I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

21 Novembre 1996

ESERCIZIO N^o 1

Si consideri un gas perfetto classico di N particelle a temperatura T sottoposte ad un campo esterno di forze. L' energia di singola particella è:

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + b\,r \qquad \text{con} \quad b > 0$$

Le particelle sono vincolate a muoversi all' esterno di una sfera di raggio R e centro nell' origine.

a) Calcolare la funzione di partizione nell' ensemble canonico.

b) Calcolare la pressione esercitata dal gas sulla superficie della sfera anzidetta e discutere il risultato nel limite $T \to 0$.

c) Calcolare l' energia interna del gas.

d) Come si comporta il calore specifico per temperature molto maggiori o molto minori di $b\,r$?

Si ricordi che l' integrale $\int_a^b dx\, x^2\, e^{-x}$ può essere calcolato con l' aiuto della formula:

$$\int_a^b dx\, x^2\, e^{-x} = \frac{d^2}{d\lambda^2}\left(\int_a^b dx\, e^{-\lambda x}\right)_{\lambda=1}$$

ESERCIZIO N^o 2

Sia ϵ_F l' energia di Fermi di un gas perfetto di fermioni in due dimensioni, contenuto in un quadrato di lato L alla temperatura T.

a) Calcolare la densità del gas.

b) Nel limite non degenere (kT grande) calcolare l' energia interna ed il calore specifico C_V.

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

17 Gennaio 1997

ESERCIZIO N^o 1

Un oscillatore armonico lineare di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno stato tale che a) misurando l'osservabile $aa^\dagger$ si trovano solo i valori 1 e 3; b) il valore medio di $a^\dagger a$ è $1/2$ e quello di $aa + a^\dagger a^\dagger$ è zero.

1) Determinare lo stato più generale che obbedisce a queste condizioni.

2) Calcolare in funzione del tempo il valore medio dell'energia potenziale.

3) Se un tale oscillatore si trova ad un dato istante nello stato la cui funzione d'onda è quella dello stato fondamentale di un oscillatore di uguale massa e pulsazione 2ω, qual è la probabilità che misurando l'energia a tale istante si trovi $\frac{1}{2}\hbar\omega$, cioè quella del suo stato fondamentale?

Si ricordi che la funzione d'onda dello stato fondamentale di un oscillatore armonico di massa m e pulsazione ω è:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\,x^2\right)$$

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta all'azione del potenziale:

$$\begin{cases} V(x) = +\infty & , \quad \text{per } |x| \geq L/2 \\ V(x) = 0 & , \quad \text{per } |x| < L/2 \end{cases}$$

All'istante iniziale la funzione d'onda è:

$$\psi(x, t=0) = \sqrt{\frac{2}{L}}\left(\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L}\right) \cdot \theta\left(x + \frac{L}{2}\right)\theta\,(-x)$$

1) Quali, fra i possibili risultati di una misura dell' energia della particella, hanno probabilità non nulla?

2) Determinare le probabilità dei primi tre autovalori dell' Hamiltoniano.

3) Supponendo che il sistema evolva liberamente, determinare la funzione d'onda del sistema ad un tempo $t > 0$ generico.

4) FACOLTATIVO: Esiste un istante di tempo $t > 0$ tale che in quell'istante la particella *non* possa essere trovata nella metà sinistra del segmento, $x < 0$? In caso affermativo, quando questo si verifica per la prima volta?

Si ricordi che gli autovalori e le autofunzioni della buca di potenziale considerata sono:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \qquad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

e:

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) & , \quad \text{per } n \text{ pari} \\ \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) & , \quad \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Definendo inoltre i seguenti integrali:

$$I_{CS}(m,n) = \int d\alpha \, \cos(m\alpha) \, \mathrm{sen}(n\alpha)$$
$$I_{CC}(m,n) = \int d\alpha \, \cos(m\alpha) \cos(n\alpha)$$

si ha, per $m \neq n$:

$$I_{CS}(m,n) = \frac{1}{m^2 - n^2} \left[n \cos(m\alpha) \cos(n\alpha) + m \, \mathrm{sen}(m\alpha) \, \mathrm{sen}(n\alpha) \right]$$

$$I_{CC}(m,n) = \frac{1}{m^2 - n^2} \left[m \cos(n\alpha) \, \mathrm{sen}(m\alpha) - n \cos(m\alpha) \, \mathrm{sen}(n\alpha) \right]$$

PROVA DI ESAME E III ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

6 Febbario 1997

ESERCIZIO N^o 1

Un gas di fermioni di massa m e spin 1/2, in equilibrio alla temperatura $T = 0^o K$, è racchiuso in una scatola di area di base L^2 ed altezza infinita. I fermioni sono soggetti ad un campo di forze esterne diretto lungo l'asse z verso il basso e descritto dal potenziale:

$$V(z) = \alpha \sqrt{z}$$

dove α è una costante. L'origine dell'asse z si assume presa sulla base della scatola.

1) Determinare il numero medio di particelle N in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F del gas.

2) Calcolare il valore medio dell'impulso che può avere un fermione che si trovi ad un'altezza z uguale alla metà di z_{MAX}.

N.B. Vale il seguente integrale: $\int_0^1 dx \, (1 - \sqrt{x})^{3/2} = 8/35$.

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di spin 1/2, momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{S}$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$ parallelo all'asse y. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato nel quale la probabilità di trovare il valore $\hbar/2$ facendo una misura di S_z è 2/3, ed i valori medi di S_x ed S_y sono uguali ed entrambi positivi.

1) Determinare lo stato della particella all'istante $t = 0$ ed il valore medio comune di S_x ed S_y.

2) Determinare in funzione del tempo $t > 0$ il valore massimo e minimo della probabilità di trovare, a seguito di una misura di S_z, il valore $\hbar/2$.

ESERCIZIO N^o 3

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione ed è descritta dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega'^2 (x - x_0)^2$$

1) Determinare in modo esatto lo spettro di autovalori dell'energia ed il valore medio della coordinata in uno stato stazionario.

2) Considerando l'ultimo termine dell'Hamiltoniana come una perturbazione, determinare la correzione ai livelli di energia imperturbati al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Confrontare quindi con la soluzione esatta per lo spettro.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

18 Febbario 1997

ESERCIZIO N° 1

Si consideri un gas di particelle classiche di massa m, non interagenti, vincolate a muoversi in una dimensione. Il gas è immerso in un campo esterno tale che l'energia della singola particella è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + b\,x^{2n}$$

con $b > 0$ ed n intero. Determinare:

1) con quale potenza della temperatura varia lo scarto quadratico medio

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

2) il calore specifico per particella a "volume" costante.

Si tenga presente che il problema può essere anche risolto senza calcolare esplicitamente alcun integrale.

ESERCIZIO N° 2

Si consideri un sistema di spin 1/2 e momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{S}$ la cui evoluzione temporale, in presenza di un campo magnetico $\vec{B}$, è definita dall' Hamiltoniana:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Il sistema si trova inizialmente (al tempo $t = 0$) nell'autostato corrispondente ad $S_x = +\hbar/2$.

Nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq T$ il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z; all'istante $t = T$ il campo $\vec{B}$ viene ruotato lungo la direzione dell'asse y.

Determinare la probabilità che una misura di S_x all'istante $t = 2T$ fornisca il valore $+\hbar/2$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

17 Giugno 1997

ESERCIZIO N° 1

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale, con Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

a) Calcolare, nel caso classico, la funzione di partizione Z dell'ensemble canonico, l'energia media U ed il calore specifico a frequenza costante, $C = \left(\partial U / \partial T\right)_\omega$, verificando il teorema di equipartizione dell'energia.

b) Sapendo che, nel caso quantistico, lo spettro dell'energia è:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e che ad ogni n corrisponde un solo stato, calcolare nuovamente, nel caso quantistico, Z, U e C.

c) In che limite per la temperatura T, l'energia media ed il calore specifico del caso (b) tendono ai limiti classici calcolati in (a)?
Al contrario, in che regione di T si hanno deviazioni dal caso classico?

d) Nella regione di T in cui gli effetti quantistici sono rilevanti, $C_{\text{Quantistico}} < C_{\text{Classico}}$. Sapreste darne una spiegazione intuitiva?

ESERCIZIO N° 2

Un sistema è composto di due particelle identiche di spin 1/2 (fermioni) vincolate a muoversi in una dimensione. Il sistema è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

a) Determinare la funzione d'onda completa (parte orbitale e parte di spin) degli stati corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato, nonchè i relativi autovalori di H, di $\vec{S}^2 = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2$ e di S_z.

b) Calcolare il valore medio dell'operatore $(x_1 - x_2)^2$ su ciascuno degli stati che corrispondono al primo livello eccitato.

c) Se si aggiunge all'Hamiltoniana il termine

$$V = \lambda\, x_1 x_2\, \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

(dove $\vec{\sigma}_{1,2}$ sono le matrici di Pauli delle particelle 1,2) calcolare quali sono le correzioni al primo ordine in λ delle energie degli stati di cui sopra (fondamentale e primo livello eccitato).

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

15 Luglio 1997

ESERCIZIO N° 1

Un sistema è costituito da N rotatori rigidi quantistici ma distinguibili, che hanno per Hamiltoniana $H = L^2/2I$, dove L^2 è il momento angolare ed I è il momento di inerzia.

Il sistema è in equilibrio termico alla temperatura T.

a) Scrivere la funzione di partizione canonica del sistema, tenendo conto di tutti i possibili valori del momento angolare e della corrispondente degenerazione dei livelli.

b) Calcolare l'energia interna del sistema nel limite di T molto grande (si consiglia di usare per lo spettro dei livelli del rotatore l'approssimazione di spettro continuo).

c) Calcolare l'energia interna e la capacità termica del sistema nel limite di T molto piccolo (si consiglia di troncare la somma di partizione lasciando solo i termini significativi).

ESERCIZIO N° 2

Due particelle identiche di spin 1/2 e massa m sono vincolate da barriere di potenziale infinite a muoversi sul segmento $0 < x < L$.

a) Determinare gli autovalori e le autofunzioni corrispondenti ai primi due livelli energetici e discuterne il grado di degenerazione.

b) Supponendo che sul sistema agisca inoltre una perturbazione

$$\delta H = B\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + V\, L\left[\delta\left(x_1 - \frac{L}{2}\right) + \delta\left(x_2 - \frac{L}{2}\right)\right]$$

(dove $\vec{S}_i$ sono gli operatori di spin della i-esima particella e $\delta\,(x)$ è la funzione delta di Dirac), calcolare, al primo ordine nella teoria delle perturbazioni, gli spostamenti dei primi due livelli e discuterne il grado di degenerazione.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
9 Settembre 1997

ESERCIZIO N° 1
Si consideri un gas perfetto costituito da N particelle di massa m vincolate a muoversi all'interno di un paraboloide cilindrico di equazione:

$$z = a\, r^2$$

con (r, z, φ) le usuali coordinate cilindriche. Il paraboloide è limitato superiormente da un coperchio all'altezza h. Le particelle sono inoltre soggette ad una forza di attrazione di tipo armonico tale che l'Hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k\, z^2$$

a) Calcolare la funzione di partizione canonica Z del sistema.

b) Calcolare l'entropia e l'energia interna del gas nel limite in cui l'altezza del paraboloide h tende ad infinito.

c) Discutere se risulta soddisfatto il principio di equipartizione dell'energia e perchè.

ESERCIZIO N° 2
L'Hamiltoniano di un sistema quantistico a due livelli può essere scritto come

$$H = -\frac{\hbar\omega}{2} \left(|0><0| - |1><1| \right)$$

dove $|0>$ ed $|1>$ sono gli autoket, mutuamente ortogonali e normalizzati, corrispondenti agli autovalori $\mp\hbar\omega/2$ rispettivamente.

Si considerino l'operatore lineare $a = |0><1|$ ed il suo hermitiano coniugato $a^\dagger$.

a) Dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$\left\{a, a^\dagger\right\} \equiv a a^\dagger + a^\dagger a = 1 \quad ; \quad a^2 = a^{\dagger 2} = 0$$
$$[H, a] = -\hbar\omega\, a \quad ; \quad \left[H, a^\dagger\right] = +\hbar\omega\, a^\dagger$$

e che l'operatore $N = a^\dagger a$ ha autovalori 0 ed 1 e che i suoi autoket sono

i ket di base. Esprimere infine l'Hamiltoniano in termini di N e dell'identità.

b) Supponendo che il sistema si trovi all'istante iniziale $t = 0$ nell'autostato dell'operatore $A = a + a^\dagger$ corrispondente all'autovalore 1, determinare i valori medi di A ed A^2 e l'indeterminazione $< (\Delta A)^2 >$ in funzione del tempo t. Detto $B = -i\left(a - a^\dagger\right)$ un altro operatore hermitiano, determinare anche $< B >$, $< B^2 >$ e $< (\Delta B)^2 >$ in funzione del tempo t. Verificare la relazione di indeterminazione generalizzata:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |< [A, B] >|$$

dove $\Delta O \equiv \sqrt{< (\Delta O)^2 >}$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

23 Settembre 1997

ESERCIZIO N° 1

Sia data una particella vincolata nel piano (x, y), cioè descritta da una funzione d'onda $\psi(x, y)$, e soggetta ad una forza di richiamo elastica diretta verso l'origine, $F = -m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$, dove m è la massa della particella ed ω una frequenza caratteristica.

a) Scrivere l'equazione di Schrodinger per la particella, e determinarne gli autovalori dell'energia.

b) Si consideri l'operatore $L_z = xp_y - yp_x$. Dimostrare che lo stato fondamentale della particella è un autostato di L_z e determinarne l'autovalore.

ESERCIZIO N° 2

Determinare la funzione d'onda e l'energia nello stato fondamentale di una particella di massa m vincolata a muoversi all'interno di una sfera di raggio R.

Si abbiano ora due particelle identiche non interagenti immerse in questo potenziale; si determini la loro funzione d'onda complessiva quando entrambe le particelle si trovano nello stato fondamentale. Discutere i due casi: a) bosoni di spin 0; b) fermioni di spin 1/2.

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

14 Novembre 1997

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto, composto da N particelle di massa m, è contenuto in un recipiente cilindrico di raggio R ed altezza h. Il sistema è in presenza di un campo esterno costante ed il cilindro ruota attorno al proprio asse, di modo che l'Hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + a\,z - b\,r^2$$

con a e b costanti positive; z indica la quota misurata a partire dalla base del cilindro ed r rappresenta la distanza dall'asse del cilindro.

Con il formalismo dell'ensemble Gran-Canonico determinare:

a) il potenziale chimico μ in funzione del numero di particelle N, della temperatura T e dei parametri del cilindro;

b) l'energia interna per particella;

c) la pressione in direzione radiale, p_r, in funzione di r con $0 \leq r \leq R$.

ESERCIZIO N° 2

Si consideri un gas costituito da N fermioni di spin 1/2, non interagenti, contenuti in un volume V alla temperatura $T = 0^0\,K$. Sia

$$H = \frac{p^2}{2m} + A\,p^4$$

la relazione tra energia ed impulso per le particelle del gas, con $p = |\vec{p}|$ ed $A > 0$. Calcolare:

a) l'energia di Fermi ε_F del gas;

b) il numero di particelle con impulso in modulo minore di $p_F/2$ come funzione del numero di particelle totali N.

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

9 Gennaio 1998

ESERCIZIO N^o 1

Una particella di massa m, vincolata a muoversi in una dimensione, è soggetta al potenziale $V(x)$ definito da:

$$\begin{cases} V(x) = +\infty & \text{per } x < 0 \\ V(x) = -V_0 & \text{per } 0 < x < a \\ V(x) = 0 & \text{per } x > a \end{cases}$$

con V_0 costante positiva.

a) Determinare per quali valori di V_0 esiste un autostato dell'energia con autovalore $E = 0$.

b) Per un tale stato, calcolare la probabilità relativa di osservare la particella nel segmento $0 \leq x \leq a$ ed $a \leq x \leq 2\,a$.

c) Per un generico valore di V_0 di cui al punto a), calcolare il numero di autostati dell'energia corrispondenti a stati legati, ossia con $E < 0$.

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di massa m è sottoposta all'azione del potenziale:

$$\begin{cases} V(x) = +\infty & \text{per } x < 0 \\ V(x) = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

La particella si trova in uno stato tale che una misura dell'energia può fornire come risultato uno dei due autovalori più bassi, con probabilità dell'autovalore più basso pari a 3/5.

Si effettua inoltre una misura del valore medio di $(xp+px)/2$ e si ottiene come risultato il valore zero.

a) Determinare lo stato più generale della particella che soddisfa le condizioni date.

b) Al tempo $t = 0$ si distrugge la parete in modo tale che il potenziale diventa il potenziale dell'oscillatore armonico per ogni x compreso tra $-\infty$ e $+\infty$ e la funzione d'onda resta invariata. Calcolare la probabilità che una misura dell'energia fornisca il valore $E = \hbar\omega/2$.

Si ricorda che le autofunzioni dell'energia per l'oscillatore armonico hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\, H_n(\xi)\; e^{-\xi^2/2} \quad , \quad \xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x$$

dove i primi polinomi di Hermite sono dati da:

$$\begin{aligned} &H_0(\xi) = 1 \\ &H_1(\xi) = 2\xi \\ &H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ &H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi \\ &H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

III ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

30 Gennaio 1998

ESERCIZIO N° 1

Un rotatore quantistico con momento di inerzia I è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{L^2}{2I} + gBL_z$$

dove $\vec{B}$ è il modulo di un campo magnetico diretto lungo l'asse z e $g\vec{L}$ il momento magnetico del rotatore.

All'istante $t = 0$ il rotatore si trova in un autostato di L^2 con autovalore $2\hbar^2$ ed in un autostato di $(L_x + L_z)/\sqrt{2}$ con autovalore $+\hbar$.

a) Determinare lo stato del rotatore al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare il valore medio dell'energia ed il valore medio di L_x in funzione del tempo.

