# Invarianza di gauge

Nicola Cabibbo

15 Gennaio 2000

Questi fogli integrano la trattazione della invarianza di gauge non abeliana riportata in Mandl e Shaw al paragrafi da 12.3 a 12.6. Procediamo in modo molto generale, partendo da una trasformazione di gauge:

$$\Psi(x) -> \Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \tag{1}$$

Dove $\Psi(x)$ rappresenta un insieme di campi (ad esempio un doppietto di campi $L$ e i corrispondenti campi $R$), e $U(x)$ una matrice unitaria di trasformazione che appartiene ad un gruppo di trasformazioni $G$. Useremo anche la seguente forma per le trasformazioni infinitesime:

$$U(x) = 1 + ig\omega_j(x)X_j \tag{2}$$

dove $X_j$ sono i generatori delle trasformazioni infinitesime di $G$ e $\omega_j$ sono parametri infinitesimi. E' sottintesa, come anche nel seguito, una somma sugli indici $j$ ripetuti. In forma più compatta possiamo scrivere

$$\omega(x) = \sum_j \omega_j(x)X_j\ , \quad \text{cioè:}$$

$$U(x) = 1 + ig\omega(x) \tag{3}$$

La costante $g$ ha, come vedremo, il ruolo di costante di accoppiamento. Se il gruppo $G$ è prodotto diretto di gruppi diversi avremo costanti d'accoppiamento distinte per ciascuna componente: ad esempio nel modello standard, $g$ per la componente SU(2) e $g'$ per quella $U(1)$. Nel seguito di questo paragrafo usiamo per semplicità una costante d'accoppiamento unica. Le modifiche da apportare nel caso più generale sono molto semplici. Nel caso del modello standard abbiamo quattro generatori:

$$X_j = \tau_j/2 \qquad (j = 1, 2, 3)$$
$$X_4 = Y \quad \text{l'ipercarica, che commuta con gli altri tre}$$

Nel caso della elettrodinamica la trasformazione si riduce ad un fattore di fase, cui corrisponde la trasformazione infinitesima:

$$U = 1 - ie\alpha(x) \quad \text{un solo parametro, con X} = 1 \tag{4}$$

la trattazione che segue è generale, e si applica ad ambedue i casi.

Ricordiamo, prima di procedere, che i generatori $X_j$ hanno precise regole di commutazione:

$$[X_i, X_j] = ic_{ijk}X_k \tag{5}$$

Le $c_{ijk}$ sono dette le costanti di struttura del gruppo di simmetra; esse sono chiaramente antisimmetriche nello scambio dei primi due indici. Nel caso del gruppo SU(2) le regole di commutazione sono le stesse del momento angolare, quindi $c_{ijk} = \epsilon_{ijk}$. Infine ricordiamo che se un gruppo è *abeliano* (gli elementi del gruppo commutano tra loro), anche i generatori commutano, e le costanti di struttura sono identicamente nulle.

## La derivata covariante e l'operatore di trasporto.

La derivata ordinaria si può definire a partire dal differenziale dei campi:

$$d\Psi(x) = \Psi(x + dx) - \Psi(x) = dx^\mu \partial_\mu \Psi(x)$$

Il differenziale ordinario, e quindi la derivata ordinaria, non si trasforma bene sotto (1), dato che i campi in $x$ e $x + dx$ si trasformano in modo differente. In altre parole, se non facciamo qualcosa di diverso, la (1) ci dice che i campi in due punti diversi non sono paragonabili tra loro, perchè si trasformano in modo differente. E' come voler sottrarre un'area da una lunghezza, due quantità che si trasformano in modo differente sotto trasformazioni dell'unità di misura. In una teoria di gauge la paragonabilità tra campi in punti diversi è reastaurata dall'esistenza di un operatore $T(x, y)$, un elemento del gruppo di simmetria $G$ funzione di una coppia ordinata di punti $(x, y)$:

$$T(x, y) \in G$$

che, applicato al campo $\Psi(y)$ produce un campo che si trasforma come il campo $\Psi(x)$:

$$T(x, y)\Psi(y) \to T'(x, y)\Psi'(y) = U(x)T(x, y)\Psi(y)$$

Paragonando con la (1) si vede subito che la legge di trasformazione delle $T$ deve essere:

$$T(x, y) \to T'(x, y) = U(x)T(x, y)U^\dagger(y) \tag{6}$$

Usando l'operatore di trasporto $T$ possiamo definire un differenziale e una derivata covariante:

$$D\Psi(x) = T(x, x+dx)\Psi(x+dx) - \Psi(x) = dx^\mu D_\mu \Psi(x) \tag{7}$$

Si vede facilmente che la derivata covariante $D_\mu\Psi(x)$ si trasforma come $\Psi(x)$:

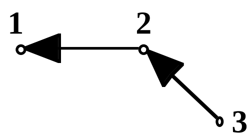
$$D_\mu\Psi(x) \to U(x) D_\mu \Psi(x)$$

e può essere utilizzata per costruire una densità di lagrangiano che sia invariante sotto trasformazioni di gauge (1),(6):

$$\mathcal{L}_\Psi = \bar{\Psi}\, \not{D} \Psi$$

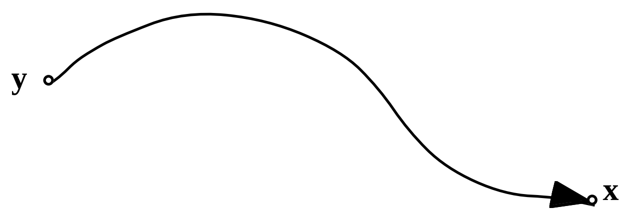
## Operatori di trasporto e bosoni vettoriali.

Una proprietà importande delle $T$ è che una sequenza di trasporti successivi dal punto 3 a 2, da 2 a 1, e così via si comporta come un trasporto dal punto iniziale al punto finale:




$$T = T(1,2)T(2,3) \to T' = U(1)TU^\dagger(3)$$

Quindi $T$ si trasforma come $T(1,3)$. Quindi $T(x,y)$ può essere considerato come funzione di un cammino che porta da $y$ a $x$:




e costruito come sequenza di trasporti infinitesimi. Per costruire qualunque $T$, basta quindi la forma relativa a spostamenti infinitesimi $dx$. Abbiamo definito $T$ come elemento del gruppo $G$, ed imponiamo anche la condizione che $T$ sia una funzione continua e derivabile dei suoi argomenti; ad uno spostamento infinitesimo corrisponderà un elemento infinitesimo di $G$. Possiamo quindi scrivere — vedi eq. (2):

$$T(x, x+dx) = 1 + ig\,dx^\mu W_\mu^j(x) X_j \tag{8}$$

Paragonando con la (2) vediamo che i parametri infinitesimi $\omega_j$ sono combinazioni lineari delle componenti $dx_\mu$ con coefficienti $W_\mu^j(x)$.

Questi coefficienti non possono naturalmente essere funzioni della posizione assegnate una volta per tutte, perchè questo violerebbe la omogeneità dello spazio e l'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz; essi devono essere variabili dinamiche, cioè campi vettoriali, in numero pari a quello dei generatori delle trasformazioni infinitesime di $G$. Dalle (7),(8) posso calcolare esplicitamente la derivata covariante:

$$D_\mu \Psi(x) = (\partial_\mu + igW^j_\mu(x)X_j)\Psi(x) \tag{9}$$

Da confrontare con le espressioni riportate nel Mandl (eq. 12.34, 12.38, 12.40).

In elettrodinamica quanto abbiamo fatto sinora si riduce alle formule note:

$$T(x, x+dx) = 1 - iedx^\mu A_\mu(x); \tag{10}$$

$$D_\mu \Psi(x) = (\partial_\mu - ieA_\mu(x))\Psi(x) \tag{11}$$

## Trasformazione di gauge dei bosoni vettoriali

Si ricava direttamente dalle eq. (6), (8); conviene però introdurre una notazione compatta:

$$\mathbf{W}_\mu = \sum_j W^j_\mu(x)X_j \tag{12}$$

e quindi la (8) e la (9) divengono:

$$T(x, x+dx) = 1 + igdx^\mu \mathbf{W}_\mu(x) \tag{13}$$

$$D_\mu \Psi(x) = (\partial_\mu + ig\mathbf{W}_\mu(x))\Psi(x) \tag{14}$$

Nel caso dell'elettrodinamica abbiamo un solo generatore (rappresentato dal numero 1), quindi la notazione compatta coincide con quella usuale.

Dalla (6), ponendo

$$U^\dagger(x+dx) = U^\dagger(x) + dx^\mu \partial_\mu U^\dagger(x)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} 1 + igdx^\mu \mathbf{W}_\mu(x) &\to U(x)(1 + igdx^\mu \mathbf{W}_\mu(x))U^\dagger(x+dx) \\ &= U(x)(1 + igdx^\mu \mathbf{W}_\mu(x))(U^\dagger(x) + dx^\mu \partial_\mu U^\dagger(x)) \end{aligned}$$

ed eguagliando i coefficienti di $dx^\mu$,

$$\mathbf{W}_\mu(x) \to U(x)\mathbf{W}_\mu(x)U^\dagger(x) + (U(x)\partial_\mu U^\dagger(x))/ig$$

Per trasformazioni infinitesime (eq. 2, 3) abbiamo, trascurando termini $O(\omega^2)$,

