

Effetto Compton

Nicola Cabibbo

27 Novembre 2000

In questa nota consideriamo il processo Compton di diffusione di un fotone su un elettrone, $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$. La nota integra la trattazione che si trova in Mandl e Shaw, par. 8.6, e considera due aspetti particolari,

- Il limite non relativistico, cioè quello in cui la energia del fotone è molto minore della energia di riposo dell'elettrone.
- Le condizioni che si possono ricavare dalla invarianza di gauge.

1 Il limite non relativistico

La ampiezza invariante del processo al secondo ordine è la somma di due diagrammi, la cui espressione (Mandl e Shaw, eq. 8.58, 8.59) è

$$(1) \quad \mathcal{M} = -ie^2 \left\{ \frac{1}{2(pk)} (\bar{u}' \not{\epsilon}' (\not{p} + \not{k} + m) \not{\epsilon} u) - \frac{1}{2(pk')} (\bar{u}' \not{\epsilon}' (\not{p} - \not{k}' + m) \not{\epsilon}' u) \right\}$$

dove p, p' sono i quadrimpulsi degli elettroni entrante e uscente, u, u' i corrispondenti spinori, mentre k, k' sono gli impulsi dei fotoni entranti e uscenti e ϵ, ϵ' i corrispondenti vettori di polarizzazione.

Eseguiamo il calcolo nel centro di massa, dove, tenendo conto della conservazione dell'energia e dell'impulso, abbiamo

$$(2) \quad k = (\omega, \vec{k}) \qquad p = (E, -\vec{k})$$

$$(3) \quad k' = (\omega, \vec{k}') \qquad p' = (E, -\vec{k}')$$

e, inoltre

$$(4) \quad |\vec{k}| = |\vec{k}'| = \omega$$

Per ottenere il limite non relativistico della eq. (1), assumiamo che $\omega \ll m$ e sviluppiamo denominatori e numeratori in potenze di ω/m , conservando i termini dominanti. Notiamo che $E = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \approx m + \omega^2/2m$, e che quindi i due denominatori sono approssimativamente eguali a $m\omega$,

$$(5) \quad (pk) = E\omega + \vec{k}^2 \approx m\omega$$

$$(6) \quad (pk') = E\omega + \vec{k} \cdot \vec{k}' \approx m\omega$$

Per quanto riguarda i numeratori, possiamo usare il fatto che nel limite non relativistico (usiamo qui la forma “standard” delle matrici di Dirac) posso scrivere

$$(7) \quad u(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{-\vec{\sigma}\vec{k}}{2m}\phi \end{pmatrix}$$

dove ϕ è uno spinore a due componenti normalizzato, $\phi^\dagger\phi = 1$. Le prime due componenti di u sono “grandi”, cioè $O(1)$, le altre due sono “piccole”, cioè $O(\omega/m)$.

Abbiamo adesso gli strumenti per valutare l’ordine di grandezza di espressioni del tipo $(\bar{u}'Xu)$, come quelle che appaiono nei numeratori della eq. (1), che possiamo scrivere esplicitamente tenendo conto delle relazioni (2)—(4):

$$(8) \quad (\bar{u}'(\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\gamma}) ((E + \omega)\beta + m) (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\gamma})u),$$

$$(9) \quad (\bar{u}'(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\gamma}) ((E - \omega)\beta + m - (\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{\gamma}) (\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\gamma})u)$$

Il prodotto di un numero pari di matrici γ^i , $i = (1, 2, 3)$ è diagonale a blocchi, quindi i suoi elementi di matrice connettono componenti grandi di u a componenti grandi di \bar{u}' , per cui, ad esempio,

$$(\bar{u}'\gamma^i\gamma^j u) = O(1)$$

mentre il prodotto di un numero dispari è anti-diagonale, e connette componenti grandi a componenti piccole (o viceversa), per cui ad esempio,

$$(\bar{u}'\gamma^i\gamma^j\gamma^l u) = O(\omega/m)$$

Possiamo classificare i termini che appaiono nelle (8), (9) in tre classi,

1. I termini che contengono $\omega\beta$ sono proporzionali ad ω ; essi sono quelli dominanti, infatti:
2. I termini che contengono $E\beta + m$ possono esser riscritti con l’aiuto della eq. di Dirac,
$$\dots (E\beta + m) (\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\gamma}) u = \dots (\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\gamma}) (-E\beta + m)u = \dots (\vec{k} \cdot \vec{\gamma}) (-E\beta + m)u$$
Essi sono esplicitamente proporzionali a \vec{k} , quindi ad ω , ma dato che contengono il prodotto di tre γ^i , sono $\propto \omega^2/m$.
3. Nella (9), il termine proporzionale a $(\vec{k} + \vec{k}')$; Anche questo termine contiene tre γ^i , ed è quindi $\propto \omega^2/m$.

