Rinormalizzazione ad un loop di O_1 e O_2

Schedar Marchetti
Matteo Salvatori

19 - 7 - 2002

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo dell'esercizio consiste nell' applicare un programma di rinormalizzazione ad una coppia di operatori, che causano divergenze a causa della loro cattiva definizione.

Come operazione preliminare, è utile effettuare il calcolo della rinormalizzazione ad un loop del propagatore di un quark a massa nulla.

Capitolo 2

Rinormalizzazione delle linee esterne

Il diagramma da considerare è il seguente:

$\frac{i\not p}{p^2} + \sum_{A,B=1}^{8} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} i \frac{\not p}{p^2} (-ig_s) t_{ab}^A \gamma^\mu i \frac{\not p - notq}{(p-q)^2} (-ig_s) t_{bc}^B \gamma^\nu i \frac{\not p}{p^2} (-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \delta^{AB}) =$

$= i\frac{\not p}{p^2} + i\frac{\not p}{p^2} i\Sigma i \frac{\not p}{p^2}$

$i\Sigma = -g_s^2 \sum_{A=1}^{8} t_{ab}^A t_{bc}^A \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{(\not p - \not q)}{(p-q)^2 q^2} \gamma_\mu =$

$= 2g_s^2 C_F \delta_{ac} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\not p - \not q}{(p-q)^2 q^2}$

$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(p-q)^\alpha}{(p-q)^2 q^2} = X \frac{p^\alpha}{p^2}$

$X = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(p-q)\cdot p}{(p-q)^2 \cdot q^2}$

Per risolvere l'integrale occorre passare in coordinate euclidee, definendo $iq_0^M = q_0^E$; sostituendo nell'integrale:

$X = i \int \frac{d^4}{(2\pi)^4} \frac{(p-q)\cdot p}{(p-q)^2 q^2} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p-q)^2 q^2} = \frac{ip^2}{(2\pi)^4} \int d^4q \int_0^1 dz \frac{1}{[q^2 + (p^2 - 2p\cdot q)z]^2} =$

Ponendo t = q - pz

$= \frac{ip^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int d^4t \frac{1}{[t^2+zp^2(1-z)]^2} = \frac{ip^2}{8\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^\Lambda dt \frac{t^3}{[t^2+R]^2} =$

Con la posizione $w = t^2 + R$, dove $R = zp^2(1-z)$

$= \frac{ip^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz \int_R^{\Lambda^2+R} dw \frac{w-R}{w^2} = \frac{ip^2}{16\pi^2} ln \frac{\Lambda^2}{p^2} =$

Ripassando in coordinate minchowskiane

$= -\frac{ip^2}{16\pi^2} ln \frac{\Lambda^2}{-p^2}$

$i\Sigma = -i\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \not{p} ln \frac{\Lambda^2}{-p^2}$

Sostituendo nell'espressione iniziale si ottiene:

$i\frac{\not{p}}{p^2} + i\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F ln \frac{\Lambda^2}{-p^2} \frac{\not{p}}{p^2}$

Per rinormalizzare il propagatore del quark definisco una $Z_q^{\frac{1}{2}}$ che lega il campo originale q^0 a quello rinormalizzato q^R: $q^0 = Z_q^{\frac{1}{2}} q^R$. Per trovare l'espressione di Z_q all'ordine α_s si deve imporre che essa cancelli la divergenza presente nel propagatore:

$Z_q i \frac{\not{p}}{p^2} [1 + i\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F ln \frac{\Lambda^2}{-p^2}] = i\frac{\not{p}}{p^2}$

$Z_q = 1 - i\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F ln \frac{\Lambda^2}{-p^2}$

Capitolo 3

Rinormalizzazione degli operatori

Consideriamo la transizione $\bar{s}d \to \bar{u}u$; al primo ordine nell'espansione operatoriale delle interazioni deboli essa é descritta dalla hamiltoniana efficace:

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* V_{ud} (\bar{s}u)_{V-A} (\bar{u}d)_{V-A}$$

Occorre tuttavia notare che in processi di questo tipo entrano fortemente in gioco gli effetti dovuti alle interazioni forti, che si manifestano mediante lo scambio di gluoni tra i quarks; tali fenomeni non possono essere in generale trascurati, ma sotto le opportune condizioni possono essere trattati in maniera perturbativa. Si é, in effetti, di fronte ad un problema che riguarda diverse scale di energia; il processo deve avvenire ad una energia $E \ll M_w$, affinché siano trascurabili gli effetti dovuti al fatto che il bosone W é un oggetto che si propaga. D'altra parte, gli effetti dovuti alla QCD sono trattabili come perturbativi sotto l'ipotesi che l'energia scambiata nel processo sia elevata, a causa della libertá asintotica.