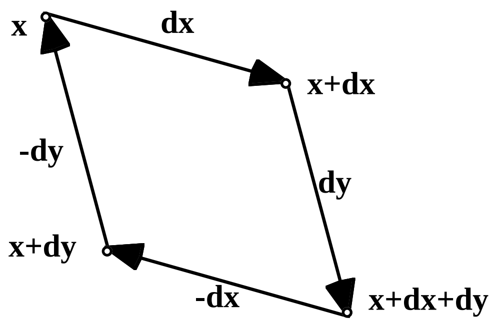
$$\mathbf{W}_\mu(x) \to \mathbf{W}_\mu(x) + i[\omega(x), \mathbf{W}_\mu(x)] - \partial_\mu \omega(x)$$

## Il lagrangiano per i bosoni vettoriali.

Ricordiamo che nel caso dell'elettrodinamica il lagrangiano invariante di gauge si scrive in termini di $F_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L} = (-1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

La spiegazione di questo fatto risale alle proprietà dell'operatore di trasporto $T(x, y)$: Infatti l'operatore $T$ relativo ad un circuito chiuso che parte da un punto $x$ e vi ritorna si trasforma in modo semplice. Consideriamo un circuito chiuso generato da due spostamenti infinitesimi $dx$ e $dy$:




Applicando la eq. (6) si vede che:
(15)
$$T = T(x, x{+}dy) T(x{+}dy, x{+}dx{+}dy) T(x{+}dx{+}dy, x{+}dx) T(x{+}dx, x)$$

si trasforma come:

$$T \to U(x) T U^\dagger(x) \tag{16}$$

Se ora utilizziamo la eq. (13) otteniamo

$$\begin{aligned} T = & (1 + ig\mathbf{W}_\nu(x) dy^\nu)(1 + ig\mathbf{W}_\mu(x + dy) dx^\mu) \\ & (1 - ig\mathbf{W}_\nu(x + dx + dy) dy^\nu)(1 - ig\mathbf{W}_\mu(x + dx) dx^\mu) \end{aligned} \tag{17}$$

Se sviluppiamo i campi che appaiono in questa espressione notiamo anzitutto che i termini lineari in $dx$, $dy$ si cancellano esattamente. Possiamo anche trascurare termini in $dx^2$, $dy^2$, dato che nell'espressione (13) abbiamo trascurato termini dello stesso tipo[1]. Otteniamo

[1] Un modo elegante per eliminare termini di ordine $dx^2$, $dy^2$ dallo sviluppo della eq. (16) è di ridefinire $T(x, x + dx)$ come

$$T(x, x + dx) = \exp(igdx^\mu \mathbf{W}_\mu(x + dx/2)),$$

così, a meno di termini con potenze superiori nei differenziali $dx$, $dy$,

$$T = 1 + ig\mathbf{G}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dy^\nu \quad \text{dove} \tag{18}$$

$$\mathbf{G}_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu \mathbf{W}_\mu(x) - \partial_\mu \mathbf{W}_\nu(x) - ig[\mathbf{W}_\mu(x), \mathbf{W}_\nu(x)] \tag{19}$$

Dalla equazione (16) segue allora che, a differenza del campo $\mathbf{W}_\mu$, il campo $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ si comporta in modo semplice sotto trasformazioni di gauge,

$$\mathbf{G}_{\mu\nu}(x) \to U(x)\mathbf{G}_{\mu\nu}(x)U^\dagger(x) \tag{20}$$

A questo punto possiamo scrivere un lagrangiano per i bosoni vettoriali nella forma:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\mathbf{G}_{\mu\nu}(x)\mathbf{G}_{\mu\nu}(x)) \tag{21}$$

Dalla legge di trasformazione delle $\mathbf{G}$, eq. (20), e dalla proprietà ciclica della traccia segue che il Lagrangiano in eq. (21) è invariante sotto trasformazioni di gauge.

Possiamo riscrivere questi risultati in termini delle componenti di $\mathbf{W}$ sostituendo la (12) nella (19),

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = X_j(\partial_\nu W^j_\mu - \partial_\mu W^j_\nu) - igW^m_\mu W^n_\nu[X_m, X_n]$$

e tenendo conto delle regole di commutazione tra i generatori del gruppo, eq. (5), otteniamo

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \sum_j X_j G^j_{\mu\nu} \tag{22}$$

$$G^j_{\mu\nu} = \partial_\nu W^j_\mu - \partial_\mu W^j_\nu + gc_{mnj}W^m_\mu, W^n_\nu \tag{23}$$

Notiamo infine una interessante identità,

$$[D_\nu, D_\mu]\Psi(x) = ig\mathbf{G}_{\mu\nu}(x)\Psi(x) \tag{24}$$

da cui si può arrivare in modo alternativo alla legge di trasformazione (20). Questi risultati si riducono direttamente a quelli noti per la QED, che è basata su un gruppo abeliano $U(1)$

una espressione che sembra anche più "ragionevole" della eq. (13). Lasciamo i dettagli come esercizio.