ESERCIZIO N° 2

L'Hamiltoniana di una particella di spin 1/2 sia:

$$H = -g\,\vec{S} \cdot \vec{B}$$

dove $\vec{S}$ è lo spin della particella, $\vec{B}$ un campo magnetico e g una costante positiva.

a) Determinare in funzione di $\vec{S}$ e $\vec{B}$ la forma esplicita dell'operatore $\dot{\vec{S}}$.

b) Assumendo il campo $\vec{B}$ diretto nella direzione dell'asse z, determinare gli autostati di $\dot{S}_y$ ed i corrispondenti autovalori.

c) Se la particella si trova al tempo $t = 0$ nell'autostato di $\dot{S}_y$ corrispondente all'autovalore più basso, determinare lo stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo t generico.

d) Calcolare esplicitamente, in funzione del tempo t, il valore di:

$$\langle\psi(t)|\dot{S}_y|\psi(t)\rangle \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

6 Febbraio 1998

ESERCIZIO N° 1

Si consideri un sistema costituito da N rotatori quantistici distinguibili non interagenti tra loro ed in equilibrio termico alla temperatura T. L'Hamiltoniana di ciascun rotatore sia:

$$H = \frac{A}{\hbar^2}L^2$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare ed A una costante data. Determinare:

a) a quale temperatura la probabilità di trovare un rotatore nel livello fondamentale è uguale a quella di trovarlo in un qualsiasi stato del primo livello eccitato;

b) il comportamento del calore specifico in funzione di T nelle vicinanze dello zero assoluto.

ESERCIZIO N° 2

Sia dato un sistema di due particelle distinguibili di spin 1/2, immerse in un campo magnetico esterno B diretto lungo l'asse z. Sia

$$H = J\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \left(\alpha\,\vec{S}_1 + \beta\,\vec{S}_2\right) \cdot \vec{B}$$

l'Hamiltoniana del sistema, dove J è una costante che definisce l'energia di interazione spin-spin ed α e β indicano rispettivamente i momenti magnetici delle due particelle.

Se la differenza di momento magnetico tra le due particelle è piccola, risulta conveniente riscrivere l'Hamiltoniana nella forma:

$$H = J\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)\left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right) + (\alpha-\beta)\left(\vec{S}_1 - \vec{S}_2\right)\right] \cdot \vec{B}$$

a) Considerando il termine proporzionale alla differenza $(\alpha - \beta)$ dei momenti magnetici come una perturbazione, calcolare le correzioni agli autovalori dell'energia fino al primo ordine non nullo della teoria delle perturbazioni.

b) Risolvendo esplicitamente l'equazione di Schrödinger $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ per il sistema, diagonalizzando la matrice Hamiltoniana, determinare gli autovalori esatti di H. Confrontare quindi il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni.

c) *Facoltativo*: calcolare gli autostati dell'Hamiltoniana al primo ordine della teoria delle perturbazioni e confrontare il risultato con le espressioni esatte.

ESERCIZIO N° 3

L'evoluzione temporale di una particella di spin 1/2 è descritta dall'Hamiltoniana:

$$H = A\,J^2$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è l'operatore di momento angolare totale della particella ed A una costante data.

All'istante $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che una misura di L^2, L_z ed S_z fornisce con certezza i valori $2\hbar^2$, $+\hbar$ e $-\hbar/2$ rispettivamente.

Determinare:

a) i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità;

b) la probabilità in funzione del tempo che una misura della componente z dello spin della particella dia come risultato il valore $+\hbar/2$;

c) il primo istante di tempo in cui il sistema riassume la configurazione iniziale (a meno di un fattore di fase globale).

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

19 Febbraio 1998

ESERCIZIO N° 1

Un sistema è costituito da N particelle distinguibili, non interagenti tra loro, in equilibrio termico alla temperatura T. L'energia di ciascuna particella può assumere tre valori discreti, pari rispettivamente a:

$$E_1 = -\varepsilon \ , \quad E_2 = 0 \ , \quad E_3 = +\varepsilon$$

Il livello di energia E_2 è inoltre doppiamente degenere, mentre i livelli E_1 ed E_3 corrispondono ciascuno ad un singolo stato quantistico.

a) Determinare l'entropia del sistema e discutere il risultato nei limiti di temperatura $T \to 0$ e $T \to +\infty$.

b) Calcolare il calore specifico del sistema nel limite di basse temperature.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa infinita e spin 1/2 è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ costante. Il campo giace nel piano $x-z$ e forma con l'asse z un angolo θ. L'Hamiltoniana del sistema è dunque:

$$H = \mu\, \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = \mu\, B\, (\cos\theta\, \sigma_z + \operatorname{sen}\theta\, \sigma_x)$$

All'istante iniziale $t = 0$, il sistema si trova nell'autostato di σ_z corrispondente all'autovalore $+1$.

a) Utilizzando la teoria delle perturbazioni fino al primo ordine dello sviluppo nell'angolo θ, determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ generico.

b) Risolvendo l'evoluzione temporale del sistema, determinare esattamente lo stato del sistema al tempo t generico e confrontare il risultato con quello ottenuto nella teoria delle perturbazioni.

c) Calcolare qual è, in funzione di θ, il valore minimo che può assumere il valore medio di σ_z al variare del tempo t.

ESERCIZIO N° 3

Due particelle identiche di massa m e spin 1 sono vincolate a muoversi in una dimensione. Il moto del sistema è tale che la distanza relativa tra le due particelle non può risultare maggiore di un certo valore massimo $L/2$. Le particelle, inoltre, interagiscono tra loro mediante un'interazione di tipo spin-spin. Nel centro di massa delle due particelle, dunque, l'Hamiltoniana ha la forma:

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V(x) + \alpha\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

dove μ è la massa ridotta, x la coordinata del moto relativo e:

$$V(x) = \begin{cases} 0 \ , & |x| < L/2 \\ +\infty \ , & |x| > L/2 \end{cases}$$

a) Determinare lo stato fondamentale del sistema, il primo livello eccitato ed i corrispondenti gradi di degenerazione assumendo $3/2 < mL^2\alpha/\pi^2 < 5$.

b) Se sul sistema viene introdotta una perturbazione della forma:

$$H_I = \lambda \left(S_{1z}^2 + S_{2z}^2 \right)$$

calcolare la correzione ai primi due livelli energetici al primo ordine in λ.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

18 Giugno 1998

ESERCIZIO N° 1

La compressibilità isoterma K di un sistema è definita dall'equzione:

$$\frac{1}{K} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

a) Dimostrare che per un gas perfetto di fermioni allo zero assoluto K è proporzionale a $V^{5/3}$.

b) Dimostrare che, invece, K è infinito per un gas di bosoni fortemente degenere ($T < T_0$) e dare un' interpretazione fisica del risultato.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m e spin 1/2 è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ costante e diretto lungo l' asse x. L'Hamiltoniana che descrive la particella è dunque:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + gB\sigma_x$$

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che: i) una misura dell'impulso fornisce con certezza il valore $\vec{p} = \hbar\vec{k}$; ii) una misura di σ_y può produrre come risultato i valori +1 o −1 con probabilità 9/10 ed 1/10 rispettivamente; iii) il valore medio di σ_z è pari a 3/5.

a) Determinare la funzione d'onda della particella all' istante $t = 0$.

b) Determinare i possibili risultati di una misura dell' energia, le relative probabilità ed il valore medio dell' energia.

c) Calcolare il valore medio di σ_z al tempo $t = \pi\hbar/(2gB)$.

ESERCIZIO N° 3

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e frequenza ω. All'istente iniziale $t = 0$ l' oscillatore si trova in un autostato $|\varphi_\lambda\rangle$ dell' operatore a di abbassamento degli indici. Si ha cioè:

$$a|\varphi_\lambda\rangle = \lambda|\varphi_\lambda\rangle$$

dove λ è un numero complesso.

a) Determinare lo stato $|\varphi_\lambda\rangle$ (correttamente normalizzato) come combinazione lineare degli autostati $|n\rangle$ dell' Hamiltoniana.

b) Mostrare che lo stato dell' oscillatore al tempo $t > 0$ generico è ancora autostato dell' operatore a con autovalore $\lambda(t)$ e determinare tale autovalore.

c) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi della posizione, dell' impulso e dell' energia.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Settembre 1998

ESERCIZIO N^o 1

Un gas classico con N particelle di massa m si trova in equilibrio alla temperatura T. Il gas è contenuto in un recipiente cilindrico con asse z, altezza H ed area di base A. Le particelle del gas sono inoltre soggette al potenziale:

$$V(x,y,z) = a \log\left(1 + \frac{z}{b}\right)$$

a) Calcolare l'energia libera.

b) Nel caso in cui $a = mgb$ stabilire se la quota del baricentro z_B è maggiore, minore o uguale di quella che si avrebbe se le particelle fossero invece soggette al potenziale gravitazionale mgz. Si consideri per semplicità il calcolo nel limite $H \to \infty$ con la condizione $mgb > 2\,kT$.

c) Si fornisca un'interpretazione fisica del risultato ottenuto al punto b), discutendone la validità generale anche per valori finiti dell'altezza H del cilindro.

ESERCIZIO N^o 2

Si consideri una particella di spin 1/2 vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera. Siano date le seguenti funzioni d'onda che descrivono lo stato della particella:

$$\psi_1(\theta,\phi,\sigma_z) = \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{10}(\theta,\phi)\,\chi_+ + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta,\phi)\,\chi_-$$
$$\psi_2(\theta,\phi,\sigma_z) = -\frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta,\phi)\,\chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{11}(\theta,\phi)\,\chi_-$$

dove $Y_{lm}(\theta,\phi)$ sono le armoniche sferiche autofunzioni di L^2 ed L_z e $\chi_\pm$ le autofunzioni di S^2 ed S_z.

a) Dimostrare che ψ_1 e ψ_2 sono autofunzioni degli operatori J^2 e J_z, e determinarne i rispettivi autovalori.

b) Determinare negli stati descritti dalle funzioni d'onda ψ_1 e ψ_2 il valor medio di L_z e la probabilità di trovare per L_z il valore $m = 1$.

c) Data la funzione d'onda:

$$\Psi(\theta,\phi,\sigma_z) = Y_{10}(\theta,\phi)\,\chi_+$$

determinare la probabilità di trovare per J^2 il valore $15/4\,\hbar^2$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

23 Settembre 1998

ESERCIZIO N^o 1

Un gas di fotoni all'equilibrio si trova racchiuso in una cavità di volume V_i alla temperatura T_i. Determinare:

a) Il lavoro necessario a variare isotermicamente il volume della cavità fino ad un volume V_f.

b) Il lavoro necessario a variare adiabaticamente il volume della cavità fino ad un volume V_f e la temperatura finale T_f.

c) Il rapporto tra il numero totale di fotoni presenti nel volume V_f nei due casi.

ESERCIZIO N^o 2

Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi in una circonferenza di centro nell'origine e raggio a. L'unica coordinata del sistema è quindi l'angolo φ compreso tra il raggio vettore della particella e l'asse delle x.

L'Hamiltoniana del sistema è:

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2\,ma^2} = -\frac{\hbar^2}{2\,ma^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}$$

a) Determinare autovalori ed autofunzioni di questa Hamiltoniana ed il relativo grado di degenerazione.

b) Si suppone che la particella abbia una carica q e sia sottoposta ad un campo elettrico $\mathcal{E}$ uniforme e parallelo all'asse x. All'Hamiltoniana H si aggiunge quindi la perturbazione

$$V = -q\,\mathcal{E}a\cos\varphi$$

Calcolare, al primo ordine in $\mathcal{E}$, l'energia dello stato fondamentale del sistema.

c) Si supponga nullo il campo elettrico e che all'istante $t = 0$ lo stato sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\varphi) = N\cos^2\varphi$$

dove N è una costante di normalizzazione. Determinare la funzione d'onda all'istante t generico.

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 Novembre 1998

ESERCIZIO

Si consideri un gas perfetto composto da N particelle di massa m e spin 1/2, mantenuto in equilibrio alla temperatura T. Il gas è racchiuso in un cono di altezza l e raggio di base R, avente vertice nell' origine e come asse il semiasse $z > 0$ (il cono è dunque orientato con il vertice diretto verso il basso). Sul gas agisce inoltre la forza peso, così che l' Hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + mgz$$

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In questo caso:

1) Determinare l' energia libera del gas, discutendone in particolare il risultato nel limite di alte temperature $\tau \gg mgl$.

2) Calcolare l' energia interna del gas nei due limiti $\tau \gg mgl$ e $\tau \ll mgl$ rispettivamente.

3) Calcolare il potenziale chimico μ del gas e discutere quale condizione deve soddisfare la densità media $\rho = N/V$ perchè il gas possa essere trattato come un gas di Boltzmann classico.

4) FACOLTATIVO: Mostrare che, come nel caso di una colonna di gas, la densità $\rho(z)$ nel cono decresce esponenzialmente con l' altezza.

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. Assumendo che l' energia di Fermi ε_F soddisfi la condizione $\varepsilon_F < mgl$, determinare:

5) L' energia di Fermi ε_F.

6) L' energia media del gas come funzione del numero di particelle N e dell'energia di Fermi ε_F.

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

11 Gennaio 1999

ESERCIZIO N° 1

L'hamiltoniano di un sistema quantistico a due livelli è descritto dal seguente operatore:

$$H \mid 1\rangle = \mid 1\rangle + e^{i\pi/4} \mid 2\rangle \ , \qquad H \mid 2\rangle = e^{-i\pi/4} \mid 1\rangle$$

dove $\mid 1\rangle$ e $\mid 2\rangle$ sono gli autostati normalizzati di un altro operatore hermitiano $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \mid 1\rangle = \sqrt{2} \mid 1\rangle \ , \qquad \mathcal{A} \mid 2\rangle = -\sqrt{2} \mid 2\rangle$$

All'istante $t = 0$ si esegue una misura dell'osservabile associata all'operatore $\mathcal{A}$ e si trova il valore $-\sqrt{2}$.

a) Immediatamente dopo si esegue una misura di energia. Qual è la probabilità di trovare il sistema nello stato fondamentale?

b) Come cambia questa probabilità eseguendo la misura dopo un intervallo di tempo finito t ?

c) In quali istanti di tempo $t > 0$ (se esistono) il sistema si ritrova nello stesso stato in cui si trovava al tempo $t = 0$?

ESERCIZIO N° 2

Un oscillatore armonico di massa m e frequenza ω si trova, all'istante iniziale $t = 0$, in uno stato che non contiene stati più eccitati del secondo:

$$\mid \psi_0\rangle = \alpha \mid 0\rangle + \beta \mid 1\rangle + \gamma \mid 2\rangle$$

Si sa inoltre che il valore medio dell'energia è $\langle E\rangle = 3/4\ \hbar\omega$ e che il valore medio della posizione, ad un qualunque istante di tempo t successivo, è nullo ed indipendente dal tempo: $\langle x\rangle_t = \langle \psi_t \mid x \mid \psi_t\rangle = 0$.

a) Mostrare che le suddette condizioni non sono sufficienti a determinare univocamente lo stato iniziale $\mid \psi_0\rangle$ e derivare l'espressione più generale risultante per tale stato.

b) Individuare una possibile misura di un'osservabile fisica che consenta di determinare completamente lo stato $\mid \psi_0\rangle$, dimostrandone l'efficacia in tal senso.

c) <u>FACOLTATIVO:</u> l'indipendenza dal tempo del valore medio di x sullo stato $| \psi_t\rangle$ implica:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi_t \mid x \mid \psi_t\rangle \equiv \langle\psi_t \mid \frac{dx}{dt} \mid \psi_t\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\psi_t \mid [H,x] \mid \psi_t\rangle = 0$$

Esprimendo l'operatore dx/dt in termini degli operatori di creazione e distruzione, a ed $a^\dagger$, dimostrare che vale l'equazione del moto:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

dove p è l'operatore impulso, e che il valore medio di tale operatore sullo stato $| \psi_t\rangle$ è effettivamente nullo.

III ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

1 Febbraio 1999

ESERCIZIO

Una particella di massa m e spin zero è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R. La particella è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ costante e diretto lungo l' asse z. L'hamiltoniana che descrive la particella è dunque:

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} - \mu\,\vec{L}\cdot\vec{B}$$

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato del momento angolare orbitale corrispondente ad $l = 1$ e la funzione d'onda ha la forma:

$$\psi(t=0) = A\left(\cos\theta + e^{i\alpha}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)$$

dove A è una costante di normalizzazione ed α una fase da determinare. Si sa inoltre che il valore medio di L_x per la particella al tempo $t = 0$ è nullo.

Calcolare:

a) I possibili valori della fase α.

b) La probabilità, in funzione del tempo t, che una misura di L_x fornisca il valore $L_x = 0$.

Ad un istante di tempo T successivo, il campo magnetico viene ruotato di un angolo infinitesimo attorno all'asse y, in modo tale che l' interazione magnetica della particella risulta della forma:

$$V_B = -\mu\,B'\,(L_z + \varepsilon L_x)$$

c) Considerando il termine proporzionale ad ε come una perturbazione, calcolare le correzioni agli autovalori ed alle autofunzioni dell' hamiltoniana fino al primo ordine non nullo della teoria delle perturbazioni.

d) Calcolare gli autovalori esatti dell' hamiltoniana, confrontando il risultato con quello ottenuto dalla teoria delle perturbazioni.

e) <u>FACOLTATIVO:</u> calcolare le autofunzioni esatte dell' hamiltoniana confrontando il risultato con quello ottenuto dalla teoria delle perturbazioni.