Sotto queste ipotesi, ovvero se $\Lambda_{QCD} \ll q \ll M_w$, l'hamiltoniana efficace che descrive il processo considerato al primo ordine nelle interazioni forti assume la forma:

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* V_{ud} (C_1 O_1 + C_2 O_2)$$

dove

$$O_1 = (\bar{s}^a u^b)_{V-A} (\bar{u}^b d^a)_{V-A}$$

$$O_2 = (\bar{s}^a u^a)_{V-A} (\bar{s}^b d^b)_{V-A}$$

Dunque la dinamica delle interazioni forti genera un nuovo operatore O_1 che ha gli stessi numeri quantici del precedente, ma una diversa struttura di colore. C_1 e C_2 sono chiamati coefficienti di Wilson, e si trovano imponendo che la teoria effettiva riproduca gli stessi risultati di quella originale, nel calcolo delle osservabili. Questo processo, chiamato matching, si articola in tre parti: occorre calcolare una quantitá osservabile mediante la teoria "vera", fare lo stesso con l'uso della hamiltoniana efficace ed imporre l'uguaglianza dei due risultati.

Come preludio alla seconda operazione, tuttavia, bisogna procedere alla rinormalizzazione dei due operatori; questo é necessario per cancellare le divergenze che sono causate dalla loro natura intrinseca. Essi sono infatti operatori composti, prodotto di quattro campi fermionici in un punto, e come tali non sono ben definiti.

Lo scopo del programma di rinormalizzazione é quello di calcolare una quantitá divergente mediante essi, e di imporre la sua finitezza. A causa del grande grado di arbitrarietá con cui ció puó essere realizzato, é possibile scegliere come oggetto su cui imporre condizioni la funzione di Green a quattro punti con inserzione di O_1 e O_2; per ridurre al massimo il numero dei diagrammi da gestire, si considera Γ, ovvero la funzione amputata, ottenuta dividendo per i propagatori esterni.

I diagrammi da calcolare sono i seguenti:

3.1 Ampiezza di O_2

L'oggetto considerato ha la forma esplicita seguente:

$$\Gamma_4 =< 0|T(s^m_\alpha \bar{u}^n_\beta u^k_\delta \bar{d}_\rho{}^r O^0_2)|0 >$$

Di seguito se ne effettua il calcolo per ogni diagramma separatamente.

3.1.1 Diagramma 1

All'ordine 0 nelle interazioni forti si ha immediatamente:

$$\Gamma_4 =< pp|(\bar{s}^a u^a)_{V-A})(\bar{u}^b d^b)_{V-A}|pp >= S_1$$

3.1.2 Diagramma 2

$\Gamma_4 = \sum_{A,B=1}^{8} t^A_{ma} t^B_{br} < pp|\bar{s}^m u^a \bar{u}^b d^r|pp > \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-ig_s)\gamma^\sigma i \frac{\not{p}+\not{q}}{(q+p)^2}\gamma^\mu(1-\gamma_5) \otimes \gamma_\mu(1-\gamma_5) i \frac{\not{p}+\not{q}}{(p+q)^2}(-ig_s)\gamma^\rho \frac{-ig_{\sigma\rho}}{q^2}\delta^{AB} =$

$= -ig_s^2 \sum_{A=1}^{8} t^A_{ma} t^A_{br} < pp|\bar{s}^m u^a \bar{u}^b d^r|pp > \gamma^\sigma\gamma^\alpha\gamma^\mu(1-\gamma_5) \otimes \gamma_\mu(1-\gamma_5)\gamma^\beta\gamma_\sigma \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{(p+q)_\alpha(p+q)_\beta}{(p+q)^2(p+q)^2 q^2}$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{(p+q)_\alpha(p+q)_\beta}{(p+q)^2(p+q)^2q^2} = Xg_{\alpha\beta} + Y\frac{p_{\alpha\beta}}{p^2}$$

$$\int \frac{(p+q)\cdot(p+q)}{(p+q)^2(p+q)^2q^2} = 4X + Y$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{(p-q)\cdot p(p+q)\cdot p}{(p-q)^2(p+q)^2q^2p^2} = X + Y$$

$$X = -\frac{i}{4}\frac{1}{16\pi^2}ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}$$

$$Y = cost$$

$$\gamma^\sigma\gamma^\alpha\gamma^\mu(1-\gamma_5)\otimes\gamma_\mu(1-\gamma_5)\gamma^\beta\gamma_\sigma = 4\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\otimes\gamma^\beta(1-\gamma_5)$$