Nel limite $\omega \rightarrow 0$ l’ampiezza \mathcal{M} tende quindi ad un valore costante,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\rightarrow -i\frac{e^2}{2m} (\bar{u}'[(\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\gamma})\beta(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\gamma}) + (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\gamma})\beta(\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\gamma})]u) \\ &= -i\frac{e^2}{2m} (u'^\dagger[(\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\alpha})(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\alpha}) + (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\alpha})]u) \\ &= -i\frac{e^2}{m} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}') (u'^\dagger u) \approx -i\frac{e^2}{m} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}') (\phi'^\dagger \phi) \end{aligned}$$

Nella equazione precedente ϕ, ϕ' sono gli spinori a due componenti che descrivono rispettivamente l'elettrone iniziale e l'elettrone finale. Il fatto che l'ampiezza sia proporzionale al prodotto $(\phi'^\dagger \phi)$ indica che in questo limite la direzione dello spin è conservata nell'effetto Compton: l'ampiezza di transizione è massima (prodotto degli spinori eguale ad 1) quando l'elettrone finale ha spin eguale a quello iniziale, ed è nulla quando la direzione dello spin finale è opposta a quella dello spin iniziale.

Possiamo adesso calcolare la sezione d'urto differenziale,

$$(10) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(E + \omega)^2} \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} 4m^2 |\mathcal{M}|^2$$

$$(11) \quad \approx \frac{\alpha^2}{m^2} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}')^2 |(\phi'^\dagger \phi)|^2$$

Per il processo con particelle iniziali non polarizzate, e particelle finali di cui non si misura la polarizzazione, dobbiamo sommare sulle polarizzazioni finali e mediare su quelle iniziali. Per quanto riguarda i fotoni, ricordiamo che, dato l'impulso \vec{k} di un fotone, i due possibili vettori di polarizzazione $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$ ed il versore \hat{k} formano un sistema completo ed ortonormale, per cui

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^i \epsilon_r^j = \delta^{ij} - \hat{k}^i \hat{k}^j$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s} (\vec{\epsilon}_r \cdot \vec{\epsilon}'_s)^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

dove θ è l'angolo di deflessione del fotone, $\cos \theta = (\hat{k} \cdot \hat{k}')$. Per quanto riguarda gli spinori possiamo scegliere una base comune per l'elettrone entrante e uscente, ad esempio

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo:

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s} |(\phi'^\dagger \phi)|^2 = 1$$

In conclusione otteniamo nel limite non relativistico una sezione d'urto differenziale

$$(12) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} (1 + \cos^2 \theta)$$

ed una sezione d'urto totale, sezione d'urto di Thomson,

$$(13) \quad \sigma = \sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}$$

Questo risultato coincide con quello che si ottiene direttamente partendo dalla interazione di una particella non relativistica con il campo elettromagnetico, come mostrato da Mandl e Shaw, cap. I, ma coincide anche con il risultato che si ottiene nella teoria classica dell'elettrone. Questa non è naturalmente una coincidenza, dato che la teoria classica deve descrivere correttamente l'interazione di un elettrone con radiazione elettromagnetica di grande lunghezza d'onda.

Il calcolo classico è elementare. Consideriamo un'onda piana di radiazione e.m. che incide su un elettrone. Se \vec{E} è il valore istantaneo del campo elettrico nella posizione in cui si trova l'elettrone, esso oscilla secondo l'equazione

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}$$

ed irradia una potenza istantanea¹

$$\frac{dW_{out}}{dt} = \frac{2}{3}\alpha|\ddot{\vec{x}}|^2 = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}\vec{E}^2$$

La densità di energia della radiazione incidente è data da

$$\frac{dW_{in}}{dV} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) = \langle \vec{E}^2 \rangle$$

dato che il contributo dei campi \vec{E}, \vec{H} alla densità di energia sono in media eguali. Otteniamo quindi

$$\langle \frac{dW_{out}}{dt} \rangle = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2} \frac{dW_{in}}{dV} = \sigma_{\text{Thomson}} \frac{dW_{in}}{dV}$$

Anche a livello classico σ_{Thomson} si interpreta come “sezione efficace” dell'elettrone, dato che essa determina il rapporto tra l'energia emessa per unità di tempo e il flusso di energia incidente per unità di superficie che coincide (in unità $c = 1$!) con la densità dell'energia incidente. Il significato classico della costante di Thomson risulta più chiaro se la esprimiamo in termini del raggio classico dell'elettrone, $r_0 = \alpha/m$ (sempre ponendo $c = 1$),

$$\sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi}{3}r_0^2$$

¹Ricordiamo che $\alpha = e^2/4\pi$.