Si ricorda che le autofunzioni del momento angolare orbitale, corrispondenti all' autovalore $l = 1$ sono:

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\,e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

9 Febbraio 1999

ESERCIZIO N° 1

Un gas è composto da N particelle non interagenti di massa m e spin $1/2$. Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura T ed è soggetto all'azione di un campo di forze esterno tale che l'energia potenziale di singola particella è:

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 (r-a)^2 \; \theta(r-a)$$

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In queste condizioni:

a) Determinare il numero medio di particelle che si trovano ad una distanza dall'origine minore di a.

b) Calcolare l'energia interna del gas, mostrando che nei limiti $a \to 0$ ed $a \to \infty$ si ottengono rispettivamente i valori previsti per un gas di oscillatori armonici tridimensionali e per un gas di particelle libere.

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. In questo caso:

c) Determinare l'energia di Fermi del gas e la massima distanza dall'origine, r_M, alla quale si può trovare una particella del gas. (Si assuma $r_M > a$).

Per il calcolo è possibile utilizzare le seguenti formule di integrazione:

$$\int_0^1 ds \, (1-s^2)^{3/2} = \frac{3\pi}{16} \quad , \quad \int_0^1 ds \, s \, (1-s^2)^{3/2} = \frac{1}{5} \quad , \quad \int_0^1 ds \, s^2 \, (1-s^2)^{3/2} = \frac{\pi}{32}$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella può trovarsi in due distinti stati quantistici, $|\,\psi_L\rangle$ e $|\,\psi_R\rangle$, corrispondenti rispettivamente alle energie $E_L = 0$ ed $E_R = M$. L'Hamiltoniana che descrive la particella è dunque:

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

Sulla particella agisce inoltre una piccola perturbazione V, che consente transizioni tra gli stati $|\,\psi_L\rangle$ e $|\,\psi_R\rangle$ con probabilità non nulla. In presenza della perturbazione, l'Hamiltoniana completa che descrive la particella ha la forma:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix}$$

a) Utilizzando la teoria delle perturbazioni, calcolare le correzioni agli autostati ed agli autovalori dell' Hamiltoniana imperturbata H_0, rispettivamente fino al primo ed al secondo ordine dello sviluppo in δ, dove $\delta = m/M$.

b) All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato $|\,\psi_L\rangle$ dell' Hamiltoniana imperturbata. Utilizzando i risultati della teoria delle perturbazioni, determinare in funzione del tempo la probabilità $P_R(t)$ di trovare la particella nello stato $|\,\psi_R\rangle$.

c) Calcolare gli autostati e gli autovettori esatti dell' Hamiltoniana H confrontando i risultati con quelli ottenuti nella teoria delle perturbazioni.

d) FACOLTATIVO: La probabilità $P_R(t)$, determinata al punto *b)* con la teoria delle perturbazioni, risulta essere una funzione oscillante nel tempo:

$$P_R(t) = A \, \mathrm{sen}^2 \varphi(t)$$

È evidente che, per tempi t sufficientemente lunghi, il valore così calcolato della fase $\varphi(t)$ tenderà a discostarsi significativamente dal valore vero. Confrontando il risultato perturbativo con l'espressione esatta di tale probabilità, determinare per quale valore del tempo t la fase $\varphi(t)$ risulta differire di π dalla fase esatta.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

19 Febbraio 1999

ESERCIZIO N° 1

Un solido è costituito da N molecole che possono essere considerate non interagenti e vincolate rigidamente alle loro posizioni di equilibrio. Ciascuna molecola è a sua volta costituita da tre atomi di spin 1/2, le cui posizioni di equilibrio occupano i vertici di un triangolo equilatero. Gli spin degli atomi sono diretti parallelamente all' asse z (con autovalori $\pm\hbar/2$) e gli atomi interagiscono tra loro mediante un' interazione di tipo spin-spin. Trascurando anche l' energia cinetica associata alle vibrazioni atomiche, si può scrivere l' Hamiltoniana di singola molecola nella forma:

$$H = -J\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)$$

dove J è una costante con le dimensioni di energia e σ_k rappresenta la componente z dell' operatore di spin dell' atomo k-esimo, in unità di $\hbar/2$. Il solido è mantenuto in equilibrio alla temperatura T .

a) Determinare i possibili livelli di energia di ciascuna molecola ed il corrispondente grado di degenerazione.

b) Utilizzando i risultati ottenuti al punto a), calcolare la funzione di partizione canonica del solido, l' energia libera e l' entropia.

c) Calcolare i limiti di bassa ed alta temperatura per l' entropia del solido nei due casi: $J > 0$ (interazione ferromagnetica) e $J < 0$ (interazione anti-ferromagnetica), discutendo l' interpretazione fisica dei risultati ottenuti.

d) Assumendo $J > 0$, calcolare il calore specifico del solido nel limite di basse temperature.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m e spin 1/2 è sottoposta all' azione di un campo magnetico costante diretto lungo l' asse z. L' Hamiltoniana che descrive la particella è dunque:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\,m} - gB\,\hbar\,\sigma_z$$

dove $\vec{\sigma}$ rappresenta l' operatore di spin della particella in unità di $\hbar/2$.

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato simultaneo dell' operatore impulso, con autovalore $\vec{p}$, e dell' operatore elicità, definito come

$$h = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}$$

con autovalore massimo.

a) Determinare i possibili autovalori dell' operatore elicità (per un fissato valore dell' impulso $\vec{p}$) ed i corrispondenti autovettori.

b) Calcolare i valori medi delle componenti σ_x, σ_y e σ_z dello spin della particella all' istante $t = 0$. Per quali valori dell' impulso la particella si trova a questo istante in un autostato dell' operatore σ_x?

c) Calcolare in funzione del tempo la probabilità che la particella si trovi in un autostato dell' elicità corrispondente all' autovalore minimo. Per quali valori dell' impulso questa probabilità risulta identicamente nulla? E perchè?

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10 Giugno 1999

ESERCIZIO N° 1

Un gas è costituito da N elettroni non interagenti mantenuti in equilibrio alla temperatura $T = 0$. Il gas è vincolato a muoversi in due dimensioni sulla superficie di un disco circolare di raggio R ed è soggetto ad una forza esterna radiale costante diretta verso il bordo del disco. L'Hamiltoniana di singola particella è pertanto:

$$H = \frac{p^2}{2\,m} - b\,r$$

con b una costante positiva. Calcolare:

a) L'energia di Fermi ε_F del gas.

b) L'energia interna E e l'energia libera F.

c) La pressione radiale esercitata dal gas sul bordo del disco (definita in due dimensioni come la forza esercitata per unità di lunghezza) ed il potenziale chimico μ, verificando che quest'ultimo coincide effettivamente con l'energia di Fermi ε_F.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m è sottoposta all'azione di un campo di forze esterne descritto dal potenziale:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\,\omega^2\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\varepsilon\,x\,y + 2\,\varepsilon\,y\,z\right)$$

dove ε è un parametro adimensionale minore di 1.

a) Utilizzando la teoria delle perturbazioni fino al primo ordine dello sviluppo in ε, determinare la correzione agli autovalori dell'energia corrispondenti allo stato fondamentale ed al primo livello eccitato degenere.

b) Calcolare gli autovalori esatti dei suddetti livelli, confrontando con i risultati ottenuti dalla teoria delle perturbazioni.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Luglio 1999

ESERCIZIO N° 1

Un sistema isolato è costituito da N oscillatori armonici distinguibili, classici, unidimensionali, di massa m e frequenza ω.

a) Utilizzando il formalismo dell'ensemble microcanonico, calcolare l'entropia $S(E)$ del sistema (come funzione dell'energia interna E) e la corrispondente temperatura T.

b) Verificare che allo stesso risultato si giunge calcolando l'entropia $S(E)$ utilizzando il formalismo dell'ensemble canonico.

c) Nel limite di basse temperature, $T \to 0$, l'entropia così calcolata non tende a zero. Sapreste spiegare perchè tale risultato non è in contraddizione con il terzo principio della termodinamica?

Si ricorda che in coordinate polari l'elemento di volume infinitesimo in N dimensioni è $d^N q = d\Omega_N \, q^{N-1} dq$, dove l'angolo solido totale è $\Omega_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$. Può inoltre risultare utile la seguente definizione integrale della funzione beta:

$$B(a,b) = \int_0^1 dx\, x^{a-1}\,(1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita, le cui pareti sono posizionate nei punti di coordinate $x = \pm a$. All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova in uno stato tale che una misura di energia conduce certamente ad un risultato minore di $\hbar^2\pi^2/m\,a^2$. Questo stato è inoltre tale che la probabilità che la particella si trovi nel segmento positivo dell'asse x, ossia nella regione $0 \le x \le a$, è la massima possibile.

a) Determinare la funzione d'onda della particella all'istante iniziale $t = 0$.

b) Determinare per quale valore del tempo successivo t^* lo stato della particella è tale che risulta massima la probabilità di trovare la particella nel segmento negativo dell'asse x, ossia nella regione $-a \le x \le 0$. Quanto vale tale

probabilità?

c) Al tempo $t = t^*$ le pareti della buca vengono allontanate tra loro e posizionate nei punti di coordinate $x = \pm 2\,a$. Lo spostamento è sufficientemente rapido da poter considerare, con buona approssimazione, che lo stato della particella resti immutato. Determinare con quale probabilità una misura dell'energia della particella, a seguito dello spostamento, conduce al valore $E = \hbar^2\pi^2/2\,m\,a^2$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Settembre 1999

ESERCIZIO N^o 1

Un gas è composto da N particelle non interagenti, di massa m e spin 1/2. Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura T ed è soggetto ad un campo di forze centrali, descritte dal potenziale:

$$V(r) = a\,r$$

dove $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ed a è una costante positiva.

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In queste condizioni:

a) Utilizzando il formalismo dell'ensemble gran canonico, determinare il potenziale chimico μ e l'entropia S del gas, come funzioni del numero totale di particelle N e della temperatura T.

b) Calcolare l' energia interna E del gas, verificando che il risultato è in accordo con il teorema di equipartizione generalizzato:

$$\left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = \left\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = kT$$

dove il simbolo $\langle \ldots \rangle$ indica il valore medio e p_i e q_i rappresentano un qualunque impulso e coordinata generalizzata del sistema.

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. In questo caso:

c) Determinare l' energia di Fermi ε_F e la massima distanza dall' origine alla quale si possono ancora trovare particelle del gas.

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di spin 1/2, momento magnetico $\vec{\mu} = g\,\vec{S}$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$. Il campo giace sul piano $x\,z$ e la sua direzione forma con gli assi x e z un angolo di 45°. L'Hamiltoniana che descrive la particella è:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

All'istante iniziale $t = 0$ viene misurata la componte z dello spin della particella e si ottiene come risultato il valore $S_z = \hbar/2$.

a) Determinare, a questo istante, i possibili risultati di una misura dell' energia della particella e le corrispondenti probabilità.

b) Determinare per quale valore del tempo successivo t^* la particella viene a trovarsi nello stesso stato in cui si trovava al tempo iniziale $t = 0$.

c) Si supponga invece di effettuare al tempo $t = t^*/2$ una misura di S_z, ottenendo nuovamente come risultato il valore $\hbar/2$. In questo caso, in quale stato verrà a trovarsi la particella al tempo t^*?

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

24 Settembre 1999

ESERCIZIO N^o 1

Un sistema è costituito da N sottosistemi quantistici, distinguibili, mantenuti in equilibrio alla temperatura T. Ciascun sottosistema può trovarsi in un numero finito L di livelli di energia discreti e non degeneri, della forma:

$$E_l = l\,\varepsilon, \qquad l = 0, 1, \ldots, L-1$$

a) Calcolare l'energia interna E del sistema e discutere, in particolare, il risultato nei limiti di basse ed alte temperature.

b) Calcolare l'entropia S del sistema, discutendo anche in questo caso il valore ottenuto nei limiti di basse ed alte temperature.

Si assuma invece che i sottosistemi siano indistinguibili e che non vi sia alcun vincolo sui possibili valori dei numeri di occupazione di ciascuno stato. In questo caso:

c) Determinare l'energia interna E come funzione della temperatura T e del potenziale chimico μ, e l'equazione che lega μ a T ed al numero totale N di sottosistemi.

Si ricorda il valore della serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di massa m è vincolata a muoversi su di una semi-circonferenza di centro nell'origine e raggio r. La semi-circonferenza è situata nel piano $x\,y$ e le sue estremità sono i punti di coordinate $\varphi = -\pi$ e $\varphi = 0$ dell'angolo polare. L'hamiltoniana che descrive la particella è:

$$H_0 = \frac{p_\varphi^2}{2\,m\,r^2}$$

dove $p_\varphi = -i\,\hbar\,\partial/\partial\varphi$ è il momento coniugato alla varabile angolare φ.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{8}{3\,\pi}}\ \mathrm{sen}^2\varphi$$

a) Determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'hamiltoniana H_0.

b) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia effettuata al tempo $t = 0$. Quale tra questi risultati è il più probabile e quanto vale la corrispondente probabilità?

Ad un certo istante il sistema viene sottoposto all'azione di un campo gravitazionale diretto lungo l'asse y, cosicchè sulla particella agisce il potenziale:

$$V = m\,g\,r\,\mathrm{sen}\varphi$$

c) Utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in V, calcolare la correzione all'autovalore dell'energia corrispondente allo stato fondamentale.

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

11 Novembre 1999

ESERCIZIO

Un gas perfetto è composto da N fermioni, di massa m e spin $1/2$, mantenuti in equilibrio alla temperatura T. Il gas è racchiuso in un contenitore cilindrico, di area di base A, la cui estremità superiore è rappresentata da un pistone di massa M che può scorrere liberamente senza attrito lungo l'asse verticale del cilindro (asse z). Sul gas agisce inoltre la forza peso diretta lungo lo stesso asse, così che l' Hamiltoniana di singola particella per il gas è:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + mgz$$

L'altezza H alla quale viene a trovarsi il pistone in condizioni di equilibrio è determinata dalla condizione di annullamento delle forze agenti su di esso. Queste sono rappresentate dalla forza peso Mg, diretta verso il basso, e dalla forza di pressione esercitata dal gas diretta verso l'alto, $p_H\,A$, dove p_H è la pressione del gas all'altezza H. La condizione di equilibrio è pertanto:

$$p_H\,A = Mg \tag{1}$$

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico e si assuma inoltre di poter trascurare gli effetti dovuti all' agitazione termica del pistone. In questo caso:

a) Determinare il valore dell'altezza H alla quale si posiziona il pistone in condizioni di equilibrio.

b) Determinare il valore della pressione del gas all'altezza $z = 0$, ossia sulla superficie di base del cilindro, mostrando, in particolare, come tale pressione risulti indipendente dalla temperatura T.

c) Calcolare il potenziale chimico μ del gas come funzione della massa M del pistone e discutere quale condizione deve soddisfare questa massa perchè il gas possa essere trattato come un gas di Boltzmann classico.

Si consideri quindi il gas nel limite fortemente degenere di temperatura nulla $T = 0$. La condizione di equilibrio (1) deve risultare ovviamente ancora soddisfatta. In questo caso determinare allora:

d) L' energia di Fermi ε_F del gas ed il valore dell'altezza H alla quale si posiziona il pistone in condizioni di equilibrio.

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

24 Gennaio 2000

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico di massa m e frequenza ω si trova, all'istante iniziale $t = 0$, in uno stato tale che una misura dell'energia fornisce con certezza un risultato $E < 2\,\hbar\omega$ ed il valore medio $\langle E\rangle = 5/6\,\hbar\omega$. Si trova inoltre che una misura del valore medio dell'impulso allo stesso istante fornisce $\langle p\rangle = \sqrt{(4/9)\,m\hbar\omega}$.

a) Determinare lo stato $|\,\psi_t\rangle$ dell'oscillatore al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare i valori medi della posizione $\langle x\rangle_t$ e dell' impulso $\langle p\rangle_t$ come funzioni del tempo t.

c) Verificare che l'evoluzione temporale di questi valori medi soddisfa le equazioni del moto classiche:
$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle_t = \frac{\langle p\rangle_t}{m} \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle_t = -\,\omega^2\,\langle x\rangle_t$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin $1/2$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ costante orientato nella direzione definita dal versore $\widehat{n} = (0, -\mathrm{sen}\,\vartheta, \cos\vartheta)$. All'istante iniziale $t = 0$ viene misurata la componte z dello spin della particella e si ottiene come risultato $S_z = \hbar/2$. L'Hamiltoniana che descrive la particella è:

$$H = \mu\,\vec{S}\cdot\vec{B}$$

a) Calcolare le probabilità che una misura al tempo $t = 0$ della componente S_n dello spin della particella nella direzione del campo magnetico ($S_n = \vec{S}\cdot\widehat{n}$) fornisca i risultati $\pm\,\hbar/2$.

b) Calcolare il valor medio dell'energia della particella al tempo $t = 0$.

c) Per il sistema considerato, l'operatore di evoluzione temporale $U(t) = \exp[-(i/\hbar)\,H\,t]$ coincide anche con l'operatore di rotazione attorno ad un asse fisso nel tempo. Determinare questo asse e l'angolo di rotazione in funzione del tempo t. Calcolare inoltre gli elementi di matrice dell'operatore $U(t)$ nella base degli autostati di S_z e determinare per quale valore del tempo t^* questo operatore coincide, a meno di un fattore di fase, con l'operatore identità.

Si ricorda che le matrici $\vec{\sigma}$ di Pauli soddisfano l'identità

$$\exp(i\,\alpha\,\vec{\sigma}\cdot\widehat{n}) = \cos a + i\,\vec{\sigma}\cdot\widehat{n}\,\mathrm{sen}\,a$$

per ogni versore $\widehat{n}$ arbitrario.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Febbraio 2000

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto è costituito da un insieme di N particelle identiche, dette *parioni*, che soddisfano una statistica particolare: i numeri di occupazione n_i di ciascuno stato di singola particella, corrispondente all'energia ε_i, possono assumere solo valori interi *pari*:

$$n_i = 0, 2, 4, 6, \ldots$$

Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura T all'interno di un volume V ed il moto delle particelle può essere trattato in approssimazione non relativistica. L'energia di singola particella ha pertanto la forma $\varepsilon = p^2/2m$.

a) Calcolare il numero di occupazione medio $\overline{n}_i$ dello stato i-esimo di singola particella e la corrispondente espressione nel limite classico $\overline{n}_i \ll 1$.

b) Mostrare che per il gas di parioni ha luogo il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein. Calcolare quindi il rapporto tra la temperatura di condensazione τ_c^P del gas e la temperatura di condensazione τ_c^B per un gas di bosoni ordinari di uguale massa, densità e degenerazione di spin.

c) Calcolare la relazione tra pressione, volume ed energia del gas, mostrando che si giunge alla stessa espressione valida per un gas di bosoni o fermioni ordinari.

