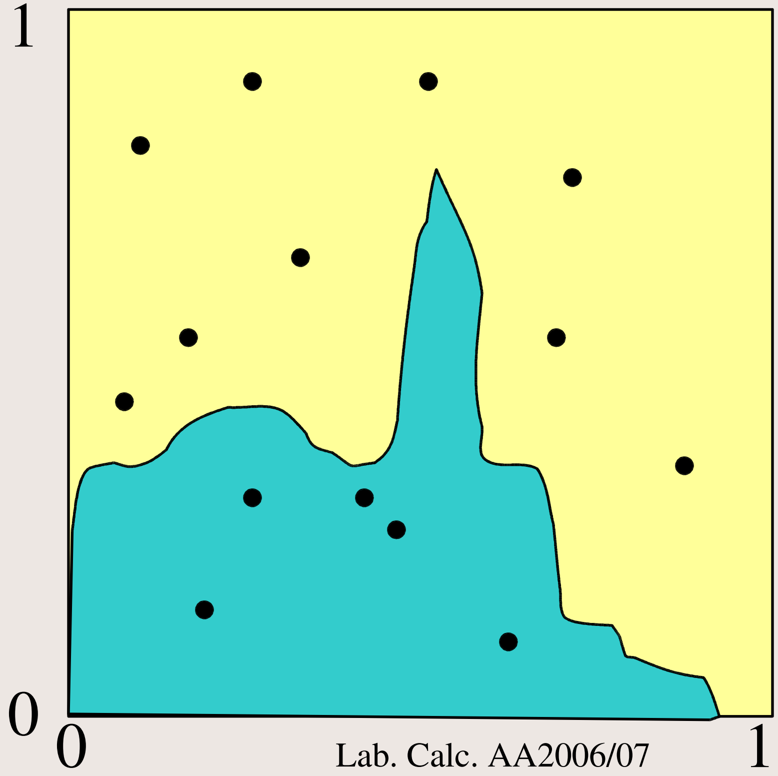
# Misura di un'area



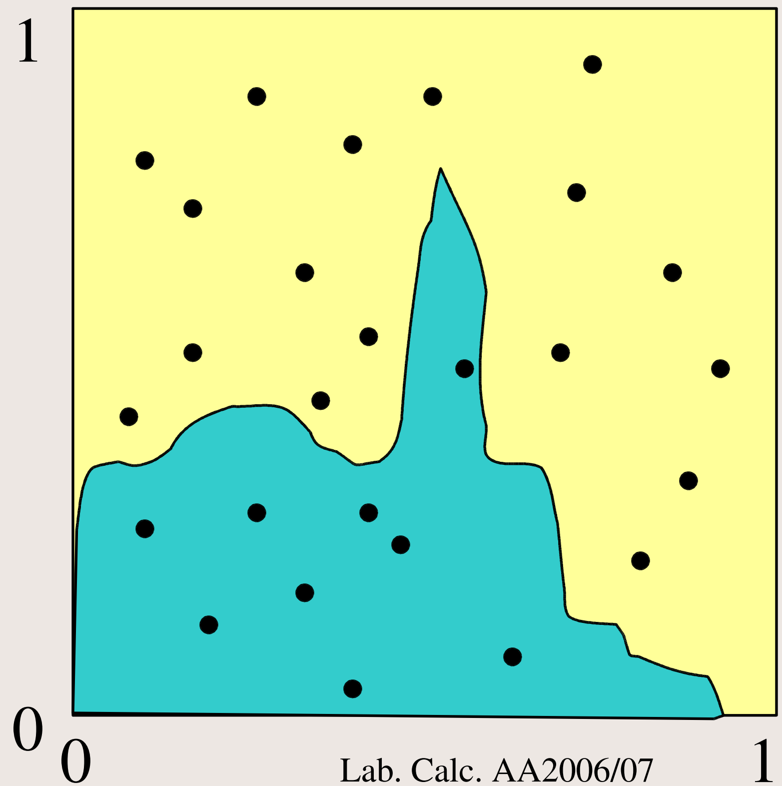
# Misura di un'area



# Misura di un'area

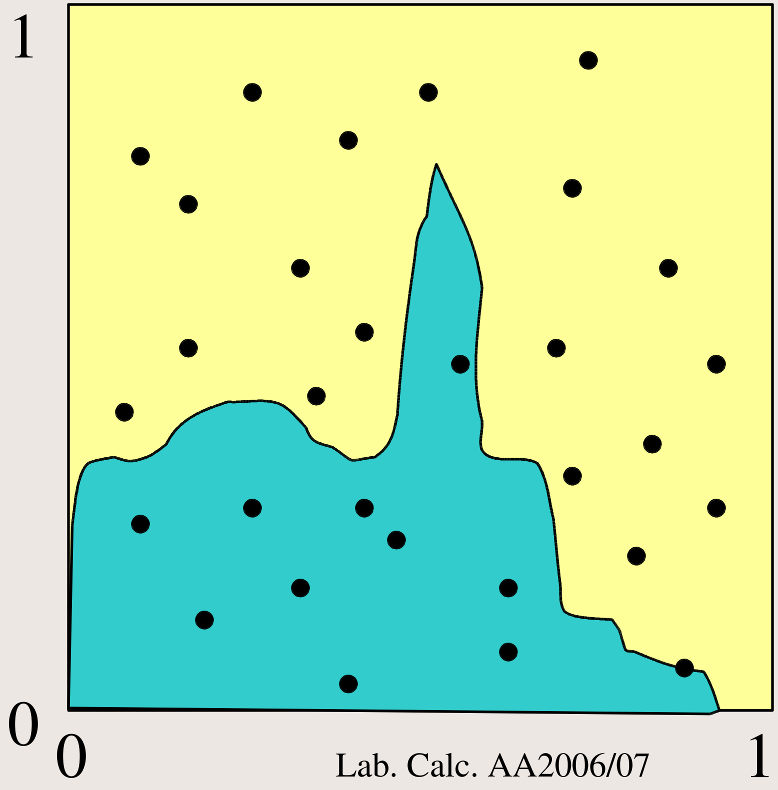


# Misura di un'area



# Misura di un'area

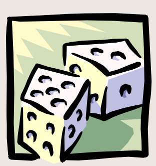
- La densità di punti geometrici estratti sarà uniforme...

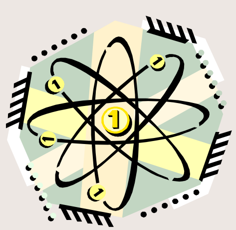


# Misura di un'area

- Quindi la probabilità che il punto (x,y) estratto capiti all'interno dell'area che vogliamo misurare è esattamente uguale all'area stessa.
- Se estraiamo N coppie di numeri e N' è il numero di punti che cadono all'interno della figura il rapporto N'/N tende al crescere di N all'area della figura.

# Sequenze di numeri casuali





- Sequenze di numeri casuali possono essere generate
  - Utilizzando un sistema caotico, la cui evoluzione è deterministica ma che dipende criticamente dalle condizioni iniziali: il lancio di un dado, l'estrazione di un numero al lotto o con la roulette etc...
  - Utilizzando un processo che sia intrinsecamente casuale, come il decadimento radioattivo di un nucleo, il rumore termico, il tempo di arrivo dei raggi cosmici sulla terra...

# Sequenze di numeri casuali

- Ma anche
  - Ricorrendo a numeri random raccolti in tavole contenenti vari milioni di numeri, spesso insufficienti per molte applicazioni
  - Ricorrendo a dei generatori di numeri che sono algoritmi in grado di produrre sequenze di numeri riproducibili che simulano una successione di numeri casuali. Si parla in questo caso di numeri pseudo-random.

# Numeri pseudo-random

- Vantaggi
  - Si ottengono mediante algoritmi semplici
  - Occupano poco spazio nella memoria del calcolatore
  - La serie è riproducibile e la sua qualità è controllabile
- Svantaggi
  - Possono esserci delle correlazioni
  - La serie di numeri è comunque limitata

# Il generatore

- Nelle librerie C associate al compilatore gcc da noi usato troviamo le funzioni rand() e random().
- Per sapere come si usano basta dare il comando

  man random o man rand

- Per usarle basta includere il file <stdlib.h>
- I numeri pseudo-random prodotti sono interi (a 32 bit) distribuiti uniformemente tra 0 e RAND_MAX (2 alla 31 meno 1=2147483647).