2 Invarianza di Gauge

Nella quantizzazione del campo elettromagnetico abbiamo adottato una condizione di gauge

$$(14) \quad \partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

Questa condizione non fissa completamente A^μ , ma lascia aperta la possibilità di eseguire trasformazioni di gauge che non violino la condizione (14),

$$(15) \quad A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$$

$$(16) \quad \partial_\mu (\partial^\mu f(x)) = \square f(x) = 0$$

Questo permette di modificare uno dei vettori di polarizzazione $\epsilon_r(\vec{k})$ che appaiono nell'espressione del campo $A^\mu(x)$,

$$(17) \quad A^\mu(x) = \sum_{\vec{k}, r} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \{a_r(\vec{k})\epsilon_r(\vec{k})e^{-i(kx)} + \text{h.c.}\}$$

Se scegliamo infatti la seguente forma della $f(x)$ nella eq. (15),

$$(18) \quad f(x) = \frac{i}{\sqrt{2\omega_h V}} a_s(\vec{q})e^{-i(qx)} + \text{h.c.}$$

dove s è uno dei due valori dell'indice di polarizzazione ($s = 1, 2$) e $(qq) = 0$, di modo che sia soddisfatta la eq. (16), il campo trasformato può ancora essere espresso nella forma (17), con

$$\begin{aligned} \epsilon_s(\vec{q})^\mu &\rightarrow \epsilon_s(\vec{q})^\mu + q^\mu \\ \epsilon_r(\vec{k})^\mu &\rightarrow \epsilon_r(\vec{k})^\mu \text{ se } \vec{k} \neq \vec{q} \text{ oppure } r \neq s \end{aligned}$$

La trasformazione (18) permette quindi di modificare un singolo vettore di polarizzazione con l'aggiunta di un multiplo dell'impulso. Dato che si tratta di una trasformazione di gauge, le ampiezze dei processi fisici devono restare immutate. In altre parole,

- **Se nella espressione di un elemento di matrice S sostituiamo il vettore di polarizzazione di un fotone (entrante o uscente) con il corrispondente impulso: $\epsilon(k) \rightarrow k$, l'espressione risultante si deve annullare.**

Questa conclusione può essere applicata a ciascun ordine perturbativo, dato che la invarianza di gauge deve essere soddisfatta indipendentemente dal valore della costante di struttura fine, α . Essa non si applica però a ciascun grafico, ma solo alla somma di tutti i grafici di un dato ordine.

Nel caso dell'effetto Compton, ad esempio (eq. (1)), se eseguiamo la sostituzione per il fotone entrante, $\epsilon \rightarrow k$, otteniamo (tenendo presente che $p - k' = p' - k$)

$$(19) \quad \delta\mathcal{M} = -ie^2 \left\{ \frac{(\bar{u}'\not{\epsilon}'(\not{p} + \not{k} + m)\not{k}u)}{2(pk)} - \frac{(\bar{u}'\not{k}(\not{p}' - \not{k} + m)\not{\epsilon}'u)}{2(pk')} \right\}$$

Si verifica facilmente che questa espressione è nulla. Ad esempio il primo numeratore si semplifica con i seguenti passi:

$$\begin{aligned}
& (\dots(\not{p} + \not{k} + m)\not{k}u) \\
&= (\dots(\not{p} + m)\not{k}u) && (\not{k}^2 = (kk) = 0) \\
&= (\dots\not{k}(-\not{p} + m)u) + 2(pk)(\dots u) && (\text{anticommutazione delle } \gamma) \\
&= 2(pk)(\dots u) && (\text{Eq. di Dirac per la } u(p))
\end{aligned}$$

Lo stesso si può fare con il secondo denominatore,

$$(\bar{u}'\not{k}(\not{p}' - \not{k} + m)\dots) = \dots = 2(p'k)(\bar{u}'\dots)$$

per cui infine otteniamo

$$\delta\mathcal{M} = -ie^2\{(\bar{u}'\not{\epsilon}'u) - (\bar{u}'\not{\epsilon}'u)\} = 0$$

Notiamo che il risultato nullo emerge da una cancellazione tra i due grafici. Questo permette di verificare che il segno relativo assegnato ai due grafici nella eq. (1) è quello corretto.