Si ricorda il valore della serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle identiche di massa m e spin $1/2$ sono vincolate a muoversi in una dimensione all'interno di una buca di potenziale infinita di larghezza a. L'hamiltoniana che descrive le due particelle è pertanto:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + V(x_1) + V(x_2)$$

dove l'energia potenziale $V(x)$ di singola particella è:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & se \mid x \mid \leq a/2 \\ \infty, & fuori \end{cases}$$

Le due particelle si trovano in uno stato descritto dalla funzione d'onda $\psi(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) = \varphi(x_1, x_2)\,\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ dove la componente spaziale della funzione d'onda ha la forma:

$$\varphi(x_1, x_2) = A\,\cos\left[\frac{\pi}{a}(x_1 + x_2)\right] + B\,\cos\left[\frac{\pi}{a}(x_1 - x_2)\right]$$

e $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ rappresenta la funzione d'onda di spin.

a) Determinare il valore delle costanti A e B e la funzione d'onda di spin $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$.

b) Mostrare che le due particelle si trovano in un autostato dell'hamiltoniana H e calcolare il corrispondente autovalore dell'energia.

c) Calcolare la probabilità che entrambe le particelle si trovino ad una distanza dall'origine delle coordinate maggiore di $a/4$.

d) *Facoltativo:* Calcolare le autofunzioni dell' hamiltoniana H corrispondenti al primo livello eccitato degenere dell'energia.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

16 Febbraio 2000

ESERCIZIO N° 1

Un sistema è costituito da N particelle identiche, di massa infinita e spin $1/2$, immerse in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. Lo spin delle particelle interagisce con il campo esterno, così che ciascuna particella può trovarsi in due distinti livelli di energia:

$$E = \pm\frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \text{con } \varepsilon = \mu B \hbar$$

corrispondenti rispettivamente ai valori $\mp\hbar/2$ della proiezione dello spin lungo l'asse z. La degenerazione di ciascun livello è inoltre pari a g, con $g \gg N$. Il sistema è mantenuto in equilibrio alla temperatura T.

a) Calcolare la funzione di partizione canonica Z del sistema nei due casi in cui si considerino le particelle come indistinguibili o distinguibili.

Si considerino quindi le particelle come *indistinguibili*. In questo caso:

b) Calcolare l'entropia del sistema e discutere il risultato ottenuto nei limiti rispettivamente di basse ed alte temperature.

c) Mostrare che la magnetizzazione media del sistema, definita come:

$$M = \mu\frac{\hbar}{2}\langle n_\uparrow - n_\downarrow\rangle$$

dove $n_\uparrow$ ed $n_\downarrow$ rappresentano i numeri di occupazione degli stati di spin up e down, è legata all'energia libera F dalla relazione:

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)$$

e calcolare esplicitamente tale quantità.

d) *Facoltativo*: studiare la magnetizzazione nei limiti di basse ed alte temperature, discutendo i risultati ottenuti.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m e spin 0 è vincolata a muoversi sulla superficie di un cilindro di raggio r, altezza infinita ed asse parallelo all'asse z. La particella è soggetta ad una forza di tipo armonico, diretta lungo l'asse z, con centro nell'origine. In coordinate cilindriche ($x = r\cos\varphi$, $y = r\,\mathrm{sen}\varphi$, $z = z$) l'hamiltoniana che descrive la particella ha la forma:

$$H = \frac{p_z^2}{2\,m} + \frac{p_\varphi^2}{2\,mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$$

dove $p_z = -i\hbar\partial/\partial z$ è l'impulso della particella nella direzione z e $p_\varphi = -i\hbar\partial/\partial\varphi = L_z$ rappresenta la componente z del momento angolare orbitale.

La particella si trova in uno stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\Psi(z,\varphi) = A\,z^3 \exp\left(-\frac{m\omega z^2}{2\hbar}\right)\cos^2\varphi$$

dove A è una costante di normalizzazione.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella e della componente L_z del momento angolare orbitale e le rispettive probabilità.

b) Si supponga di sottoporre la particella ad una perturbazione della forma

$$V = \lambda\,\cos 2\varphi$$

dove λ è una costante con le dimensioni di un'energia. Assumendo valida la condizione $m\omega r^2 > \hbar/2$ ed utilizzando i risultati della teoria delle perturbazioni, calcolare le correzioni al primo ordine in λ agli autovalori dell'energia del livello fondamentale e del primo livello eccitato degenere.

c) _Facoltativo_: mostrare che l'operatore $p_\varphi = -i\hbar\partial/\partial\varphi$ coincide effettivamente con la componente L_z del momento angolare orbitale della particella.

Si ricorda che le autofunzioni dell'energia per l'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(z) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\,H_n(\zeta)\,\exp\left(-\zeta^2/2\right) \quad , \quad \zeta = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} z$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{aligned} &H_0(\zeta) = 1\\ &H_1(\zeta) = 2\zeta\\ &H_2(\zeta) = 4\zeta^2 - 2\\ &H_3(\zeta) = 8\zeta^3 - 12\zeta\\ &H_4(\zeta) = 16\zeta^4 - 48\zeta^2 + 12\\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Giugno 2000

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto è composto da un numero N molto grande di fermioni identici, di massa m e spin 1/2, ciascuno dei quali è un oscillatore armonico quantistico di frequenza ω. Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura $T = 0$.

a) Si assuma che ciascuna particella sia vincolata a muoversi in 1 dimensione ($D = 1$). In questo caso, i livelli di energia di singola particella sono della forma:

$$\varepsilon_n = n\,\hbar\omega \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Calcolare l'energia di Fermi ε_F del gas e mostrare che l'energia media del sistema è $E = 1/2\;N\,\varepsilon_F$.

b) Si consideri quindi il gas di oscillatori in dimensione $D = 2$. I livelli di energia di ciascun oscillatore sono:

$$\varepsilon_{n_1,n_2} = (n_1 + n_2)\,\hbar\omega \quad , \quad n_1, n_2 = 0,1,2,\ldots$$

Calcolare nuovamente l'energia di Fermi ε_F e mostrare che in questo caso l'energia media è legata all'energia di Fermi da $E = 2/3\;N\,\varepsilon_F$.

c) Nel caso di dimensione $D = 2$, calcolare l'energia di Fermi ε_F e l'energia media E utilizzando l'approssimazione semi-classica, nella quale la somma discreta sugli stati quantistici è sostituita da un integrale sullo spazio delle fasi di singola particella:

$$\sum_{stati} \to g\int\frac{d^2p\,d^2x}{(2\pi\hbar)^2}$$

mostrando che si giunge agli stessi risultati derivati in precedenza.

Si ricordano i valori delle seguenti serie per le quali, nei calcoli, è possibile conservare solo il termine dominante per M grande:

$$\sum_{n=1}^{M} n = \frac{1}{2}M\;(M+1) \simeq \frac{1}{2}M^2 \quad ; \quad \sum_{n=1}^{M} n^2 = \frac{1}{3}M\;\left(M+\frac{1}{2}\right)\;(M+1) \simeq \frac{1}{3}M^3$$

ESERCIZIO N^o 2

Un fascio di particelle, di massa m e spin 0, è vincolato a muoversi in una dimensione soggetto al potenziale $V(x)$ definito da:

$$\begin{cases} V(x) = +\infty & \text{per } x < 0 \\ V(x) = \dfrac{\hbar^2 \lambda}{2m}\, \delta\,(x - a) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

con λ ed a costanti positive.

a) Determinare (a meno di una costante di normalizzazione assoluta) le autofunzioni dell'energia del sistema e trovare per quali valori dell'energia tali autofunzioni sono le stesse che si avrebbero in assenza della barriera di potenziale a delta.

b) Assumendo che il fascio incidente si muova da destra verso sinistra, proveniente da $x = +\infty$, calcolare la densità di corrente j_i dell'onda incidente sulla barriera di potenziale a delta in $x = a$ e la densità di corrente j_r dell'onda riflessa da tale barriera. Mostrare inoltre che per il coefficiente di riflessione:

$$R = \frac{j_r}{|j_i|}$$

si ottiene il valore $R = 1$. Sapreste dare una spiegazione di tale risultato?

c) Calcolare a quale valore tende la probabilità che una particella si trovi nella regione $0 < x < a$ quando l'energia del fascio tende a zero.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

12 Luglio 2000

ESERCIZIO N^o 1

Un gas perfetto è costituito da N particelle identiche, di spin nullo (bosoni), mantenute in equilibrio termico alla temperatura T. Ciascuna particella può trovarsi in due distinti livelli non degeneri di energia corrispondenti, rispettivamente, alle energie:

$$\varepsilon_0 = 0 \quad \text{ed} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$. Gli stati del sistema sono pertanto contraddistinti dalle coppie di numeri di occupazione $\{n_0, n_1\}$ delle particelle nei due stati.

a) Calcolare la funzione di partizione *canonica* Z del sistema.

b) Calcolare l'energia media del gas e discutere il risultato nei limiti rispettivamente di basse e di alte temperature.

c) Calcolare il potenziale chimico del gas e mostrare che, come previsto in generale per un gas perfetto di bosoni, la fugacità $z = \exp(\beta\mu)$ è una funzione monotona della temperatura che varia (per $N \gg 1$) nell'intervallo $[0, 1]$ quando la temperatura decresce tra $T = +\infty$ e $T = 0$.

ESERCIZIO N^o 2

Si consideri il seguente modellino di atomo: due particelle prive di spin, di massa m_1 ed m_2, sono vincolate a muoversi in una dimensione sotto l'azione di una forza elastica attrattiva dipendente dalla distanza relativa tra le due particelle. L' hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto:

$$H = \frac{p_1^2}{2\,m_1} + \frac{p_2^2}{2\,m_2} + \frac{1}{2} k\,\left(x_1 - x_2\right)^2$$

dove k è la costante della forza elastica. Si assuma inoltre l'atomo in quiete nel sistema del centro di massa, ossia in uno stato di impulso totale $P = 0$.

a) Calcolare la distanza quadratica media relativa tra le due particelle, $\langle\, (x_1 - x_2)^2 \rangle$, quando l'atomo si trova nel suo stato fondamentale e nel primo livello eccitato. Calcolare inoltre, negli stessi stati, la distanza quadratica media di ciascuna particella rispetto alla posizione X del centro di massa, ossia i valori medi $\langle\, (x_{1,2} - X)^2 \rangle$.

b) Considerando l'espressione relativistica dell'energia cinetica delle due particelle,

$$E_{1,2} = \sqrt{m_{1,2}^2\, c^4 + p_{1,2}^2\, c^2}$$

si calcoli, utilizzando la teoria delle perturbazioni, la correzione relativistica al primo ordine al livello di energia fondamentale dell'atomo. Quale risulta essere, in questo calcolo, il parametro assunto piccolo che consente l'applicabilità della teoria delle perturbazioni?

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 Settembre 2000

ESERCIZIO N° 1

Un gas è composto da N particelle non interagenti, di massa m e spin $1/2$, soggette ad un potenziale centrale di tipo armonico con centro nell'origine. L'Hamiltoniana di singola particella è pertanto:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

dove $p = \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)^{1/2}$ ed $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Il gas è mantenuto in equilibrio termico allo zero assoluto.

a) Determinare l' energia di Fermi del gas, ε_F, e la massima distanza dall'origine, r_M, alla quale possono trovarsi le particelle del gas.

b) Calcolare l'energia media per particella, E/N, del gas e l'energia libera F/N.

c) Calcolare la densità $\rho(r)$ del gas in funzione della distanza r dall'origine delle coordinate, mostrando che tale densità si annulla sulla sfera di raggio massimo r_M.

d) *Facoltativo*: calcolare la pressione nella direzione radiale $p(r)$.

Si ricorda il valore del seguente integrale (funzione beta):

$$B(a, b) = \int_0^1 dx\, x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1, momento magnetico $\mu \vec{S}$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -\mu\, \vec{S} \cdot \vec{B}$$

All'istante iniziale $t = 0$ viene misurata la componente x dello spin della particella e si ottiene come risultato il valore $S_x = \hbar$.

a) Esprimere lo stato iniziale della particella come combinazione lineare di autostati dell'Hamiltoniana.

b) Determinare i possibili risultati di una misura di S_y, al tempo $t = 0$, e le corrispondenti probabilità.

c) Determinare, in funzione del tempo t, il valore medio della componente x dello spin della particella.

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

28 Novembre 2000

ESERCIZIO

Un gas perfetto, costituito da N fermioni di massa m, è mantenuto in equilibrio alla temperatura T. Le particelle del gas sono soggette ad un campo di forze centrali per cui l'hamiltoniana di singola particella ha la forma:

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \alpha\, r^n$$

dove α ed n sono costanti positive.

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In queste condizioni:

a) Calcolare l'energia media del gas.

b) Determinare la pressione del gas, $p(r)$, in funzione della distanza r dall'origine delle coordinate. Si suggerisce a tale scopo di utilizzare il formalismo dell'ensemble gran canonico.

c) Discutere quale condizione deve soddisfare la temperatura T affinchè il gas possa essere trattato effettivamente come un gas di Boltzmann classico.

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. In questo caso:

d) Determinare l' energia di Fermi ε_F e la massima distanza dall' origine, r_M, alla quale si possono trovare particelle del gas.

e) Calcolare l'energia media per particella.

Si esprimano gli integrali che compaiono nei risultati finali in termini delle seguente funzioni speciali gamma e beta:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty ds\, s^{a-1}\, e^{-s} \quad , \quad B(a, b) = \int_0^1 ds\, s^{a-1}\, (1-s)^{b-1}$$

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

26 Gennaio 2001

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m priva di spin si muove in una dimensione soggetta al potenziale:

$$V(x) = -V_0\, a\, \delta(x) - V_0\, \theta(x-b)$$

dove V_0, a e b sono costanti positive.

a) Determinare la condizione di esistenza di eventuali stati legati della particella e la corrispondente funzione d'onda. Per semplicità, in quest'ultima si lasci indicata genericamente la costante di normalizzazione moltiplicativa.

b) Si consideri il caso limite in cui $b \to \infty$ ed il potenziale in tutto lo spazio assume pertanto la forma $V(x) = -V_0\, a\, \delta(x)$. Utilizzando i risultati precedentemente ottenuti, determinare l'autovalore dell'energia dell'unico stato legato esistente e la corrispondente autofunzione.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin 1 sono immerse in un campo magnetico uniforme e costante diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è:

$$H = -\mu\, \vec{S} \cdot \vec{B}$$

dove $\vec{S}$ rappresenta l'operatore di spin totale delle due particelle. All'istante iniziale $t = 0$ viene misurata la componente x dello spin di ciascuna delle due particelle e si ottiene come risultato $S_x^{(1)} = S_x^{(2)} = 0$.

a) Determinare autostati ed autovalori dell'Hamiltoniana, con le relative degenerazioni, nei due casi in cui: a) le particelle sono distinguibili; b) le particelle sono identiche.

b) Calcolare la probabilità che una misura di $S_x^{(1)}$ ed $S_x^{(2)}$ al tempo t fornisca nuovamente il risultato $S_x^{(1)} = S_x^{(2)} = 0$.

c) Calcolare la probabilità che una misura dello spin totale delle due particelle al tempo t fornisca il risultato $S^2 = 0$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

5 Febbraio 2001

ESERCIZIO N° 1

Un recipiente è diviso in due parti da un setto adiabatico che può scorrere senza attrito, in maniera tale che i gas contenuti nelle due regioni siano all'equilibrio meccanico. Nella prima parte del recipiente è contenuto un gas di fotoni ("corpo nero") in equilibrio termico alla temperatura T. Nella seconda parte è contenuto invece un gas di particelle di massa nulla il cui numero totale N è conservato.

Determinare il volume V occupato dalle particelle nella seconda parte del recipiente, in funzione della temperatura T del gas di fotoni e del numero totale di particelle N. Si considerino separatamente i due casi in cui:

a) Le particelle nella seconda regione siano bosoni di spin 0 alla temperatura di condensazione.

b) Le particelle nella seconda regione siano fermioni di spin 1/2 a temperatura nulla.

Nei risultati finali si lascino simbolicamente indicati gli integrali:

$$J_n = \int_0^\infty \frac{dx\ x^n}{e^x - 1}$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi in due dimensioni soggetta ad un potenziale centrale di tipo armonico. L'hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = \frac{p_x^2}{2\,m} + \frac{p_y^2}{2\,m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2\,(x^2+y^2)$$

La particella si trova in uno stato tale che: 1) una misura dell'energia fornisce con certezza il risultato $E = 2\,\hbar\,\omega$; 2) il valore medio dell'operatore $\widehat{A} = x\,y$ è uguale ad $\hbar/(2\,m\,\omega)$; 3) il valore medio dell'operatore $\widehat{B} = x^2 - y^2$ è nullo.

a) Determinare lo stato della particella.

b) Si supponga di aggiungere all'hamiltoniana una perturbazione della forma $V = \lambda\,\widehat{B}$. Calcolare le correzioni al primo ordine in λ agli autovalori dell'energia dello stato fondamentale e del primo livello eccitato, discutendo l'eventuale rimozione della degenerazione.

c) Calcolare le espressioni esatte dei suddetti autovalori e confrontare i risultati con quelli ottenuti in teoria delle perturbazioni.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

23 Febbraio 2001

ESERCIZIO N° 1

Un gas è costituito da N particelle di massa m, spin $1/2$ e carica elettrica q non interagenti tra loro. Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura T all'interno di un recipiente cilindrico, di area di base A ed altezza L ed è soggetto all'azione di un campo elettrico E, uniforme e costante, diretto lungo l'asse z parallelo all'asse del cilindro. L'hamiltoniana di singola particella è pertanto:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - qE\,z$$

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In questa condizione:

a) Calcolare il valore medio del momento di dipolo elettrico $p = q\sum_{i=1}^{N} z_i$.

b) Calcolare il valore medio della suscettività elettrica, $\chi = dp/dE$, nei due limiti di campo elettrico debole ($qEL \ll kT$) e forte ($qEL \gg kT$).

