Matrici di Dirac

Nicola Cabibbo

23 Ottobre 1999

1 La dimensionalità delle matrici di Dirac

Dimostriamo che la dimensionalità N delle matrici di Dirac deve essere un multiplo di 4. Partiamo dalle relazioni di anticommutazione:

$$\{\alpha_i, \alpha_k\} = 0 \ \text{ se } i \neq k \tag{1}$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \tag{2}$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbf{1} \tag{3}$$

Dalla forma dell'hamiltoniano, $H = \vec{\alpha}\vec{P} + \beta m$ è chiaro che α_i, β devono essere hermitiane.

Nelle dimostrazioni che seguono useremo il seguente miniteorema:

Teorema 1 *Se data una matrice hermitiana $N \times N, A$, tale che $A^2 = \mathbf{1}$, esiste una matrice B tale che $\{A, B\} = 0$ e $B^2 = \mathbf{1}$, segue che $\operatorname{Tr} A = 0$ e che N è pari.*

La dimostrazione è molto semplice. $\operatorname{Tr} A = 0$ perchè

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr}(ABB) \begin{cases} = \operatorname{Tr}(BAB) & \text{proprietà ciclica della traccia} \\ = -\operatorname{Tr}(BAB) & A \text{ anticommuta con } B \end{cases}$$

Inoltre gli autovalori di A sono eguali a ± 1. Dato che la somma degli autovalori è zero, esiste un egual numero di autovalori $+1$ e -1, quindi N è pari.

Da questo teorema segue , usando (1), (2), (3), che $\operatorname{Tr}\beta = \operatorname{Tr}\alpha_i = 0$, e che la dimensionalità delle matrici, N, deve essere pari.

Definiamo ora tre matrici Σ_i,

$$\alpha_1\alpha_2 = i\Sigma_3; \quad \alpha_2\alpha_3 = i\Sigma_1; \quad \alpha_3\alpha_1 = i\Sigma_2 \tag{4}$$

Si verifica facilemente che le Σ_i sone hermitiane, e che

$$\{\Sigma_i, \Sigma_k\} = 2\delta_{ik} \tag{5}$$

$$[\Sigma_1, \Sigma_2] = 2i\Sigma_3 \ \text{ e cicliche} \tag{6}$$

$$[\Sigma_1, \alpha_2] = 2i\alpha_3 \ \text{ e cicliche} \tag{7}$$

$$[\Sigma_i, \beta] = 0 \tag{8}$$

Possiamo ora scegliere la seguente forma a blocchi per β,

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Dove ciascun blocco è una matrice $N/2 \times N/2$. Dato che Σ_i commuta con β, eq. (8), le Σ_i sono diagonali a blocchi

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \eta_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \theta_i \end{pmatrix}$$

dove η_i, θ_i sono matrici hermitiane $N/2 \times N/2$. Dalla eq. (5) segue allora che:

$$\{\eta_i, \eta_k\} = \{\theta_i, \theta_k\} = 2\delta_{ik}$$

Quindi possiamo usare ancora una volta il nostro miniteorema, ad esempio ponendo $A = \eta_1, B = \eta_2$, e giungere alla conclusione che $N/2$ è anch'esso pari, quindi N deve essere un multiplo di 4. Che $N = 4$ sia sufficiente si mostra esibendo una soluzione esplicita delle eq. (1), (2), (3), ad esempio quella comunemente usata:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{e quindi dalla eq. (4),} \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_i \end{pmatrix} \tag{10}$$

dove σ_i sono le matrici di Pauli. Risulta allora

$$\gamma^i = \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{11}$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Rimane infine da specificare la forma esplicita del quadrivettore assiale $\gamma^\mu\gamma^5$,

$$\gamma^0\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{13}$$

Gli elementi del vettore assiale possono essere espressi come prodotto di tre γ, ad esempio: $\gamma^0\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Notiamo anche le relazioni

$$\Sigma_i = \alpha_i\gamma^5 = \gamma^5\alpha_i \tag{14}$$

Normalmente si usa il simbolo σ_i per le matrici che abbiamo qui chiamato Σ_i, senza rischio di confusione con le matrici di Pauli a due dimensioni. L'uso di questo simbolo è giustificato dalla eq. (10).