Sostituendo si ottiene:

$$\Gamma_4 = -\frac{\alpha_s}{4\pi}[S_1 - \frac{1}{N}S_2]ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}$$

3.1.3 Diagramma 3

$\Gamma_4 = \sum_{A,B=1}^{8} t^A_{ma} t^B_{kb} < pp|\bar{s}^m u^a \bar{u}^k d^b|pp > \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-ig_s)\gamma^\sigma i\frac{\not{p}+\not{q}}{(p+q)^2}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\otimes\gamma^\rho(-ig_s)i\frac{\not{p}-\not{q}}{(p-q)^2}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\frac{-ig_{\sigma\rho}}{q^2}\delta^{AB} =$

$$= -ig_s^2 \sum_{A=1}^{8} t_{ma}^A t_{kb}^A < pp|\bar{s}^m u^a \bar{u}^k d^b|pp > \gamma^\sigma\gamma^\alpha\gamma^\mu(1-\gamma_5) \otimes \gamma_\sigma\gamma^\beta\gamma_\mu(1-\gamma_5) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{(p+q)_\alpha(p-q)_\beta}{(p+q)^2(p-q)^2q^2}$$

$$\gamma^\sigma\gamma^\alpha\gamma^\mu(1-\gamma_5) \otimes \gamma_\sigma\gamma^\beta\gamma_\mu(1-\gamma_5) = 4g^{\alpha\beta}\gamma^\mu(1-\gamma_5) \otimes \gamma_\mu(1-\gamma_5)$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{(p+q)\cdot(p-q)}{(p+q)^2(p-q)^2q^2} = -\frac{i}{16\pi^2} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}$$

Sostituendo:

$$\Gamma_4 = -\frac{\alpha_s}{4\pi}[2S_1 - \frac{2}{N}S_2] ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}$$

3.1.4 Diagramma 4

$$\Gamma_4 = \sum_{A,B=1}^{8} t_{ma}^A t_{am}^A < pp|\bar{s}^m u^n \bar{u}^b d^b|pp > \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-ig_s)\gamma^\sigma i\frac{\not{p}+\not{q}}{(p+q)^2}\gamma^\mu(1-\gamma_5) i\frac{\not{p}+\not{p}}{(p+q)^2}(-ig_s)\gamma^\rho \otimes \gamma_\mu(1-\gamma_5)\frac{-ig_{\sigma\rho}}{q^2}\delta AB =$$

$$= -ig_s^2 \sum_{A=1}^{8} t_{ma}^A t_{am}^A < pp|\not{s}^m u^n \not{\mu}^b d^b|pp > \gamma^\sigma\gamma^\alpha\gamma^\mu(1-\gamma_5)\gamma^\beta\gamma_\sigma \otimes \gamma_\mu(1-\gamma_5) \int \frac{(p+q)_\alpha(p+q)_\beta}{(p+q)^2(p+q)^2q^2}$$

$$\gamma^\sigma\gamma^\alpha\gamma^\mu(1-\gamma_5)\gamma^\beta\gamma_\sigma \otimes \gamma_\mu(1-\gamma_5) = 2g^{\alpha\beta}\gamma^\mu(1-\gamma_5) \otimes \gamma_\mu(1-\gamma_5) - 4\gamma^\alpha(1-\gamma_5) \otimes \gamma^\beta(1-\gamma_5)$$

$$\sum_{A=1}^{8} t_{ma}^A t_{an}^A = C_F\delta_{mn}$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{(p+q)_\alpha(p+q)_\beta}{(p+q)^2(p+q)^2q^2} = Xg_{\alpha\beta} + Y\frac{p_{\alpha\beta}}{p^2}$$

$$X = \frac{i}{4}\frac{1}{16(\pi)^4} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}$$

$$Y = cost$$

Sostituendo si ottiene:

$$\Gamma_4 = \frac{\alpha_s}{4\pi}2C_F S_2 ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}$$

3.1.5 Risultato finale

Sommando tutti i diagrammi, si ottiene:

$$\Gamma_4 = [1 + 2C_F\frac{\alpha_s}{4\pi}ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}]S_2 - 3S_1\frac{\alpha_s}{a\pi}ln\frac{\Lambda^2}{-p^2} + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi}S_2 ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}$$

3.2 Ampiezza di O_1

Analogamente ad O_2, si deve calcolare:

$\Gamma_4 =< 0|T(s_\alpha^m \bar{u_\beta}^n u_\delta^k \bar{d}_\rho^r O_1)|0 >$

Si può notare che, se si opera una trasformazione di Fierz sulle matrici gamma, i diagrammi da calcolare divengono quelli considerati per O_2:

è possibile, dunque, scrivere immediatamente il risultato.

