Calcolo della sezione d'urto per il processo $q + \bar{q} \to Q + \bar{Q}$

Schedar Marchetti
Matteo Salvatori
Ruggero Altair Tacchi

19 - 7 - 2002

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Il modello standard é una teoria di gauge che si costruisce sulla base del gruppo $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$; la prima simmetria, detta di colore, é il termine che descrive le interazioni forti che avvengono tra quarks, mediante lo scambio dei bosoni generati dalla richiesta di invarianza della teoria sotto trasformazioni locali.
La Lagrangiana corrispondente ha la forma seguente:

$$L_{QCD} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{f} \bar{q}_j (i \not{D} - m_f) q_f$$

La derivata covariante $\not{D}$ contiene nella sua pancia gli otto campi di gauge, e dunque descrive le interazioni che avvengono tra i quarks e i bosoni della teoria, detti gluoni. L'indice f indica il sapore del quark; dunque le interazioni forti sono diagonali nel sapore, nel senso che non esistono vertici che cambiano il tipo di fermione. Esiste inoltre un altro indice, che non é stato riportato, che riguarda uno dei tre colori in cui un quarks puo esistere; su di esso agisce una delle 8 matrici t^a di Gell-Mann; i gluoni si accoppiano a tutte le particelle colorate, ma , portando carica di colore essi stessi, possono esistere anche vertici a tre o quattro gluoni, differentemente dal caso della Q.E.D. in cui i fotoni non hanno carica elettrica.

Capitolo 2

Calcolo del processo a livello albero

2.1 Regole di Feynman utilizzate

Per potere ricavare le regole di Feynman della Q.C.D. occorre fissare preventivamente la gauge in cui si lavora; naturalmente la procedura di quantizzazione deve garantire che i risultati ottenibili per le osservabili, come ad esempio per una sezione d'urto, siano indipendenti dalla gauge scelta.

Se si sceglie la gauge covariante $\delta^\mu G_\mu^A = 0$ allora le formule per i propagatori fermionico e gluonico, e per il vertice fermionico, sono:

Quark

$$\frac{i}{\not{p} - m_q + i\epsilon}$$

Gluone

$$\frac{i}{q^2 + i\epsilon}[-g^{\mu\nu} + (1-\lambda)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2 + i\epsilon}]\delta^{AB}$$

Vertice fermione - gluone

$$-ig\gamma^\mu t^A$$

Il propagatore gluonico é in realtá una funzione di λ , parametro che si introduce nella procedura di gauge-fixing, ma da cui non possono dipendere le osservabili, mentre puó essere presente nei passaggi intermedi. Per semplicitá fissiamo $\lambda = 1$, ovvero ci poniamo nella gauge di Feynman.

2.2 Determinazione dell'ampiezza

Il processo da analizzare é la diffusione di una coppia quark-antiquark in una analoga coppia di differente sapore. Se siamo nell'ipotesi che la massa delle particelle finali sia molto maggiore di quella dei fermioni interagenti, é possibile effettuare il calcolo assegnando massa nulla alla coppia $q\bar{q}$, e una massa m a $Q\bar{Q}$.A livello albero la conservazione dell'impulso-energia nei due vertici quark-gluone fissa completamente i quadrivettori delle particelle nel diagramma:

q entrante $\Rightarrow u_{R1}(P_{1a})$

$\bar{q}$ entrante $\Rightarrow \bar{v}_{R2}(P_{2b})$

Q uscente $\Rightarrow \bar{u}_{S1}(K_{1c})$

$\bar{Q}$ uscente $\Rightarrow v_{S2}(K_{2d})$

R ed S sono indici che specificano la polarizzazione del quark, mentre a,b,c,d determinano il colore dei medesimi.

Il gluone che si propaga ha un quadrimpulso $q = P_a + P_b$.
Per prima cosa é necessario scrivere l'ampiezza dell'unico diagramma, usando le regole di Feynman per la teoria delle perturbazioni per ottenere il risultato direttamente nello spazio degli impulsi:

$$\mathrm{A} = < q\bar{q}|S^{(2)}|Q\bar{Q} > = \sum_{A,B=1}^{8} \bar{u}_{S1}(K_c)(-igt^B_{cd}\gamma^\nu)v_{S2}(K_d)(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2})\delta^{AB}\cdot$$
$$\cdot\bar{v}_{R2}(P_b)(-igt^A_{ba}\gamma^\mu)u_{R1}(P_a) =$$

$$= \frac{ig^2}{q^2}\sum_{A=1}^{8} t^A_{cd}t^A_{ba}[\bar{u}_{S1}(K_c)\gamma^\mu v_{S2}(K_d)][\bar{v}_{R2}(P_b)\gamma_\mu u_{R1}(P_a)]$$

$$A^* = -\frac{ig^2}{q^2}\sum_{B=1}^{8} t^B_{dc}t^B_{ab}[\bar{v}_{S2}(K_d)\gamma^\nu u_{S1}(K_c)][\bar{u}_{R1}(P_a)\gamma_\nu v_{R2}(P_b)]$$

$$\chi = \frac{1}{4}\sum_{R1,R2,S1,S2=1}^{2} \frac{1}{9}\sum_{a,b,c,d=1}^{3} |A|^2 =$$