Notiamo infine che, dato che β e $\vec{\alpha}$ sono hermitiane, indipendentemente dalla forma esplicita scelta per le matrici valgono le seguenti relazioni.

$$\gamma^{\mu\dagger} = \beta\gamma^\mu\beta; \quad (\gamma^\mu\gamma^5)^\dagger = \beta\gamma^\mu\gamma^5\beta; \quad \text{etc.}$$

2 L'algebra di Dirac

Consideriamo le sedici matrici Γ_K, definite come:

$$\Gamma_1 = \mathbf{1}; \quad \Gamma_2 \ldots \Gamma_{16} = \{\beta, i\vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\sigma}, i\gamma^0\gamma^5, \vec{\gamma}\gamma^5, \gamma^5\}, \tag{15}$$

Il prodotto di due tra loro è, a meno di un fattore $\pm 1, \pm i$, eguale a una terza. Questo implica che il prodotto tra due combinazioni lineari delle Γ_K è ancora una combinazione lineare,

$$\left(\sum a_K \Gamma_K\right)\left(\sum b_K \Gamma_K\right) = \sum c_K \Gamma_K$$

L'insieme delle combinazioni lineari delle Γ_K forma quindi un'*algebra*.

Tutte le Γ_K hanno, tranne la prima, traccia nulla, per cui possiamo scrivere

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_K) = 4\delta_{K,1} \tag{16}$$

Inoltre

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_K \Gamma_H) = 4\delta_{K,H} \tag{17}$$

Questa equazione deriva dal fatto che ciascuna delle Γ_K ha quadrato pari ad $\mathbf{1}$, mentre il prodotto di due diverse Γ_K è, a meno di un fattore $\pm 1, \pm i$, eguale a una terza diversa da $\mathbf{1}$, ed ha quindi traccia nulla.

Queste proprietà, evidenti data la forma esplicita delle varie matrici, possono essere derivate (i dettagli sono lasciati come esercizio) usando il nostro miniteorema 1 senza far ricorso alla forma esplicita delle varie matrici, ma unicamente a partire dalle loro espressioni in termini di β, α_i e delle regole di anticommutazione, eq. (1)–(3).

Abbiamo quindi il seguente teorema:

Teorema 2 *Le matrici* $\Gamma_K, (K = 1 \dots 16)$ *sono linearmente indipendenti.*

Infatti se una combinazione lineare si annulla,

$$\begin{aligned} X &= \sum c_K \Gamma_K = 0, \quad \text{ho} \\ c_Q &= \mathrm{Tr}(X \Gamma_Q) = 0 \quad (Q = 1 \dots 16) \end{aligned}$$

e quindi tutti i coefficienti sono nulli.

Notiamo infine che 16 è il massimo numero possibile di matrici 4×4 linearmente indipendenti. Quindi le Γ_K sono una base per l'algebra delle matrici 4×4. L'argomento può essere invertito: dato che le $\Gamma_K, (K = 1 \dots 16)$ sono 16 matrici linearmente indipendenti, è chiaro che queste matrici devono necessariamente essere di dimensione almeno pari a 4×4.

3 Gli invarianti bilineari

Sotto trasformazioni di Lorentz $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, un campo (o funzione d'onda) di Dirac si trasforma come[1]

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S\psi(x) \tag{18}$$

dove S è una matrice, funzione della matrice Λ, tale che

$$S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{19}$$

[1] Nel seguito omettiamo di indicare gli indici spinoriali sugli spinori e sulle relative matrici, sottintendendo le normali moltiplicazioni *righe per colonne*.