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. In questo caso:

c) Assumendo che l'energia di Fermi ε_F del gas sia positiva, determinare la relazione che lega ε_F al numero totale N di particelle e calcolare il momento di dipolo elettrico p.

d) <u>*Facoltativo*</u>: per un valore dato del numero di particelle N, discutere come sia possibile determinare se l'energia di Fermi del gas risulta positiva o negativa.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin $1/2$ è descritta dall'hamiltoniana $H = H_0 + \lambda V$, dove:

$$H_0 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\hbar\omega\,\sigma_z \qquad \text{e} \qquad V = a^+\sigma_- + a\,\sigma_+$$

Gli operatori a^+ ed a sono gli operatori di creazione e distruzione dell'oscillatore armonico unidimensionale e le matrici $\sigma_\pm$ corrispondono alle combinazioni $\sigma_\pm = 1/2\,(\sigma_x \pm i\,\sigma_y)$ delle matrici di Pauli. All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova in un autostato simultaneo di H_0 e della componente S_z dello spin, corrispondente rispettivamente agli autovalori $E = \hbar\omega$ ed $S_z = \hbar/2$.

a) Utilizzando la teoria delle perturbazioni, determinare le correzioni al primo ordine in λ ai livelli di energia dell'hamiltoniana H_0 e le espressioni all'ordine zero dei corrispondenti autostati.

b) Mostrare che vale la regola di commutazione $[H_0, V] = 0$ e che pertanto H_0e V ammettono un insieme di autostati in comune. Verificare quindi che i risultati ottenuti con la teoria delle perturbazioni rappresentano effettivamente gli autostati e gli autovalori esatti di H.

c) Calcolare la probabilità che una misura di S_z, effettuata sulla particella al tempo t, fornisca come risultato il valore $S_z = -\hbar/2$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

15 Giugno 2001

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto è costituito da N particelle *distinguibili* mantenute in equilibrio alla temperatura T. I livelli di energia E_n di singola particella e la degenerazione d_n del livello n-esimo sono dati da

$$E_n = (n+1)\,E_0, \qquad d_n = a^n\,(n+1)$$

dove $n = 0, 1, 2\ldots$ ed a è un numero intero positivo.

a) Calcolare la funzione di partizione canonica, l'energia interna ed il calore specifico del sistema.

b) Studiare il limite di bassa temperatura dell'energia interna e del calore specifico e dare un'interpretazione fisica dei risultati ottenuti.

c) Mostrare che per $a > 1$ esiste una temperatura T_a al di sopra della quale la probabilità p_{n+1} di occupazione del livello $(n+1)$-esimo (con $n \gg 1$) diventa maggiore della probabilità di occupazione p_n del livello sottostante. Calcolare la temperatura T_a e mostrare che in corrispondenza di tale temperatura le grandezze termodinamiche del gas risultano singolari.

Si ricorda la seguente identità utile per il calcolo delle somme:

$$\sum_k k\;e^{-\alpha k} = -\frac{d}{d\alpha}\sum_k e^{-\alpha k}$$

ESERCIZIO N° 2

Un sistema a due stati è descritto dall'hamiltoniana

$$H = \left[\frac{1}{4}\left(A^2 + B^2\right) + C\right]\hbar\omega$$

dove A, B e C sono tre osservabili fisiche la cui rappresentazione matriciale è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Mostrare che per il sistema in questione è possibile effettuare una misura simultanea dell'energia e dell'osservabile C.

b) Calcolare gli autostati e gli autovalori dell'hamiltoniana.

c) Al tempo $t = 0$ il sistema si trova in uno stato $|\psi_0\rangle$ tale che i valori medi delle osservabili A e B risultano $\langle\psi_0|A|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|B|\psi_0\rangle = 1$. Calcolare il valore medio di A al tempo t generico successivo.

d) <u>*Facoltativo:*</u> verificare che vale l'identità

$$\frac{d}{dt}\,\langle\psi_t|A|\psi_t\rangle = \langle\psi_t|\frac{dA}{dt}|\psi_t\rangle$$

dove $|\psi_t\rangle$ rappresenta lo stato del sistema al tempo t e l'operatore dA/dt è $dA/dt = i/\hbar\;[H, A]$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

11 Luglio 2001

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto è costituito da N particelle identiche di massa m contenute in un volume V. L'energia di singola particella è

$$\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

a) Calcolare la densità degli stati $g(\varepsilon)$ e studiarne i limiti ultrarelativistico, $g^{UR}(\varepsilon)$ con $\varepsilon \gg mc^2$, e non relativistico, $g^{NR}(\overline{\varepsilon})$ con $\overline{\varepsilon} = \varepsilon - mc^2$ ed $\overline{\varepsilon} \ll mc^2$.

b) Assumendo che le particelle siano fermioni, calcolare l'energia di Fermi ε_F del gas. Studiarne quindi il limite non relativistico, $\overline{\varepsilon}_F = \varepsilon_F - mc^2$ con $\overline{\varepsilon}_F \ll mc^2$, e trovare quale condizione deve soddisfare la densità N/V del gas affinchè l'approssimazione non relativistica ($\overline{\varepsilon}_F \ll mc^2$) risulti verificata.

c) Assumendo che le particelle siano bosoni, scrivere l'equazione che determina la temperatura critica di condensazione T_0 in funzione della densità N/V del gas. Studiare i limiti ultrarelativistico ($kT_0 \gg mc^2$) e non relativistico ($kT_0 \ll mc^2$) di questa equazione e trovare quale condizione deve soddisfare la densità del gas affinchè l'approssimazione non relativistica risulti verificata.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin 1/2 e momento magnetico $\vec{\mu}_1 = \mu_1 \vec{S}_1$ e $\vec{\mu}_2 = \mu_2 \vec{S}_2$ (con $\mu_1 \neq \mu_2$) sono immerse in un campo magnetico $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -(\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2) \cdot \vec{B}$$

All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano in uno stato tale che una misura della componente x dello spin totale dà con certezza il risultato $S_x = \hbar$.

a) Calcolare lo stato del sistema al tempo generico t successivo.

b) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi delle componenti μ_z e μ_x del momento magnetico totale delle due particelle.

c) Determinare come cambiano gli autovalori (esatti) dell'energia delle due particelle se si aggiunge all'hamiltoniana un termine di interazione tra i momenti magnetici della forma

$$V = \frac{\alpha}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 Settembre 2001

ESERCIZIO N° 1

Un sistema è costituito da N particelle *distinguibili*, non interagenti, immerse in un campo magnetico H. Ciascuna particella possiede un momento magnetico μ che può essere orientato in direzione parallela, antiparallela od ortogonale al campo. L'energia di un particolare stato del sistema è pertanto:

$$-\sum_{i=1}^{N} n_i \mu H \ , \quad \text{con } n_i = 0, \pm 1$$

a) Calcolare l'entropia del sistema e valutarne i limiti rispettivamente di basse ed alte temperature.

b) Calcolare la magnetizzazione totale media del sistema, $\langle M \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} n_i \mu \right\rangle$.

c) Calcolare lo scarto quadratico medio della magnetizzazione, $\left\langle (\Delta M)^2 \right\rangle$, dove $\Delta M = M - \langle M \rangle$. Confrontare il risultato ottenuto con l'espressione della suscettività magnetica, $\chi = \partial \langle M \rangle / \partial H$, e verificare che, nel limite termodinamico, le fluttuazioni relative $\sqrt{\left\langle (\Delta M)^2 \right\rangle} / \langle M \rangle$ tendono a zero come $1/\sqrt{N}$.

ESERCIZIO N° 2

Un fascio di particelle di massa m prive di spin, proveniente dalla regione $x = -\infty$, incide con energia $E = V_0$ sulla barriera di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0,\ x > a \\ V_0, & \text{per } 0 < x < a \end{cases}$$

a) Determinare la funzione d'onda delle particelle ed i coefficienti di riflessione e trasmissione.

b) Determinare la probabilità relativa che le particelle si trovino rispettivamente nelle regioni $0 < x < a$ ed $a < x < 2a$.

c) Utilizzando i risultati ottenuti al punto a), determinare la funzione d'onda ed i coefficienti di riflessione e trasmissione nel limite in cui la lunghezza a della barriera tende ad infinito (gradino di potenziale).

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

18 Giugno 2002

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale, di massa m e frequenza ω, si trova all'istante iniziale $t = 0$ in uno stato tale che:

- una misura dell'energia fornisce con certezza un risultato $E < 3\hbar\omega$;
- lo stato è un autostato dell'operatore parità con autovalore $+1$;
- il valore medio dell'energia è $\langle E \rangle = \hbar\omega$;
- il valore medio dell'energia cinetica è uguale al valore medio dell'energia potenziale.

a) Mostrare che le suddette condizioni non sono sufficienti a determinare univocamente lo stato iniziale del sistema e derivare l'espressione più generale risultante per tale stato.

b) Mostrare che una misura del valore medio dell'energia potenziale ad un istante di tempo $t > 0$ consente di determinare completamente lo stato iniziale.

c) Calcolare il prodotto delle dispersioni $\Delta x\, \Delta p$ in funzione del tempo e mostrare che il risultato è consistente, a qualunque tempo, con la relazione di indeterminazione

$$\Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico soddisfano la condizione $\psi_n(-x) = (-1)^n\, \psi_n(x)$.

ESERCIZIO N° 2

Sia dato un sistema composto di due particelle distinguibili di spin 1/2.

a) Calcolare la probabilità che una misura dello spin totale $S^2 = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2$ dia come risultato il valore $2\,\hbar^2$ se:

1. gli spin di entrambe le particelle puntano nella direzione $+\,z$;

2. lo spin della particella 1 punta nella direzione $+\,z$ e quello della particella 2 nella direzione $-\,z$;

3. lo spin della particella 1 punta nella direzione $+\,x$ e quello della particella 2 nella direzione $+\,z$.

Si assuma come Hamiltoniana del sistema

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

(N.B.: $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}\,(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$). All'istante iniziale $t = 0$, le particelle si trovano nello stato in cui lo spin della particella 1 punta nella direzione $+\,z$ mentre quello della particella 2 nella direzione $-\,z$.

b) Determinare lo stato del sistema ad un tempo generico $t > 0$.

c) Calcolare il valore medio $\langle S_{1z} \rangle$ della componente z dello spin della particella 1 ad un tempo generico $t > 0$.

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

3 Luglio 2002

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m e spin 0 è vincolata a muoversi in una dimensione all'interno di una buca di potenziale infinita, nel segmento $|x| \leq L/2$. All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} N\,, & |x| \leq L/4 \\ 0\,, & |x| > L/4 \end{cases} .$$

a) Determinare la costante di normalizzazione N della funzione d'onda, il valore medio della posizione x della particella ed il valore dell'indeterminazione $\Delta x = \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\right)^{1/2}$.

b) Determinare la funzione d'onda della particella al tempo $t > 0$ e la probabilità P_n che una misura dell'energia al tempo t dia come risultato l'n-esimo autovalore dell'Hamiltoniano. Verificare, in particolare, che la probabilità P_1 di ottenere come risultato l'energia E_1 dello stato fondamentale è maggiore dell'80%.

All'istante di tempo $t = t_0$ si esegue una misura dell'energia della particella e si ottiene come risultato $E = E_1$.

c) Determinare la probabilità che ai tempi successivi, $t \geq t_0$, la particella venga a trovarsi all'interno del segmento $|x| \leq L/4$. Verificare che, anche in questo caso, tale probabilità risulta maggiore dell'80%.

ESERCIZIO N° 2

Si consideri un sistema quantistico a due livelli e si assumano come ket di base gli autoket normalizzati di un operatore lineare A, rappresentato da

$$A = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\,.$$

L'Hamiltoniano del sistema è:

$$H = \hbar\omega_1\,(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + \hbar\omega_2\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

All'istante iniziale $t = 0$, il sistema si trova nello stato $|\psi\,(0)\rangle = |1\rangle$.

a) Determinare lo stato del sistema $|\psi\,(t)\rangle$ al tempo $t > 0$.

b) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio dell'energia e la dispersione $\Delta A = \left(\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2\right)^{1/2}$. In quali istanti di tempo lo stato del sistema è un autostato di A?

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio dell'operatore dA/dt e verificare che tale valore medio soddisfa l'identità

$$\langle\psi\,(t)\,|\frac{dA}{dt}|\psi\,(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi\,(t)\,|A|\psi\,(t)\rangle\,.$$

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA
16 Luglio 2002

ESERCIZIO N° 1
Una particella di massa m, vincolata a muoversi in una dimensione, si trova nello stato descritto dal pacchetto d'onde

$$\psi(x) = N\,x^2\,\exp\left(-\alpha\,x^2/2\right)$$

dove α è una costante reale e positiva.

a) Determinare la costante di normalizzazione N in funzione di α.

b) Verificare, per lo stato in questione, la relazione di indeterminazione $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$.

c) All'istante iniziale $t = 0$, la particella viene sottoposta all'azione di un potenziale armonico con frequenza $\omega = \hbar\alpha/m$. Determinare lo stato della particella ad un tempo generico t successivo.

Si osservi che gli integrali $I_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,x^{2\,n}\,e^{-\alpha\,x^2}$ *soddisfano la relazione* $\dfrac{I_{n+1}(\alpha)}{I_n(\alpha)} = \dfrac{2\,n+1}{2\,\alpha}$. *Si ricorda inoltre che le autofunzioni dell'Hamiltoniana per l'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:*

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\,H_n(\sqrt{\alpha}x)\,\exp\left(-\alpha\,x^2/2\right)$$

dove $\alpha = m\,\omega/\hbar$ *ed i primi polinomi di Hermite sono*

$$H_0(\xi) = 1\,,\quad H_1(\xi) = 2\,\xi\,,\quad H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2.$$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di massa infinita, spin 1/2 e momento magnetico $\vec{\mu} = -g\,\vec{S}$, è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ costante. Il campo giace nel piano $x\;y$ e forma un angolo α con l'asse x. L'Hamiltoniana del sistema è dunque:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = g\,B\,(\cos\alpha\,S_x + \mathrm{sen}\,\alpha\,S_y)$$

All'istante iniziale $t = 0$, è noto che una misura della componente y dello spin della particella produce con certezza il risultato $-\hbar/2$.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella e le rispettive probabilità.

b) Determinare i possibili valori dell'angolo α per i quali esistono degli istanti di tempo in cui una misura di S_y produce con certezza il valore $+\hbar/2$. Si calcoli inoltre il primo istante di tempo in cui ciò avviene.

c) Per quali valori dell'angolo α, invece, una misura di S_y produce con certezza il valore $-\hbar/2$, a qualunque istante di tempo? E sapreste dare una spiegazione del risultato ottenuto?

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA
16 Settembre 2002

ESERCIZIO
Una particella di massa m, priva di spin, è vincolata a muoversi su di una circonferenza di raggio R, posizionata nel piano $x\,y$ e centrata nell'origine. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H = \frac{p_\vartheta^2}{2\,mR^2} = -\frac{\hbar^2}{2\,mR^2}\,\frac{d^2}{d\vartheta^2}$$

dove ϑ rappresenta l'angolo polare che definisce la posizione della particella sulla circonferenza e $p_\vartheta = -i\,\hbar\,d/d\vartheta$ è il suo momento coniugato, coincidente con la componente lungo l'asse z del momento angolare della particella.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi\,(\vartheta) = N\,(1 + \cos\vartheta)$$

dove N è una costante di normalizzazione.

a) Verificare che le funzioni

$$\varphi_\ell\,(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\ell\vartheta}, \qquad \ell = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

sono autofunzioni simultanee del momento p_ϑ e dell'Hamiltoniana H, calcolarne i corrispondenti autovalori ed il relativo livello di degenerazione.

b) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella, le rispettive probabilità ed il valore medio dell'energia.

c) Scegliendo per convenzione l'angolo ϑ compreso nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, calcolare il valore medio di ϑ all'istante $t = 0$ e giustificare il risultato ottenuto studiando il grafico della distribuzione $|\psi\,(\vartheta)|^2$.

d) Calcolare, all'istante iniziale $t = 0$, il valore dell'indeterminazione $\Delta\vartheta = \left(\langle\vartheta^2\rangle - \langle\vartheta\rangle^2\right)^{1/2}$.

e) Verificare che l'operatore velocità angolare $\dot{\vartheta} = \dfrac{d\vartheta}{dt}$ è legato alla componente z del momento angolare dalla relazione classica $p_\vartheta = mR^2\dot{\vartheta}$.

f) <u>FACOLTATIVO</u>: Verificare che, nello stato della particella, la velocità angolare ha valore medio (indipendendente dal tempo) nullo e pertanto il valore medio dell'angolo ϑ risulta costante nel tempo:

$$\left\langle\dot{\vartheta}\right\rangle = \frac{d}{dt}\,\langle\vartheta\rangle_t = 0\,.$$

Verificare questo risultato mediante un calcolo esplicito del valore medio $\langle\vartheta\rangle_t$ al tempo generico t.