$= \frac{g^4}{36(q^2)^2} \sum_{R1,R2,S1,S2=1}^{2} \sum_{A,B=1}^{8} t^A_{cd} t^B_{dc} t^A_{ba} t^B_{ab} [\bar{u}_{S1}(K_c)\gamma^\mu v_{S2}(K_d)] \cdot$
$\cdot [\bar{v}_{S2}(K_d)\gamma^\nu u_{s1}(K_c)][\bar{v}_{R2}(P_b)\gamma_\mu u_{R1}(P_a)][\bar{u}_{R1}(P_a)\gamma_\nu v_{R2}(P_b)] =$

$= \frac{g^4}{36(q^2)^2} \{\sum_{S1,S2=1}^{2} [\bar{u}_{S1}(K_1)\gamma^\mu v_{S2}(K_2)][\bar{v}_{S2}(K_2)\gamma^\nu u_{S1}(K_1)] \cdot$
$\cdot [\bar{v}_{R2}(P_2)\gamma_\mu u_{R1}(P_1)][\bar{u}_{R1}(P_1)\gamma_\nu v_{R2}(P_2)] \sum_{A,B=1}^{8} \sum_{a,b,c,d=1}^{3} t^A_{cd} t^B_{dc} t^A_{ba} t^B_{ab} =$

$= \frac{g^4}{36(q^2)^2} [tr(\not{K}_1 + m)\gamma^\mu(\not{K}_2 - m)\gamma^\nu][tr \; \not{P}_2 \gamma_\mu \; \not{P}_1 \gamma_\nu] \sum_{A,B=1}^{8} \frac{1}{4}\delta^{AB} =$

$= \frac{8g^4}{9(q^2)^2} [K_1^\mu K_2^\nu + K_1^\nu K_2^\mu - K_1 \cdot K_2 g^{\mu\nu} - m^2 g^{\mu\nu}][P_{2\mu} P_{1\nu} + P_{2\nu} P_{1\mu} - P_1 \cdot$
$P_2 g_{\mu\nu}] =$

$= \frac{16g^4}{9(q^2)^2} [K_1 \cdot P_2 K_2 \cdot P_1 + K_1 \cdot P_1 K_2 \cdot P_2 + m^2 P_1 \cdot P_2]$

2.3 Sezione d'urto nel sistema del C.M.

La sezione d'urto é definita come il rapporto tra la probabilitá di transizione per unitá di tempo e il flusso delle particelle iniziali; per ottenere quella differenziale é sufficiente moltiplicare per la densitá degli stati finali:

$d\sigma = \frac{1}{4 v_{rel} E_1 E_2} \chi d\Omega_2$

χ é l'ampiezza del processo calcolata precedentemente, E_1 ed E_2 le energie dei quarks iniziali, v_{rel} la velocitá relativa tra di essi,e $d\Omega_2$ lo spazio delle fasi per un processo a due corpi finali, definito da:

$d\Omega_2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1 + P_2 - K_1 - K_2) \frac{d^3 K_1}{(2\pi)^3 2E_1'} \frac{d^3 K_2}{(2\pi)^3 2E_2'}$

Questa formula é valida in ogni sistema di riferimento; tuttavia nel caso di un processo di urto tra due particelle é particolarmente vantaggioso mettersi nel sistema di riferimento del centro di massa, dove la sezione d'urto ha la forma seguente:

$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{64\pi^2 (E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{K}_1|}{|\vec{P}_1|} \chi$

Per giungere a questa espressione basta sostituire l'espressione della velocitá relativa nel C.M. e usare la delta quadridimensionale per integrare su uno degli impulsi finali, in questo caso $\vec{P}_2$.
Ora, per calcolare esplicitamente la sezione d'urto, occorre fissare le coordinate degli impulsi in gioco nel C.M.:

$q = P_1 + P_2 = (\sqrt{s}, \vec{0})$

$s = (P_1 + P_2)^2 = q^2$

$P_1 = (\frac{\sqrt{s}}{2}, \frac{\sqrt{s}}{2}, 0)$

$P_2 = (\frac{\sqrt{s}}{2}, -\frac{\sqrt{s}}{2}, 0)$

$K_1 = (\sqrt{\vec{K}_1 + m^2}, \vec{K}_1)$

$K_2 = (\sqrt{\vec{K}_1 + m^2}, -\vec{K}_1)$

$P_1 \cdot P_2 = \frac{s}{2}$

$K_1 + K_2 = (\sqrt{s}, \vec{0}) \Rightarrow |\vec{K}_1|^2 = \frac{s}{4} - m^2$

$K_1 \cdot P_1 = K_2 \cdot P_2 = \frac{s}{4} - \frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{(\frac{s}{4} - m^2)} cos\theta$

$K_1 \cdot P_2 = K_2 \cdot P_1 = \frac{s}{4} + \frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{(\frac{s}{4} - m^2)} cos\theta$

In queste formule θ é l'angolo formato da $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$.

Sostituendo questi risultati nell'espressione di χ si ottiene:

$\chi = \frac{16g^4}{9s^2}[\frac{s^2}{8} + (\frac{s^2}{8} - \frac{s}{2}m^2)cos^2\theta + \frac{m^2}{2}s]$

Ora si puó finalmente esprimere la sezione d'urto del processo in funzione dei due parametri che lo caratterizzano completamente, ovvero l'angolo di diffusione, θ, e l' energia disponibile nel C.M., $\sqrt{s}$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}\frac{\sqrt{\frac{s}{4} - m^2}}{\frac{\sqrt{s}}{2}}\frac{16}{9}\frac{g^4}{s^2}[\frac{s^2}{8} + (\frac{s^2}{8} - \frac{s}{2}m^2)cos^2\theta + \frac{m^2}{2}s] =$$
$$= \frac{g^4}{144\pi^2}\frac{1}{s}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{s}}[1 + \frac{4m^2}{s} + (1 - \frac{4m^2}{s})cos^2\theta] =$$
$$= \frac{\alpha_s^2}{9}\frac{1}{s}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{s}}[1 + \frac{4m^2}{s} + (1 - \frac{4m^2}{s})cos^2\theta]$$

Per ottenere la sezione d'urto totale occorre integrare sull'angolo solido:

$$\sigma_{TOT} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9}\frac{1}{s}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{s}}[1 + \frac{4m^2}{s} + \frac{1}{3}(1 - \frac{4m^2}{s})]$$

Nel limite ultrarelativistico in cui $\sqrt{s} \gg m$, le formule precedenti si riducono a:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha_s^2}{18}\frac{1}{s}(1 + cos^2\theta)$$

$$\sigma_{TOT} = \frac{8\pi\alpha_s^2}{27}\frac{1}{s}$$

Capitolo 3

Osservazioni conclusive

É possibile fare alcune considerazioni che sono utili per verificare se il risultato ottenuto é plausibile, ovvero se soddisfa alcune proprietá deducibili da osservazioni di carattere generale.

In primo luogo é utile procedere con l'analisi dimensionale; la sezione d'urto ha le dimensioni di un area, $[\sigma] = [L^2] = [E^{-2}]$ nelle unitá in cui $\hbar = c = 1$. La costante delle interazioni forti $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ é un numero puro; dunque ci si puó aspettare che nel limite relativistico estremo, in cui le masse dei quarks possono essere trascurate, l'unico parametro dimensionale che caratterizza i processo sia l'energia disponibile nel centro di massa $\sqrt{s}$, e quindi $\sigma \propto \frac{1}{s}$.

Si puó notare anche che, essendo un urto della forma $a+b \longrightarrow c+d$, la conservazione dell'impulso vincola il processo a svolgersi su un piano, con un evidente simmetria per rotazioni intorno ad un suo asse; per questo motivo é sufficiente il solo angolo θ per descrivere completamente la cinematica dell'urto.

Infine, è da sottolineare che questo processo si dice a soglia; ovvero può realmente avvenire solo se l'energia presente nel C.M. é maggiore della minima massa invariante della coppia di particelle uscenti. Infatti, la formula trovata ha senso solo se $s > 4m^2$.

Le formule ricavate soddisfano questi requisiti di base, essendo funzioni degli unici due parametri rilevanti, $\sqrt{s}$ e θ; il risultato puó ritenersi corretto, a meno di errori sulla determinazione del fattore numerico costante.

Appendice A

Proprietá delle matrici γ e di colore

$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$

$(\gamma^5)^2 = 1$

$tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

$tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma) = 0$

$tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho) = 4(g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$

$tr(\gamma^5) = tr(\gamma^5\gamma^\mu) = tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma) = 0$

$tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho) = -4i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$

$tr(t^A) = 0$

$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$