Abbiamo anche ottenuto una forma esplicita per S e verificata la proprietà

$$\beta S^\dagger \beta = S^{-1}$$

da cui segue che il campo *aggiunto* $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\beta$ si trasforma come

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1} \tag{20}$$

Studiamo ora la trasformazione di una combinazione *bilineare* $(\bar{\psi} O \psi)$, dove O è un'arbitraria matrice 4×4. Dato che possiamo esprimere O come combinazione lineare delle Γ_K, basta considerare i bilineari $(\bar{\psi}\Gamma_K \psi)$, che possiamo raccogliere in cinque gruppi, per ciascuno dei quali indichiamo le leggi di trasformazione:

S	(Scalare)	$(\bar{\psi}\mathbf{1}\psi)$	
V	(Vettore)	$(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$	$\beta, \vec{\gamma}$
T	(Tensore antisimmetrico)	$(\bar{\psi}\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi)$	$\vec{\alpha}, \vec{\sigma}$
A	(vettore Assiale)	$(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)$	
P	(Pseudoscalare)	$(\bar{\psi}\gamma^5\psi)$	

Che S, V siano rispettivamente uno scalare e un vettore segue direttamente dalle equazioni (18), (19) e (20). Notiamo poi che $(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^\nu\psi(x))$ si trasforma come un tensore a 2 indici,

$$\left(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^\nu\psi(x)\right) \to \Lambda^\mu{}_{\mu'}\Lambda^\nu{}_{\nu'}\left(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\psi(x)\right)$$

e che T è la parte antisimmetrica di questo tensore.

Passiamo ora a considerare il caso P. Possiamo scrivere

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\sum_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

dove $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ è il simbolo di Ricci,

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } \mu\nu\rho\sigma \text{ sono permutazione pari/dispari di } 0,1,2,3 \\ 0 & \text{se due indici sono eguali} \end{cases} \tag{21}$$

quindi, sottintendendo la somma di indici ripetuti,

$$S^{-1}\gamma^5 S = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_{\mu'}\Lambda^\nu{}_{\nu'}\Lambda^\rho{}_{\rho'}\Lambda^\sigma{}_{\sigma'}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\rho'}\gamma^{\sigma'} = \det(\Lambda)\,\gamma^5 \tag{22}$$

Questo discende dalla seguente relazione

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_{\mu'}\Lambda^\nu{}_{\nu'}\Lambda^\rho{}_{\rho'}\Lambda^\sigma{}_{\sigma'} = \det(\Lambda)\,\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \tag{23}$$

Se $(\mu', \nu', \rho', \sigma') = (0,1,2,3)$ questa equazione si riduce alla normale definizione del determinante: *"somma dei prodotti di un elemento per riga ed uno per colonna con segno ± secondo che la permutazione delle righe rispetto alle colonne sia pari o dispari"*. Se $(\mu', \nu', \rho', \sigma')$ è una permutazione di $(0,1,2,3)$, si ha il determinante di una matrice ottenuta da Λ con una permutazione delle colonne.

Se infine due degli indici $(\mu', \nu', \rho', \sigma')$ sono eguali si ottiene il determinante di una matrice con due colonne eguali.

Combinando le eq. (22) e (3) troviamo

$$(\bar{\psi}\gamma^5\psi) \to (\bar{\psi}S^{-1}\gamma^5 S\psi) = \det(\Lambda)\,(\bar{\psi}\gamma^5\psi) \tag{24}$$

cioè che la grandezza P è uno pseudoscalare: invariante per trasformazioni di Lorentz proprie (rotazioni, trasformazioni di velocità e loro prodotti), ma cambia segno sotto l'operazione di parità $x^0 \to x^0, \vec{x} \to -\vec{x}$, che corrisponde alla matrice

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il cambiamento di segno di P sotto parità discende direttamente dalla eq. (19): le tre componenti spaziali di γ^μ cambiano segno, quindi anche γ^5 cambia segno. La combinazione A è un vettore assiale; dai risultati precedenti segue infatti che la sua legge di trasformazione è

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) \to (\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu\gamma^5 S\psi) = \det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_{\mu'}(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) \tag{25}$$

Quindi A si trasforma come un normale vettore sotto trasformazioni di Lorentz proprie, ma in modo opposto sotto trasformazione di parità.

La matrice S_P che corrisponde alla operazione di parità Λ_P può essere identificata con β. Infatti $\beta^{-1} = \beta$ e $\beta\vec{\gamma}\beta = -\vec{\gamma}$.