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

8 Gennaio 2003

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita, contenuta nel segmento $-L/2 \leq x \leq L/2$. La particella si trova nel suo stato fondamentale. Le pareti della buca vengono quindi allontate tra loro e posizionate nei punti di coordinate $x = \pm L$. Lo spostamento è sufficientemente rapido da poter considerare, con buona approssimazione, che lo stato della particella resti immutato.

a) Calcolare le probabilità che, a seguito dell'espansione, la particella venga a trovarsi nel nuovo stato fondamentale del sistema e nel primo stato eccitato.

b) Calcolare il valore medio dell'energia della particella.

c) Verificare, per lo stato in questione, la relazione di indeterminazione $\Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2$.

ESERCIZIO N° 2

Una particella può esistere in due distinti autostati di massa, con autovalori m_1 ed m_2. La particella si muove con velocità ultrarelativistica ed i due corrispondenti autovalori dell'energia, $E_{1,2} = \sqrt{m_{1,2}^2 \, c^4 + c^2 \, p^2}$, possono essere approssimati nella forma:

$$E_{1,2} = c\, p + \frac{m_{1,2}^2 \, c^3}{2\, p}$$

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato corrispondente all'autovalore $+1$ di un operatore W, la cui rappresentazione matriciale nella base degli autostati dell'Hamoltoniana è:

$$W = \begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \operatorname{sen} 2\vartheta \\ \operatorname{sen} 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{pmatrix}$$

a) Determinare lo stato iniziale della particella come combinazione lineare di autostati dell'Hamiltoniana.

b) Determinare, in funzione del tempo, la probabilità che la particella venga a trovarsi nell'autostato di W corrispondente all'autovalore -1 e verificare come una misura di tale probabilità consente di determinare la differenza delle masse al quadrato $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ ed il parametro di *mixing* $\operatorname{sen} 2\vartheta$.

I ESONERO E PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

20 Maggio 2003

N.B.: *Gli studenti che intendono sostenere la prova di esonero dovranno svolgere gli esercizi N$^{\text{O}}$. 1 e 2. Gli studenti che intendono sostenere la prova di esame svolgeranno invece gli esercizi N$^{\text{O}}$. 1 e 3.*

ESERCIZIO N$^{\text{O}}$. 1

Una particella di massa m, vincolata a muoversi in una dimensione, è soggetta al potenziale $V(x)$ definito da:

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{per } x < 0 \\ V(x) = -V_0 & \text{per } 0 < x < a \\ V(x) = +\infty & \text{per } x > a \end{cases}$$

con V_0 costante positiva.

a) Assumendo la particella provienente da $x = -\infty$ con energia $E > 0$, calcolare il coefficiente di riflessione R nel punto $x = 0$.

b) Derivare l'equazione che determina gli autovalori negativi dell'energia ($E < 0$) e discuterne in forma grafica le soluzioni.

c) Assumendo che la particella si trovi in uno stato con energia $E < 0$, calcolare la probabilità che, a seguito di una misura di posizione, essa venga trovata all'interno della buca, ossia nel segmento $0 \leq x \leq a$.

ESERCIZIO N$^{\text{O}}$. 2

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta ad un potenziale armonico con pulsazione ω. All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che: 1) una misura dell'operatore $a^\dagger a$ può fornire solo i valori 1 e 3; 2) il valore medio dell'energia è $3\hbar\omega$; 3) il valore di aspettazione dell'operatore $aa + a^\dagger a^\dagger$ è pari a $(-3/\sqrt{2})$.

a) Determinare lo stato iniziale della particella.

b) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$.

c) Calcolare in funzione del tempo il valore di aspettazione degli operatori $x\, p$ e $p\, x$.

ESERCIZIO N$^{\text{O}}$. 3

Una particella di massa m priva di spin è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R. La particella è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ costante e diretto lungo l' asse z. L'hamiltoniana che descrive la particella è dunque:

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} - \mu\, B\, L_z$$

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato del momento angolare orbitale corrispondente ad $l = 1$ e descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(t = 0) = N \, \operatorname{sen} \theta \, \cos \varphi$$

dove N è una costante di normalizzazione.

a) Calcolare la probabilità che, a seguito di una misura di posizione, la particella venga trovata con un valore dell'angolo θ compreso tra 0^o e 60^o.

b) Determinare i possibili risultati di una misura di L_x al tempo $t = 0$ e le rispettive probabilità.

c) Determinare, in funzione del tempo $t > 0$, il valore medio di L_x e la probabilità che una misura di L_x fornisca il risultato $L_x = 0$.

Si ricorda che le armoniche sferiche corrispondenti all'autovalore $l = 1$ sono:

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

II ESONERO E PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA
26 Giugno 2003

N.B.: *Gli studenti che intendono sostenere la prova di <u>esonero</u> dovranno svolgere gli esercizi N$^{\text{O}}$. 2 e 3. Gli studenti che intendono sostenere la prova di <u>esame</u> svolgeranno gli esercizi N$^{\text{O}}$. 1, 2 e 3. Gli studenti infine che devono sostenere la prova di <u>esame</u> per l' <u>A.A. 2001-2002</u> (9 C.F.U.) dovranno svolgere gli esercizi N$^{\text{O}}$. 1 e 2.*

ESERCIZIO N$^{\text{O}}$. 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi su di un segmento di lungheza L soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \le x \le L \\ \infty & \text{per } x < 0 \text{ and } x > L \,. \end{cases}$$

All'istante iniziale $t = 0$ lo stato della particella è descritto dalla f.d.o.

$$\psi(x) = \begin{cases} N\, x \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & \text{per } 0 \le x \le L \\ 0 & \text{per } x < 0 \text{ and } x > L \,. \end{cases}$$

Determinare:

a) Il valore della costante N.

b) La probabilità che una misura dell'energia all'istante $t = 0$ fornisca il valore $E = 2\pi^2\hbar^2/mL^2$;

c) Le probabilità che la particella si trovi nei segmenti $0 \le x \le L/2$ ed $L/2 \le x \le L$.

ESERCIZIO N$^{\text{O}}$. 2
Una rotatore quantistico con momento di inerzia I è immerso in un campo magnetico uniforme e costante diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto:

$$H = \frac{L^2}{2I} + g\, B\, \mathrm{L}_z \,.$$

All'istante iniziale $t = 0$ il rotatore si trova in un autostato di L^2 con autovalore $6\,\hbar^2$. Una misura di L_z può fornire come risultato solo multipli pari (incluso lo 0) di $\hbar$ e, inoltre, il valore medio di L_z nello stato in questione è nullo. Infine, il valore medio dell'operatore $L_+ \cdot L_-$, dove $L_\pm$ sono gli operatori di innalzamento e abbassamento del momento angolare, è pari a $2\hbar^2$.

a) Determinare l'espressione più generale per lo stato del rotatore all'istante iniziale $t = 0$.

b) Determinare l'evoluzione temporale dello stato.

c) Verificare che il valore medio di L_x per lo stato in questione è una costante indipendente dal tempo e discutere come questo risultato sia compatibile con l'equazione

$$\frac{dL_x}{dt} = \frac{i}{\hbar}\,[H, L_x] \;.$$

d) *Facoltativo* Indicare un operatore per il quale una misura del valore medio consentirebbe di determinare in modo univoco lo stato del rotatore.

ESERCIZIO N^{O}. 3

Si consideri un gas perfetto costituito da N fermioni di massa nulla e spin 1/2 vincolati a muoversi in 2 dimensioni su di una superficie di area A. L'energia e l'impulso delle particelle sono legati dalla relazione ultrarelativistica

$$\varepsilon = c\,p$$

dove $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ e c è la velocità della luce. Il gas è inoltre mantenuto all'equilibrio termico alla temperatura $T = 0^0\,K$. Calcolare:

a) L'energia di Fermi ε_F del gas e l'energia media per particella.

b) La frazione media del numero totale di particelle che possiedono energia $\varepsilon \leq \varepsilon_F/2$.

c) La pressione del gas (definita in 2 dimensioni come forza per unità di lunghezza) alla temperatura $T = 0^0\,K$ e nel limite classico di alte temperature ($T \gg T_F$).

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

7 Luglio 2003

ESERCIZIO N^o 1

Due particelle identiche di spin 1 e massa m sono vincolate a muoversi in un segmento di lunghezza L. L'Hamiltoniano del sistema è pertanto

$$H = \frac{p_1^2}{2\,m} + \frac{p_2^2}{2\,m} + U(x_1) + U(x_2)\ ,$$

dove

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < L \\ \infty & \text{per } x < 0 \text{ e } x > L\ . \end{cases}$$

a) Determinare gli autovalori e le autofunzioni corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato dell'energia ed il relativo grado di degenerazione.

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova in un autostato dello spin totale corrispondente ad $S = 0$. Una misura dell'energia può fornire inoltre come possibili risultati solo gli autovalori corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato. Infine, il valore medio dell'energia è $\langle E\rangle = 2\hbar^2\pi^2/mL^2$.

b) Determinare l'espressione più generale dello stato delle due particelle al tempo $t = 0$ e la sua evoluzione temporale.

c) Calcolare la probabilità in funzione del tempo che effettuando una misura di posizione delle due particelle queste vengano trovate entrambe nel segmento di coordinate $0 < x < L/2$.

Nella risoluzione del punto c) si osservi che il calcolo esplicito della maggior parte degli integrali può essere evitato semplicemento tenendo in conto della normalizzazione delle funzioni d'onda e delle loro proprietà di simmetria rispetto al punto di coordinata $x = L/2$.

ESERCIZIO N^o 2

Un gas perfetto è costituito da N particelle identiche di spin 0 contenute in un volume V in D dimensioni. L'energia di singola particella è

$$\varepsilon = C\,p^s\,, \qquad \text{dove } \ p = \sqrt{\sum_{i=1}^{D} p_i^2}$$

e C ed s sono costanti positive.

a) Discutere in funzione di D ed s la presenza del fenomeno della condensazione di Bose-Einstein e calcolare, nei casi in cui questo si presenti, la temperatura critica T_0 e la frazione di particelle che per $T < T_0$ si trova nello stato fondamentale.

b) Determinare per $T < T_0$ l'energia media ed il calore specifico a volume costante del gas.

c) Determinare la relazione che lega pV, dove p è la pressione del gas, all'energia media E.

Nell'integrale sullo spazio delle fasi si riscriva l'elemento di volume infinitesimo $d^D p$ nella forma $d^D p = \Omega_D \, p^{D-1} dp$, lasciando indicato simbolicamente l'angolo solido Ω_D in D dimensioni. Si suggerisce inoltre di verificare la correttezza dei risultati ottenuti confrontando con quelli noti nel caso non relativistico in 3 dimensioni, corrispondente a $D = 3$, $s = 2$ e $C = (2\,m)^{-1}$.

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

15 Luglio 2003

ESERCIZIO N° 1

Una particella di spin 1, momento magnetico $\mu \vec{S}$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante di componenti $\vec{B} = B/\sqrt{2}\ (1,1,0)$. L' Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -\mu\, \vec{S} \cdot \vec{B}$$

Determinare:

a) La rappresentazione matriciale di H nella base degli autostati di S_z.

b) Gli autovalori e gli autovettori dell' Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell' autostato di S_z corrisponente all' autovalore $\hbar$.

c) Determinare, in funzione del tempo, la rappresentazione vettoriale nella base degli autostati di S_z del vettore di stato della particella, la probabilità che una misura di S_z fornisca il risultato $S_z = \hbar$ ed il valore medio di S_z.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione descritta dall' Hamiltoniana

$$H = H_0 + V$$

dove H_0 è l' Hamiltoniana di un oscillatore armonico con pulsazione ω e V è una perturbazione. In termini degli operatori di creazione e distruzione si ha

$$H_0 = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \qquad \text{e} \qquad V = \frac{\hbar\omega\lambda}{4} (a + a^\dagger)^2$$

dove λ è una costante reale adimensionale.

Determinare:

a) La correzione al primo ordine in λ agli autovalori dell' energia.

b) La correzione al primo ordine in λ agli autostati dell' Hamiltoniana.

c) L' espressione esatta per l' autovalore e l' autostato corrispondenti al livello fondamentale dell' Hamiltoniana H. Confrontare quindi i risultati con quelli ottenuti al primo ordine della teoria delle perturbazioni in λ.

Si ricorda che le autofunzioni dell'energia per l'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\, H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2 \right) \quad , \quad \xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\xi & H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi & H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

16 Settembre 2003

ESERCIZIO N^o 1

L' Hamiltoniano di un sistema quantistico a tre livelli è descritto dal seguente operatore:

$$
\begin{aligned}
H\,|1> &= \varepsilon\,(|1> + |2> + |3>)\ , \\
H\,|2> &= \varepsilon\,(|1> + i\,|3>)\ , \\
H\,|3> &= \varepsilon\,(|1> - i\,|2> - |3>)\ ,
\end{aligned}
$$

dove ε è una costante avente le dimensioni di energia e $|1>$, $|2>$ e $|3>$ sono stati ortogonali e normalizzati. All' istante $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|2>$.

a) Determinare gli autovalori dell' Hamiltoniano e calcolare la probabilità di trovare all' istante $t = 0$ il sistema nello stato fondamentale.

b) Determinare l' evoluzione temporale dello stato e calcolare in quali istanti di tempo $t > 0$ il sistema si ritrova nello stesso stato in cui si trovava al tempo $t = 0$.

c) Calcolare la probabilità di trovare il sistema nello stato $|1>$ in funzione del tempo e determinare in quali istanti di tempo t tale probabilità è nulla.

ESERCIZIO N^o 2

Un gas perfetto è costituito da N particelle identiche di spin $1/2$ vincolate a muoversi in una dimensione su di un segmento di lunghezza L. L' energia di singola particella è legata all' impulso dalla relazione

$$
\varepsilon(p) = \begin{cases} c\,|p| & \text{per } |p| \le \varepsilon_0/c \\ \varepsilon_0 + c\,|p| & \text{per } |p| > \varepsilon_0/c\ . \end{cases}
$$

dove c ed ε_0 sono costanti positive aventi le dimensioni rispettivamente di velocità ed energia.

a) Calcolare l' impulso di Fermi e l' energia di Fermi del gas, considerando separatamente i due casi in cui la densità N/L del gas risulta minore oppure maggiore di $2\varepsilon_0/(\pi\hbar\, c)$.

b) Calcolare, nei due casi suddetti, l' energia media del gas alla tempertaura $T = 0$.

c) Determinare la relazione che lega la densità N/L del gas al potenziale chimico $\mu(T)$ ad una temperatura generica T. Determinare quindi, a partire da questa relazione, il valore del potenziale chimico alla temperatura $T = 0$.

Si osservi che vale il seguente integrale indefinito

$$
\int \frac{dx}{e^x + 1} = -\log(1 + e^{-x}) + \text{cost.}
$$

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

14 Gennaio 2004

ESERCIZIO

Si consideri un sistema composto di due particelle, di spin rispettivamente $s_1 = 3/2$ ed $s_2 = 1/2$, la cui interazione reciproca è descritta dall' Hamiltoniana

$$
H = \frac{\lambda}{2}\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2
$$

con $\lambda > 0$. (N.B.: $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}\,(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$ dove $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ è lo spin totale del sistema).

a) Calcolare gli autovalori dell' energia del sistema ed il relativo grado di degenerazione.

All'istante iniziale $t = 0$, il sistema si trova nello stato in cui le componenti z dello spin delle due particelle assumono lo stesso valore $s_{1z} = s_{2z} = 1/2$.

b) Determinare lo stato del sistema ad un tempo generico $t > 0$.

c) Determinare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura dell' energia del sistema e le rispettive probabilità.

d) Determinare, in funzione del tempo, la probabilità che una misura dello spin S_{1z} della particella 1 fornisca come risultato $s_{1z} = 3/2$. Calcolare il valore massimo di tale probabilità e per quali istanti di tempo t^* tale massimo viene raggiunto.

Ad un istante di tempo successivo viene effettuata una misura della componente z dello spin della particella 1 e si ottiene come risultato il valore $s_{1z} = 3/2$.

e) Determinare, a seguito di tale misura, i possibili risultati di una misura dell' energia del sistema, le rispettive probabilità ed il valore medio dell' energia.

Il sistema viene poi immerso in un campo magnetico esterno $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. L' Hamiltoniana che descrive il sistema diventa pertanto

$$
H = \frac{\lambda}{2}\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - g\vec{S} \cdot \vec{B}\,.
$$

f) Determinare il valore minimo del campo esterno B tale per cui lo stato fondamentale del sistema risulti essere uno stato con spin totale $s = 2$.

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

1 Aprile 2004

ESERCIZIO N^o 1

Un sistema a due stati è descritto dall'hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} .$$

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova in uno stato tale che: 1) il valore medio dell'energia è $2/3\,\varepsilon$; 2) il valore medio della grandezza Q, rappresentata nella stessa base dalla matrice

$$Q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} ,$$

è pari a $-2\sqrt{2}/3\,q$.

a) Determinare lo stato iniziale del sistema come combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniana.

b) Determinare, in funzione del tempo $t > 0$, i possibili risultati di una misura di Q, le relative probabilità ed il valore medio di Q.

c) Calcolare sullo stato in questione le dispersioni ΔE e ΔQ, dove $\Delta\mathcal{O} = (\langle\mathcal{O}^2\rangle - \langle\mathcal{O}\rangle^2)^{1/2}$, e verificare la relazione di indeterminazione

$$\Delta E \cdot \Delta Q \geq \frac{1}{2}\,|\langle[H, Q]\rangle|$$

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale $V(x)$ definito da:

$$\begin{cases} V(x) = +\infty & , \quad \text{per} \quad |\, x\,| > a \\ V(x) = \dfrac{\hbar^2\lambda}{2m}\,\delta\,(x) & , \quad \text{per} \quad |\, x\,| < a \end{cases}$$

dove λ è una costante.

a) Assumendo $\lambda > 0$, derivare l'equazione che determina i possibili autovalori E (> 0) dell'energia, studiarne graficamente le soluzioni e determinare le corrispondenti autofunzioni.

b) <u>*Facoltativo*</u>: Risolvere lo stesso problema nel caso $\lambda < 0$ ed $E < 0$.