# generazione di numeri pseudo-random tra 0 e 1 (listato 5.6)

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#define MAX 1000


main() {
   double x[MAX];
   int i;
   for (i = 0; i < MAX; i++) {
      x[i] = (double)rand()/RAND_MAX;
/* dividere per RAND_MAX+1. se non si vuole includere 1 */
      printf("%lf\n",x[i]);
   }
}
```

# inizializzazione

- l'algoritmo di generazione dei numeri casuali deve essere inizializzato
- rand() ha un'inizializzazione di default che fa si` che venga generata sempre la setssa sequenza di numeri partendo da 1
- srand(int seed) permette di inizializzarla ad un seme (seed) diverso da 1
- utilizzando sempre lo stesso seme si riottiene sempre la stessa sequenza. Per variarlo in modo arbitrario si puo' utilizzare il tempo in second i misurato dall'orologio del computer (time(0) o tramite gettimeofday).

# Distribuzioni non uniformi

- Il calcolatore genera una sequenza di numeri distribuita uniformemente su un certo intervallo.
- Per molte applicazioni abbiamo bisogno di numeri distribuiti secondo una generica funzione di distribuzione f(x).
- Vediamo alcuni metodi utilizzabili a questo scopo.

# Metodo diretto per variabili continue

- Per estrarre una variabile aleatoria secondo la funzione di distribuzione f(x) (normalizzata a 1) osserviamo che la funzione di probabilità integrata, F(x) (integrale da -∞ a x della f(x) ), è a sua volta una variabile aleatoria distribuita uniformemente tra 0 e 1
- Ne consegue che se si riesce ad esprimere la variabile aleatoria x in funzione della variabile aleatoria F, estraendo quest'ultima tra 0 e 1, si ottiene una variabile x distribuita secondo f(x).

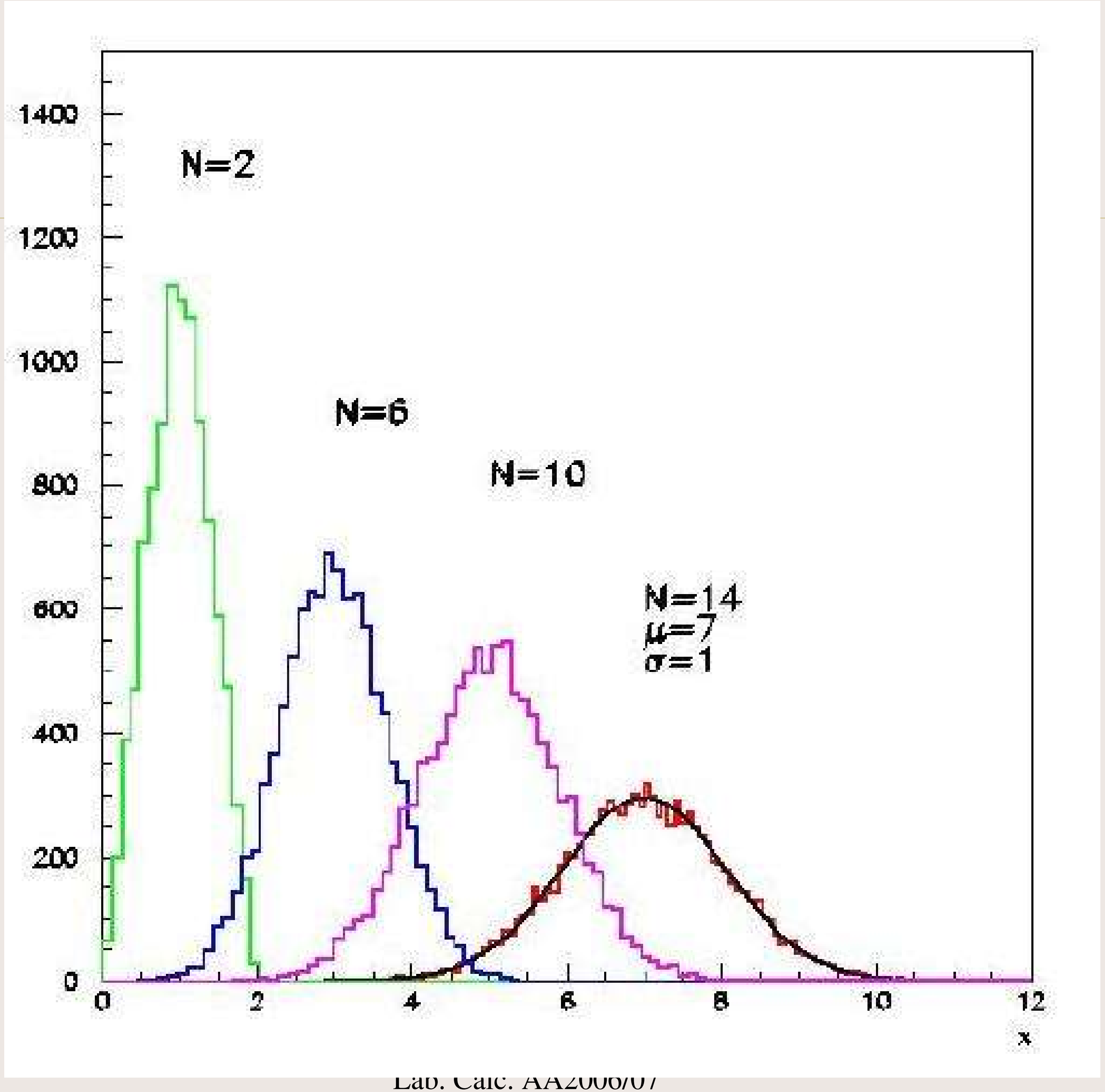
# Metodo della reiezione

- Per simulare la funzione di distribuzione f(x) sull'intervallo [a,b], noto il valore massimo assunto dalla funzione nell'intervallo, fmax, è sufficiente
  - Estrarre una variabile x distribuita uniformemente tra a e b

    ( se r varia tra 0 e 1 x si ottiene come x=r*(b-a)+a )
  - Estrarre una variabile y distribuita uniformemente tra 0 e fmax