3.2.1 Diagramma 1

$\Gamma_4 = S_1$

3.2.2 Diagramma 2

$\Gamma_4 = \frac{\alpha_s}{4\pi} 2C_F S_1 ln \frac{\Lambda^2}{-p^2}$

3.2.3 Diagramma 3

$\Gamma_4 = -\frac{\alpha_s}{4\pi}[2S_2 - \frac{2}{N} S_1] ln \frac{\Lambda^2}{-p^2}$

3.2.4 Diagramma 4

$\Gamma_4 = -\frac{\alpha_s}{4\pi}[S_2 - \frac{1}{N} S_1] ln \frac{\Lambda^2}{-p^2}$

3.2.5 Risultato finale

Unendo i risultati:

$$\Gamma_4 = [1 + 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} ln\Lambda^2 - p^2]S_1 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi}S_1 - 3\frac{\alpha_s}{4\pi}S_2 ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}$$

3.3 La matrice Z di rinormalizzazione

Riassumendo, il calcolo al primo ordine delle intarazioni forti della funzione di Green a quattro punti amputata, con inserzione di O_1 e O_2, ha dato il seguente risultato:

$$< O_1 >^{(0)} = [1 + 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}]S_1 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}S_1 - 3\frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}S_2$$

$$< O_2 >^{(0)} = [1 + 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}]S_2 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}S_2 - 3\frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}S_1$$

Si puó notare subito che le divergenze comprese nelle prime parentesi graffe si eliminano mediante la rinormalizzazione dei campi esterni; esse infatti non sono dovute alla cattiva definizione degli operatori che compaiono nella funzione di Green, ma provengono da diagrammi in cui la divergenza é causata intrinsecamente dalla QCD.

Per rimuovere le divergenze residue, causate espressamente dagli operatori, occorre introdurre una matrice $\hat{Z}$ 2×2, che leghi gli operatori iniziali a quelli rinormalizzati:

$$Q_i^{(0)} = Z_{ij} Q_j^{(R)}$$

Riferita alle funzioni di Green, questa relazione diviene:

$$< Q_i >^{(0)} = Z_q^{-2} Z_{ij} < Q_j^{(R)} >$$

A questo punto occorre scegliere una condizione di finitezza; particolarmente vantaggioso risulta imporre:

$$< O_1 >^{(R)} = S_1$$
$$< O_2 >^{(R)} = S_2$$

Sostituendo, si ottiene un sistema di due equazioni nelle incognite Z_{ij}:

$$\begin{cases} Z_{11}S_1 + Z_{12}S_2 = S_1 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2} - 3\frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}S_2 \\ Z_{21}S_1 + Z_{22}S_2 = S_2 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}S_2 - 3\frac{\alpha_s}{4\pi} ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}S_1 \end{cases}$$

La soluzione fornisce per la matrice di rinormalizzazione la forma seguente:

$$\hat{Z} = \hat{I} + \frac{\alpha_s}{4\pi} ln \frac{\Lambda^2}{-p^2} \begin{pmatrix} \frac{3}{N} & -3 \\ -3 & \frac{3}{N} \end{pmatrix}$$

3.3.1 Diagonalizzazione della matrice

Si puó notare che in generale i due operatori originari O_1 e O_2 si mescolano a causa delle interazioni forti, ovvero la funzione di Green dell'uno contiene un termine proporzionale all'altro.

É possibile tuttavia diagonalizzare la matrice di rinormalizzazione con il seguente cambiamento di base:

$$O_{\pm} = \frac{O_2 \pm O_1}{2}$$

Ora la costante di rinormalizzazione diviene un numero:

$$O_{\pm}^{(0)} = Z_{\pm} O_{\pm}^{(R)}$$

dove

$$Z_{\pm} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} ln \frac{\Lambda^2}{-p^2} (\mp 3 \frac{N \mp 1}{N})$$