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

1 Luglio 2004

ESERCIZIO N^{O}. 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta ad un potenziale armonico con pulsazione ω. All'istante $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che: i) una misura dell'energia può fornire solo i valori $5/2\,\hbar\omega$ e $7/2\,\hbar\omega$; ii) il valore medio dell'operatore $a^\dagger a$ è $11/4$; iii) il valore medio dell'operatore $(a + a^\dagger)$ è $-3/2$.

a) Determinare lo stato iniziale della particella.

b) Calcolare il valore di aspettazione dell'operatore x in funzione del tempo.

Si aggiunga all'Hamiltoniana di oscillatore armonico una perturbazione rappresentata dal potenziale:

$$V = -\frac{\hbar\omega\lambda}{4}\,(a - a^\dagger)^2 .$$

Determinare:

c) La correzione al primo ordine in λ agli autovalori dell'energia.

d) La correzione al primo ordine in λ agli autostati dell' Hamiltoniana.

e) <u>*Facoltativo*</u>: Gli autovalori esatti dell'energia, verificando che lo sviluppo al primo ordine in λ conduce al risultato ottenuto mediante la teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N^{O}. 2

Una particella di spin 1/2, momento magnetico $\mu\,\vec{S}$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante di componenti $\vec{B} = B/\sqrt{2}\ (1, -1, 0)$. L' Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -\mu\,\vec{S}\cdot\vec{B}$$

a) Determinare la rappresentazione matriciale di H nella base degli autostati di S_z, gli autovalori e gli autovettori dell' Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$, è noto che una misura della componente z dello spin della particella produce con certezza il risultato $-\hbar/2$.

Determinare:

b) I possibili risultati di una misura dell'energia della particella e le rispettive probabilità.

c) In funzione del tempo, la probabilità che una misura di S_z fornisca il risultato $S_z = \hbar/2$ ed il valore medio di S_z.

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA
20 Luglio 2004

ESERCIZIO N° 1
Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 \\ i & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dove gli stati di base $|1>$, $|2>$ e $|3>$ sono autostati di un operatore hermitiano R che soddisfano le equazioni:

$$R\,|1>=\sqrt{2}\,|1>\,,\quad R\,|2>=0\,,\quad R\,|3>=-\sqrt{2}\,|3>\ .$$

All' istante iniziale $t=0$ si effettua una misura dell' osservabile R e si ottiene come risultato il valore $-\sqrt{2}$.

a) Verificare che i vettori di stato:

$$\begin{aligned}
|->&=\frac{i}{2}\,|1>+\frac{1}{2}\,|2>+\frac{1}{\sqrt{2}}\,|3>\ \ ,\\
|0>&=\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1>+\frac{i}{\sqrt{2}}\,|2>\ \ ,\\
|+>&=-\frac{i}{2}\,|1>-\frac{1}{2}\,|2>+\frac{1}{\sqrt{2}}\,|3>
\end{aligned}$$

sono autostati dell' Hamiltoniana e determinare i corrispondenti autovalori. Calcolare quindi la probabilità di trovare il sistema all' istante $t=0$ nello stato fondamentale.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo t generico successivo e calcolare in quali istanti di tempo t^* il sistema viene a trovarsi nello stesso stato in cui si trovava al tempo $t=0$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, i valori di aspettazione degli operatori R e dR/dt.

ESERCIZIO N° 2
Un sistema è costituito da due particelle la cui interazione reciproca è descritta da un potenziale di oscillatore armonico unidimensionale nella coordinata relativa $x=x_1-x_2$, avente pulsazione dipendente dagli spin $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$ delle particelle. Nel sistema del centro di massa, l' Hamiltoniana che descrive le particelle è:

$$H=\frac{p^2}{2\,m}+\frac{1}{2}\,m\,\omega^2\left(1+\frac{2\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\hbar^2}\right)^2 x^2.$$

a) Determinare autostati ed autovalori dell' Hamiltoniana nei casi in cui le particelle sono:

- due bosoni *distinguibili* di spin 0;

- due bosoni *indistinguibili* di spin 0;
- due fermioni *indistinguibili* di spin 1/2;
- due bosoni *indistinguibili* di spin 1.

Si assuma che le particelle siano fermioni indistinguibili di spin 1/2. All' istante iniziale $t=0$ le particelle si trovano in uno stato tale che: i) una misura dell' energia produce con certezza il risultato $E=(9/4)\,\hbar\omega$; ii) una misura della componente z dello spin totale produce con certezza il risultato $S_z=0$; iii) il valore medio dello spin totale S^2 è pari ad $\hbar^2$; iv) il valore medio dell' operatore $(a^3+a^{\dagger\,3})\,S_{1z}$ è pari a $-\sqrt{6}\hbar$.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo generico $t>0$.

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA

15 Settembre 2004

ESERCIZIO N^{O}. 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x)$$

dove $V_0(x)$ e $V_1(x)$ sono definiti da:

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } |x| < a \\ +\infty & \text{per } |x| > a \end{cases} \quad , \quad V_1(x) = \begin{cases} -V_1 & \text{per } 0 < x < a \\ 0 & \text{per } x < 0 \text{ e } x > a \end{cases}$$

con V_1 costante positiva.

a) Determinare la condizione che determina gli autovalori positivi ($E > 0$) dell'energia e le corrispondenti autofunzioni, queste ultime a meno di una costante di normalizzazione lasciata indeterminata.

b) Determinare la condizione cui deve soddisfare il potenziale V_1 perchè esista l'autovalore $E = 0$.

c) Considerando il potenziale $V_1(x)$ come una perturbazione, determinare gli autovalori dell'energia al primo ordine dello sviluppo perturbativo.

ESERCIZIO N^{O}. 2

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R. Sulla particella agisce un campo magnetico $\vec{B}$ costante e diretto lungo l' asse z. L'Hamiltoniana che descrive la particella ha dunque la forma:

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} - \mu \vec{B} \cdot \vec{L}$$

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato di L^2 corrispondente ad $l = 1$ ed in un autostato di L_x con autovalore $-\hbar$.

a) Determinare al tempo $t = 0$ i possibili risultati di una misura di L_z e le rispettive probabilità.

b) Ricordando che le autofunzioni del momento angolare orbitale corrispondenti all'autovalore $l = 1$ sono

$$Y_{1,\pm1}(\theta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \ ,$$

determinare all'istante iniziale la densità di probabilità

$$f(\cos\theta) = \int_0^{2\pi} d\varphi\, |\psi(\theta, \varphi)|^2$$

ed il valore medio di $(\cos\theta)^2$.

c) Calcolare in funzione del tempo $t > 0$ la probabilità che una misura di L_y fornisca il risultato $L_y = 0$ e gli istanti di tempo t^* in cui tale probabilità è massima.

d) <u>*Facoltativo*</u>: Determinare in funzione del tempo il valore medio di L_y.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

6 Dicembre 2004

ESERCIZIO N^{o} 1

Un sistema quantistico a due livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \hbar\omega \left(b + b^+\right)$$

dove l'azione dell'operatore b su un insieme di stati di base $|0\rangle$, $|1\rangle$ è definita da

$$b\,|0\rangle = 0\ , \qquad b\,|1\rangle = |0\rangle\ .$$

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|0\rangle$.

a) Determinare autovalori ed autovettori di H_0.

b) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi degli operatori $b\,b^+$, b^+b e $(b\,b^+ + b^+b)$.

Si consideri quindi l'aggiunta nell'Hamiltoniana del sistema di un potenziale della forma

$$V = \lambda\,\hbar\omega\, b^+b$$

c) Utilizzando la teoria delle perturbazioni, determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$ fino al secondo ordine dello sviluppo in V, e si confronti il risultato ottenuto con l'espressione esatta per tali autovalori.

ESERCIZIO N^{o} 2

L' Hamiltoniana di una particella di spin 1/2 ha la forma

$$H = c\,J^2$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è l'operatore momento angolare totale della particella e c una costante data.

All'istante $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che una misura di L^2, L_z ed S_z fornisce con certezza i valori $2\hbar^2$, $-\hbar$ e $+\hbar/2$ rispettivamente.

Determinare:

a) I possibili risultati di una misura dell' energia e le rispettive probabilità.

b) Il valore medio, in funzione del tempo, dell'operatore S_y.

c) La probabilità, in funzione del tempo, che una misura della componente S_y dello spin dia come risultato il valore $+\hbar/2$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

14 Dicembre 2004

ESERCIZIO N^o 1

Si consideri un sistema quantistico a due livelli. L' Hamiltoniana del sistema è definita dalle relazioni:

$$H|q_+\rangle = -2\,i\,\varepsilon\,|q_-\rangle\ , \qquad H|q_-\rangle = 2\,i\,\varepsilon\,|q_+\rangle + 3\,\varepsilon\,|q_-\rangle$$

dove $|q_+\rangle$ e $|q_-\rangle$ sono gli autostati normalizzati di un operatore hermitiano Q corrispondenti agli autovalori $+q$ e $-q$ rispettivamente.

All'istante iniziale $t = 0$ si esegue una misura dell'osservabile Q e si ottiene il valore $+q$.

a) Calcolare la probabilità di trovare, nell'istante iniziale, il sistema nello stato di energia più alto.

b) Determinare in quali istanti di tempo $t > 0$ il sistema si trova nuovamente nell'autostato di Q con autovalore $+q$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore di aspettazione di $\Delta Q^2 = \langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2$

ESERCIZIO N^o 2

Un gas perfetto è costituito da N particelle di massa nulla, spin 1/2 e carica elettrica q mantenute in equilibrio alla temperatura $T = 0$. Il gas è contenuto all'interno di un parallelepipedo di area di base A, situata all'altezza $z = 0$, ed altezza infinita. Il gas è inoltre soggetto all'azione di un campo elettrico esterno costante $\mathcal{E}$ diretto antiparallelamente all'asse z. L'Hamiltoniana di singola particella è pertanto:

$$H = c\,p + q\,\mathcal{E}\,z\ .$$

Calcolare:

a) L'energia di Fermi ε_F del gas, l'altezza massima z_{MAX} alla quale è possibile trovare particelle del gas e l'impulso massimo p_{MAX} posseduto da una particella del gas.

b) I rapporti $\overline{z}/z_{MAX}$, $\overline{p}/p_{MAX}$ ed $\overline{\varepsilon}/\varepsilon_F$ dove $\overline{z}$, $\overline{p}$ e $\overline{\varepsilon}$ rappresentano rispettivamente i valori medi dell'altezza, dell'impulso e dell'energia per particella del gas.

c) La densità degli stati $g(\varepsilon)$ del gas.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10 Gennaio 2005

ESERCIZIO N^o 1

Si consideri un oscillatore anarmonico descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}m\,\omega^2 x^2 + \lambda\frac{m^2\omega^3}{\hbar}\,x^4\ .$$

Utilizzando la teoria delle perturbazioni fino al primo ordine dello sviluppo in λ determinare:

a) Gli autovalori E_n dell' energia.

b) Lo stato fondamentale del sistema.

c) Il valore medio di x^2 nello stato fondamentale.

d) <u>*Facoltativo*</u>: Il prodotto delle indeterminazioni $\Delta x\,\Delta p$ nello stato fondamentale.

Per effettuare i calcoli si utilizzi l' identità:

$$(a + a^+)^4 = a^4 + (a^+)^4 + 4\,a^+\,a^3 + 4\,(a^+)^3\,a + 6\,(a^+)^2\,a^2 + 6\,a^2 + 6\,(a^+)^2 + 12\,a^+\,a + 3$$

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di spin 1/2, momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{S}$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ parallelo all' asse x. L' Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -gB\,S_x\ .$$

a) Determinare autovalori ed autostati dell' operatore $\dot{S}_z \equiv dS_z/dt$.

b) Sapendo che all' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell' autostato dell' operatore $\dot{S}_z$ corrispondente all' autovalore più basso, determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$ generico.

c) Calcolare in funzione del tempo la probabilità di trovare a seguito di una misura di S_z il valore $+\hbar/2$ e gli istanti t^* in cui tale probabilità è massima.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Aprile 2005

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m, vincolata a muoversi in una dimensione, è soggetta al potenziale $V(x)$ definito da:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{per } x < 0 \\ -V_0 & \text{per } 0 < x < a \\ +V_0 & \text{per } x > a \end{cases}$$

con V_0 costante positiva.

a) Trovare i valori della costante V_0 tali che la particella può trovarsi in un autostato dell' Hamiltoniana con autovalore $E = 0$.

b) Nel caso in cui V_0 è uguale al minimo dei valori precedentemente trovati, scrivere la f.d.o. dell' autostato dell' Hamiltoniana con autovalore $E = 0$, opportunamente normalizzata.

c) Si consideri la particella nell' autostato con $E = 0$. Calcolare le probabilità che, a seguito di una misura della posizione, la particella venga trovata rispettivamente all'interno o all'esterno della buca di potenziale, ossia del segmento $0 < x < a$.

d) Si assuma ora che la particella si trovi nello stato descritto dalla f.d.o.

$$\psi(x) = \begin{cases} N\left[1 - \cos(\lambda x + b)\right] & \text{per } 0 < x < a \\ 0 & \text{per } x < 0 \text{ e } x > a \end{cases}$$

dove N è una costante di normalizzazione. Determinare i possibili valori delle costanti λ e b.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m e spin 1/2 è soggetta all' azione di un potenziale armonico tridimensionale. L' Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = \frac{1}{2\,m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{m\,\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) .$$

a) Mostrare che l' Hamiltoniana del sistema commuta con gli operatori di momento angolare L^2, L_i, S^2, S_i, J^2, J_i, con $i = x, y, z$.

b) Scrivere le autofunzioni dei primi due livelli energetici dell' oscillatore come combinazione lineare delle autofunzioni simultanee dell' energia, del momento angolare orbitale e del momento angolare di spin, della forma

$$\psi_{nlm\sigma}(\vec{r}) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\, \chi_\sigma .$$

Determinare inoltre l' energia ed il grado di degenerazione dei primi due livelli energetici.

Si supponga di aggiungere all' Hamiltoniana un' interazione del tipo spin-orbita, ossia della forma:

$$H_{LS} = \frac{a}{m^2\,c^2}\,\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\,\vec{L}\cdot\vec{S},$$

dove a è una costante adimensionale e V è il potenziale di oscillatore armonico.

c) Determinare i nuovi livelli di energia del sistema e mostrare in particolare come l' interazione spin-orbita rimuove parzialmente la degenerazione dei primi due livelli energetici.

Si ricorda che le autofunzioni dell'energia per l'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\, H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right) \quad , \quad \xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$H_0(\xi) = 1 \quad , \quad H_1(\xi) = 2\xi \quad , \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \quad \ldots$$

e che le autofunzioni del momento angolare orbitale corrispondenti agli autovalori $l = 0$ ed $l = 1$ sono:

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_{1\pm1}(\vartheta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\text{sen}\,\vartheta\, e^{\pm i\varphi}, \quad Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\vartheta$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

4 Luglio 2005

ESERCIZIO N^o 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi, in una dimensione, in una buca di potenziale infinita definita da

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } |x| \leq a/2 \\ \infty\,, & \text{per } |x| \geq a/2\,. \end{cases}$$

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato descritto dalla f.d.o.

$$\psi(x) = \begin{cases} A\,(a/2 + x)\,, & \text{per } -a/2 \leq x \leq 0 \\ A\,(a/2 - x)\,, & \text{per } 0 \leq x \leq a/2 \\ 0\,, & \text{per } |x| \geq a/2\,. \end{cases}$$

Determinare:

a) Il valore della costante A.

b) I valori medi della posizione $\langle x\rangle$, del suo quadrato $\langle x^2\rangle$, e l'indeterminazione Δx al tempo $t = 0$.

c) I possibili risultati di una misura dell'energia, le rispettive probabilità e, utilizzando i risultati ottenuti, il valore medio dell'energia.

d) La f.d.o. della particella al tempo $t > 0$.

Si consideri che vale la seguente sommatoria: $\displaystyle\sum_{n\,\text{dispari}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di massa infinita e spin 1 è immersa in un campo magnetico costante diretto lungo l'asse x, $\vec{B} = B\,\hat{x}$. L' Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -g\,B\,S_x\,,$$

essendo $\vec{\mu} = g\vec{S}$ il momento magnetico della particella.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che: i) la probabilità di ottenere come risultato di una misura dell'energia il valore $E = 0$ è nulla; ii) il valore medio dell'energia è $\langle E\rangle = 0$.

a) Determinare lo stato iniziale della particella, mostrando che non risulta univocamente determinato.

b) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio dell'operatore S_z.

Si consideri poi lo stesso sistema in presenza di un campo magnetico aggiuntivo, meno intenso, diretto lungo l'asse z, $\vec{B}' = \varepsilon B\,\hat{z}$. La nuova espressione dell'Hamiltoniana è pertanto:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\left(\vec{B} + \vec{B}'\right) = -g\,B\,(S_x + \varepsilon S_z)\,.$$

c) Calcolare gli autovalori dell'energia.

d) *<u>Facoltativo:</u>* Confrontare il risultato ottenuto con la previsione della teoria delle perturbazioni al secondo ordine in ε.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

19 Luglio 2005

ESERCIZIO N^o 1

Un oscillatore armonico quantistico unidimensionale, descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2\,,$$

si trova all'istante iniziale $t = 0$ in uno stato tale che: i) una misura dell'energia fornisce solo valori $E \leq 9/2\,\hbar\omega$; ii) una misura della parità fornisce con certezza il valore $P = +1$; iii) i possibili risultati della misura dell'energia sono equiprobabili.

a) Determinare lo stato iniziale del sistema, mostrando che alcune fasi relative non risultano determinate dalle suddette condizioni.

b) Calcolare il valore medio dell'operatore x^2 in funzione del tempo.