  - Se $y > f(x)$ si ripete l'estrazione della coppia (x,y)
  - Se $y < f(x)$ si accetta il valore di x che è una variabile aleatoria distribuita secondo la f(x)

# Generazione di numeri gaussiani

- Numeri pseudo-random con funzione di distribuzione gaussiana possono essere anche generati sfruttando il teorema del limite centrale che afferma che:
- *La somma di un numero N di variabili aleatorie con valori medi e varianze finite ha una distribuzione che per N tendente all'infinito tende ad una gaussiana di valor medio "somma dei valori medi" e varianza "somma delle varianze" delle distribuzioni di partenza*
- Partendo da distribuzioni uniformi già per N=12 si ottengono delle gaussiane praticamente perfette


1400
1200
1000
800
600
400
200
0
N=2
N=6
N=10
N=14
μ=7
σ=1
0
2
4
6
8
10
12
x

# Uso dei numeri pseudo-random

- alcune applicazioni dei numeri pseudo-random
  - Calcolo di integrali
  - Simulazione di eventi discreti
  - Simulazione della risposta di uno strumento
- I numeri pseudo-random sono molto utilizzati anche per simulare fenomeni fisici di natura statistica.

# Eventi discreti

- Esempi:
  - Lancio di una moneta (distribuzione di probabilità binomiale con p=q=0.5)
  - Lancio di un dado (distribuzione di probabilità binomiale p=1/6 q=5/6 se si studia il numero di lanci che diano 6)
  - Estrazioni del lotto (distribuzione di probabilità binomiale p=1/90 se si studia un numero in particolare)
  - Sondaggio di opinione con due sole risposte, SI e NO (distribuzione binomiale)
  - Sondaggio di opinione con più risposte ammesse (distribuzione multinomiale)

# Simulazione di eventi discreti

- Per simulare l'esito di eventi discreti che abbiano probabilità a priori p1, p2, p3...pn (con $\Sigma$ pi =1!) si estrae un numero r distribuito uniformemente tra 0 e 1
  - Se r < p1 si considera l'evento di tipo 1
  - Se p1 < r < (p1+p2) si considera l'evento di tipo 2
  - Se (p1+p2) < r < (p1+p2+p3) si considera l'evento di tipo 3
  - Etc...
- Si otterranno frequenze di eventi dei vari tipi che, se calcolate con N estrazioni con N tendente a infinito, tenderanno alle probabilità a priori.