4 Rappresentazione di Majorana

La rappresentazione usuale delle matrici di Dirac, data nella sezione 1, è una tra le tante egualmente accettabili. Possiamo sempre ottenerne una diversa con una trasformazione unitaria,

$$\beta' = U^\dagger \beta U; \quad \vec{\alpha}' = U^\dagger \vec{\alpha} U$$

Se $\beta, \vec{\alpha}$ sono hermitiane ed obbediscono alle regole di anticommutazione, eq. (1)–(3), lo stesso è vero per $\beta', \vec{\alpha}'$. Sono di particolare interesse le rappresentazioni di Majorana[2], in cui le quattro matrici γ^μ sono matrici a componenti immaginarie,

$$(\gamma^\mu)^\star = -\gamma^\mu \quad \text{e} \quad (\gamma^\mu)^T = -\beta\gamma^\mu\beta$$

Nella rappresentazione di Majorana l'equazione di Dirac, $(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)\psi = 0$ è una equazione differenziale a coefficienti reali, come, ad esempio, le equazioni di Maxwell. Possiamo allora imporre la condizione che ψ sia una grandezza reale (nel caso di un campo quantizzato, hermitiana). Questa rappresentazione è particolarmente interessante per mettere in evidenza la simmetria tra particelle ed antiparticelle. Su questo punto vedere la discussione nel capitolo 4 del Mandl e Shaw.

[2] Un esempio di rappresentazione di Majorana si trova nella appendice A del Mandl e Shaw.

5 Matrici di Dirac in numero arbitrario di dimensioni

Per semplicità consideremo il caso di metrica euclidea, con N dimensioni, il problema è quindi di trovare N matrici hermitiane γ^μ tali che:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \delta^{\mu\,\nu}; \quad (\mu, \nu = 1 \dots N) \tag{26}$$

Possiamo limitarci al caso di N dispari. Se infatti $N = 2m$, mi riduco al caso $N = 2m + 1$ definendo

$$\gamma^{2m+1} = (i)^m \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^{2m} \tag{27}$$

e risulta : $(\gamma^{2m+1})^2 = 1$, mentre γ^{2m+1} commuta con le altre γ^μ. Quindi posso limitarmi a studiare il caso $N = 2m + 1$.

Possiamo dimostrare iterativamente che l'insieme di $2m + 1$ matrici γ^μ che obbediscono la Eq. (26) sono necessariamente matrici $(2^m q) \times (2^m q)$, con q un intero positivo. Infatti questo è vero per il caso $m = 0$, nel qual caso ho una singola matrice γ^1 il cui quadrato è $= 1$. questo si può realizzare con matrici $q \times q$, con q arbitrario.

Sia ora $m > 0$, e assumiamo che il teorema sia vero per $m-1$ e dimostriamo che esso è vero per m. Dal teorema 1 segue che le γ^μ hanno traccia nulla, e che ciascuna ha un eguale numero di autovalori pari a $+1$ e -1. Se la dimensionalità delle matrici, necessariamente pari per quanto abbiamo già detto, è $2K$, possiamo diagonalizzare γ^{2m+1} nella forma:

$$\gamma^{2m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{28}$$

dove ogni blocco $\pm\mathbf{1}, \mathbf{0}$ è una matrice $K \times K$.

Concentriamoci ora su γ^{2m}: dato che è Hermitiana e anticommuta con γ^{2m+1}, è necessariamente:

$$\gamma^{2m} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger = \mathbf{M}^\dagger\mathbf{M} = \mathbf{1}$$

Con una trasformazione unitaria che lascia invariante la matrice γ^{2m+1},

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

possiamo ridurre la γ^{2m} alla forma canonica,

$$\gamma^{2m} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{29}$$

La forma delle restanti $\gamma^\mu, (\mu = 1 \dots 2m - 1)$ è ora fissata dalla condizione di anticommutare con γ^{2m} e con γ^{2m+1}, e risulta

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{i}\zeta^\mu \\ -\mathbf{i}\zeta^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \mu = 1 \dots 2m - 1 \tag{30}$$

e dalla Eq. (26) risulta allora che le ζ^μ obbediscono alle regole di commutazione standard. Dato che nel caso di $2m - 1$ matrici il teorema è vero, le ζ^μ sono matrici $(2^{m-1}q) \times (2^{m-1}q)$, e quindi come dovevamo dimostrare, le γ^μ sono matrici $(2^m q) \times (2^m q)$.