Si consideri quindi il sistema in presenza di una perturbazione descritta dal potenziale:

$$V = \frac{\lambda\hbar\omega}{4}\,(a + a^\dagger)^2\,.$$

c) Calcolare, fino al secondo ordine in teoria delle perturbazioni, le correzioni ai livelli energetici E_n.

ESERCIZIO N^o 2

Due particelle di spin 1/2 si trovano nello stato di singoletto (spin totale $S = 0$). Si consideri l'operatore $S^{(1)}_{\hat{a}}$ che rappresenta la proiezione dello spin della particella 1 nella direzione individuata dal versore $\hat{a}$,

$$S^{(1)}_{\hat{a}} = a_x S^{(1)}_x + a_y S^{(1)}_y + a_z S^{(1)}_z\,,$$

con $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$. Sia inoltre $S^{(2)}_{\hat{b}}$ l'analogo operatore di spin della particella 2 nella direzione individuata dal versore $\hat{b}$. Calcolare, nello stato in questione,

a) I valori medi $\langle S^{(1)}_{\hat{a}}\rangle$ ed $\langle S^{(2)}_{\hat{b}}\rangle$.

b) Il valore medio $\langle S^{(1)}_{\hat{a}} S^{(2)}_{\hat{b}}\rangle$, mostrando che il risultato è funzione solo dell'angolo compreso tra le direzioni individuate dai versori $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

c) La probabilità che, a seguito di una misura di entrambi gli spin $S^{(1)}_{\hat{a}}$ ed $S^{(2)}_{\hat{b}}$, le particelle vengano trovate nello stato $|a_\uparrow b_\downarrow\rangle$ corrispondente a $S^{(1)}_{\hat{a}} = +\hbar/2$ ed $S^{(2)}_{\hat{b}} = -\hbar/2$. Calcolare in particolare il valore di tale probabilità nei tre casi: i) $\hat{a}$ parallelo a $\hat{b}$; ii) $\hat{a}$ antiparallelo a $\hat{b}$; iii) $\hat{a}$ ortogonale a $\hat{b}$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
7 Settembre 2005

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + 1/2 \right) \ ,$$

dove l'azione dell'operatore a su un determinato insieme di stati di base, $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, è definita dalle relazioni

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \quad , \quad n = 0, 1, 2$$

ed $a^\dagger$ è il suo operatore hermitiano coniugato.

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova in un autostato dell'operatore $\xi = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$ corrispondente all'autovalore 0.

Determinare:

a) Le matrici rappresentative nella base $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$ degli operatori a, $a^\dagger$ ed H e del commutatore $[a, a^\dagger]$.

b) I possibili risultati di una misura dell'energia del sistema, le corrispondenti probabilità ed il valore medio dell'energia.

c) I valori di aspettazione, in funzione del tempo, degli operatori ξ e ξ^2.

d) *Facoltativo:* Gli operatori da/dt e $da^\dagger/dt$.

ESERCIZIO N° 2

Un gas perfetto è costituito da N particelle identiche relativistiche di massa m e spin 1/2 mantenute in equilibrio alla temperatura $T = 0$. Le particelle sono vincolate a muoversi in due dimensioni all'interno di una regione piana di area A. L'energia di singola particella è pertanto

$$\varepsilon = \sqrt{c^2\,p^2 + m^2\,c^4} \ ,$$

dove $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ è il modulo dell'impulso.

Calcolare:

a) L'energia di Fermi ε_F del gas.

b) Il valore medio dell'energia e dell'impulso di singola particella.

c) Il numero medio N_m di particelle con energia minore di $\varepsilon_m = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_F + m\,c^2)$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
5 Dicembre 2005

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione descritta dall'Hamiltoniana $H = H_0 + H_1$, dove

$$H_0 = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 x^2$$

è l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale e H_1 è un contributo all'energia dipendente dall'impulso,

$$H_1 = -v_0\,p\,,$$

con v_0 una costante reale.

Considerando l'Hamiltoniana H_1 come una piccola perturbazione:

a) Determinare gli autovalori dell'energia fino al secondo ordine dello sviluppo perturbativo. Discutere quale condizione deve soddisfare la costante v_0 perchè H_1 possa essere considerata effettivamente come una piccola perturbazione.

b) Determinare la f.d.o. dello stato fondamentale della particella al primo ordine dello sviluppo perturbativo.

c) Verificare che le autofunzioni esatte dell'Hamiltoniana sono date da

$$\psi_n(x) = e^{\frac{i}{\hbar} m v_0 x}\,\psi_n^{(0)}(x)\,,$$

con $\psi_n^{(0)}(x)$ autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale, e determinare i corrispondenti autovalori esatti E_n. Confrontare quindi le espressioni esatte di autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana con i risultati ottenuti in teoria delle perturbazioni.

Si ricorda che le autofunzioni dell'energia per l'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\,H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right) \quad , \quad \xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\xi & H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi & H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2

Due particelle identiche di massa m e spin 0 sono vincolate a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto

$$H = \frac{1}{2\,mR^2}\left(L_1^2 + L_2^2\right) \ ,$$

dove $\vec{L}_1$ ed $\vec{L}_2$ sono i momenti angolari orbitali delle due particelle.

Le particelle si trovano in uno stato tale che:

i) una misura dell'energia fornisce con certezza un risultato $E \leq \dfrac{2\hbar^2}{mR^2}$;

ii) una misura della componente z del momento angolare orbitale totale delle particelle fornisce con certezza il risultato $L_z = \hbar$.

a) Mostrare che esistono solo due autostati dell' Hamiltoniana compatibili con le suddette condizioni e che possiedono la corretta proprietà di simmetria rispetto allo scambio delle due particelle. Esprimere questi due autostati come combinazione lineare degli stati $|l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle$ autostati simultanei degli operatori L_1^2, L_{1z}, L_2^2, L_{2z}.

Si supponga invece che le due particelle identiche abbiano spin 1/2.

b) Determinare gli autostati dell'Hamiltoniana che soddisfano le stesse condizioni i) e ii), discutendo separatamente i due casi in cui le particelle si trovino in uno stato di singoletto o di tripletto.

Si considerino infine tre particelle identiche di spin 0. In questo caso l'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{1}{2\,mR^2}\left(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2\right) \ .$$

c) Quali sono i possibili autostati di H che soddisfano le condizioni i) e ii)?

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

19 Dicembre 2005

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , \quad \text{per } x < 0 \\ -\dfrac{\hbar^2\lambda}{2\,m\,a}\,\delta\,(x-a) & , \quad \text{per } x > 0 \qquad (\lambda > 0)\ . \end{cases}$$

a) Determinare quale valore deve assumere il parametro λ affinchè la particella possa trovarsi in uno stato con energia $E = 0$.

b) Assumendo che la particella si trovi nello stato con energia $E = 0$, determinare quanto valgono le probabilità relative

$$\frac{\mathrm{P}(0 < x < a)}{\mathrm{P}(a < x < 2\,a)} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{P}(a < x < 2\,a)}{\mathrm{P}(2\,a < x < 3\,a)}$$

dove si è indicato con $\mathrm{P}(x_1 < x < x_2)$ la probabilità di trovare la particella in una posizione compresa tra i punti x_1 ed x_2.

c) Si studino quindi gli stati legati della particella, corrispondenti alle energie $E < 0$. Determinare in questo caso le autofunzioni dell'Hamiltoniana, lasciando eventualmente indeterminata la costante di normalizzazione, e l'equazione che determina i corrispondenti autovalori dell'energia.

d) _Facoltativo_: Studiare graficamente le soluzioni dell'equazione che determina gli autovalori negativi dell'energia mostrando che per la particella esiste al più un solo stato legato e soltanto per determinati valori del parametro λ.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle identiche di spin 1/2 interagiscono reciprocamente mediante un potenziale di tipo armonico tridimensionale con frequenza dipendente dall'orientazione relativa degli spin $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$ delle particelle. Le particelle sono inoltre immerse in un campo magnetico esterno $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. Trascurando il moto del centro di massa del sistema, l'Hamiltoniana che descrive le due particelle è:

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\vec{r}^{\,2}\left(1 - \frac{2}{\hbar^2}\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\right) - \mu\,B\,(S_{1z} + S_{2z})\ ,$$

dove $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ rappresenta la posizione relativa delle due particelle, $\vec{p}$ è il suo impulso coniugato, m è la massa ridotta e $\mu\,\vec{S}$, con $\mu > 0$, il momento magnetico delle particelle.

a) Determinare l'energia del livello fondamentale e del primo livello eccitato del sistema, i corrispondenti autostati ed il relativo grado di degenerazione nei due casi: $\vec{B} = 0$ e $\vec{B} \neq 0$.

b) All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano in uno stato tale che l'energia dovuta al potenziale armonico è la minima possibile ed una misura della componente S_x dello spin totale produce con certezza il valore $+\hbar$. Determinare lo stato del sistema al tempo generico $t > 0$.

c) Calcolare in funzione del tempo i valori medi degli operatori di spin totale S_z ed S_x.

N.B.: nel sistema del centro di massa lo scambio delle due particelle corrisponde in termini delle coordinate spaziali allo scambio $\vec{r} \to -\vec{r}$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10 Gennaio 2006

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla f.d.o.

$$\psi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\xi(1-\xi)\,\psi_0(\xi) \qquad , \qquad \text{dove} \quad \xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x$$

e $\psi_0(\xi)$ è l'autofunzione relativa allo stato fondamentale dell'oscillatore.

Determinare:

a) La probabilità che una misura di posizione dell'oscillatore al tempo $t = 0$ dia come risultato un valore $x > 0$ e stabilire se tale probabilità risulta maggiore o minore di $1/2$.

b) Il valore medio della parità al tempo $t = 0$.

c) I valori medi, in funzione del tempo $t > 0$, della posizione e della velocità $v = dx/dt$, verificando che tali valori medi soddisfano l'identità

$$\langle v\rangle_t = \frac{d}{dt}\langle x\rangle_t \; .$$

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\; H_n(\xi)\; \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\xi & H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi & H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

Si ricorda inoltre il risultato generale per gli integrali di tipo gaussiano

$$\int_0^\infty d\xi\, \xi^\alpha\, e^{-\xi^2} = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

dove $\Gamma(s)$ è la funzione Gamma di Eulero.

ESERCIZIO N° 2

Un gas perfetto, costituito da N particelle di massa m e spin 1, è mantenuto in equilibrio ad una temperatura T minore della temperatura di condensazione T_0. Sulle particelle del gas agisce la forza peso diretta lungo l'asse z, cosicchè l'Hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\,m} + m\,g\,z \; .$$

Il gas è contenuto all'interno di un recipiente cilindrico di altezza infinita la cui base, di area A, è posta alla quota $z = 0$.

Utilizzando l'approssimazione semiclassica, determinare:

a) Il numero di stati $\mathcal{N}(\varepsilon)$ con energia minore di ε e la densità degli stati $g(\varepsilon) = d\mathcal{N}(\varepsilon)/d\varepsilon$.

b) La temperatura di condensazione T_0 e la frazione media del numero di particelle del gas che si trovano nello stato fondamentale.

c) L'energia media per particella ed il calore specifico.

d) L'entropia media per particella, mostrando come questa risulti proporzionale al calore specifico del gas.

Nei risultati si lascino simbolicamente indicati gli integrali

$$J_n \equiv \int_0^\infty \frac{dx\ x^{n-1}}{e^x - 1} .$$

ESERCIZIO SUPPLEMENTARE

Una particella di massa m e spin 0 è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R. La particella è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ costante e diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = \frac{L^2}{2\,m\,R^2} - \mu\,\vec{L}\cdot\vec{B} \ .$$

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova in un autostato simultaneo degli operatori L^2 ed L_y, corrispondente rispettivamente agli autovalori $2\,\hbar^2$ ed $\hbar$.
Determinare:

a) Lo stato iniziale della particella come combinazione lineare di autostati dell' Hamiltoniana.

b) I possibili risultati di una misura di L_x al tempo $t = 0$ e le corrispondenti probabilità.

c) Il valore medio in funzione del tempo della componte L_y del momento angolare della particella.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Aprile 2006

ESERCIZIO N° 1

Si consideri un pendolo quantistico di massa m e lunghezza ℓ descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{p_\vartheta^2}{2\,m\,\ell^2} - m\,g\,\ell\cos\vartheta \ ,$$

dove ϑ è l'angolo che definisce la posizione del pendolo e $p_\vartheta = -i\,\hbar\,\dfrac{d}{d\vartheta}$ il suo momento coniugato. Le autofunzioni dell' operatore p_ϑ, con la corretta periodicità in ϑ, sono della forma

$$\varphi_s(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\,s\,\vartheta} , \qquad \text{con } s = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

All' istante iniziale $t = 0$, il sistema si trova in uno stato tale che:
i) una misura dell' impulso p_ϑ può fornire come risultato solo i valori 0, $\pm\hbar$;
ii) lo stato è autostato simmetrico della parità rispetto a ϑ, ossia $\psi(\vartheta) = \psi(-\vartheta)$;
iii) il valore medio dell'energia cinetica risulta $\langle p_\vartheta^2/(2\,m\,\ell^2)\rangle = \hbar^2/(4\,m\,\ell^2)$.

a) Calcolare i commutatori tra l' operatore p_ϑ ed i seguenti operatori: ϑ, senϑ, $\cos\vartheta$, sen$^2\vartheta$ e $\cos^2\vartheta$.

b) Determinare l' espressione più generale della funzione d'onda al tempo $t = 0$ che soddisfa le suddette condizioni.

c) Considerando il potenziale gravitazionale $V(\vartheta) = -m\,g\,\ell\cos\vartheta$ come una piccola perturbazione, calcolare la correzione all'energia e alla funzione d'onda dello stato fondamentale fino al primo ordine <u>non nullo</u> della teoria delle perturbazioni.

d) <u>FACOLTATIVO</u>: Calcolare le correzioni all'energia del primo livello eccitato (degenere) fino al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Un rotatore quantistico con momento di inerzia I e spin 1/2 è descritto dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{L^2}{2I} + a\,\vec{L}\cdot\vec{S} + b\,(L_z + S_z) \ ,$$

dove a e b sono costanti.

All'istante iniziale $t = 0$, il rotatore si trova in un autostato simultaneo degli operatori L^2, L_z ed S_z corrispondente rispettivamente agli autovalori $2\,\hbar^2$, $\hbar$ e $-\hbar/2$.

a) Calcolare i commutatori dell' Hamiltoniana con gli operatori L^2, L_z, S^2, S_z, J^2 e J_z.

b) Determinare i possibili risultati di una misura di J^2 e J_z al tempo $t = 0$ e le rispettive probabilità.

c) Determinare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura di L_z, le corrispondenti probabilità ed i valori medi di L_z ed S_z.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

3 Luglio 2006

ESERCIZIO N^o 1

Una particella di massa m priva di spin si muove in una dimensione soggetta al potenziale:

$$V(x) = -V_0\, a\, [\delta(a+x) + \delta(a-x)] - V_1\, \theta(a+x)\, \theta(a-x)$$

dove V_0, V_1 ed a sono costanti positive.

a) Determinare la condizione sulla costante V_0 affinchè esista uno stato con energia $E = -V_1$ descritto da una funzione d'onda *simmetrica* rispetto allo scambio $x \to -x$. Determinare inoltre la corrispondente funzione d'onda (inclusa la costante di normalizzazione moltiplicativa).

b) Determinare la condizione sulla costante V_0 affinchè esista uno stato con energia $E = -V_1$ descritto da una funzione d'onda *antisimmetrica* rispetto allo scambio $x \to -x$ e determinare anche in questo caso la corrispondente funzione d'onda.

c) Considerando lo stato con energia $E = -V_1$ descritto dalla funzione d'onda simmetrica, determinare la condizione su V_1 affinchè la probabilità di trovare la particella nella regione $|x| \leq a$ risulti maggiore della probabilità di trovarla nella regione $|x| \geq a$.

ESERCIZIO N^o 2

Tre particelle *distinguibili* di spin 1/2 sono descritte da un' Hamiltoniana della forma

$$H = a\, S^2$$

dove a è una costante ed $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2} + \vec{S_3}$ rappresenta l'operatore di spin totale delle tre particelle. All' istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano nello stato $|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$ autostato simultaneo di S_{1z}, S_{2z} ed S_{3z} corrispondente agli autovalori $+\hbar/2$, $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$ rispettivamente.

a) Determinare gli autostati simultanei $|s, s_z\rangle$ degli operatori di spin totale S^2 ed S_z come combinazione lineare degli autostati $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$, ... degli spin di singola particella. *Suggerimento*: a tale scopo si combinino dapprima tra loro gli autostati di S_{1z} ed S_{2z} in termini degli autostati di spin totale $S_{12}^2 = (\vec{S_1} + \vec{S_2})^2$ e della sua componente z e successivamente questi ultimi con gli autostati di S_{3z}.

b) Determinare il vettore di stato del sistema al tempo generico $t > 0$ e le probabilità, in funzione del tempo, che una misura dello spin totale delle tre particelle fornisca rispettivamente i valori $s = 3/2$ ed $s = 1/2$.

c) Determinare la probabilità in funzione del tempo che una misura della componente z dello spin della terza particella fornisca il valore $s_{3z} = -\hbar/2$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

18 Luglio 2006

ESERCIZIO N^o 1

Un sistema quantistico a due stati è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = H_0 + V\,,$$

dove

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad V = \begin{pmatrix} 2\,v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed ε e v sono due costanti reali e positive.

a) Utilizzando la teoria delle perturbazioni, determinare gli autovalori dell'energia fino al secondo ordine dello sviluppo in $\delta \equiv v/\varepsilon$ ed i corrispondenti autovettori fino al primo ordine in δ.

b) Determinare autovalori ed autovettori esatti dell'Hamiltoniana e confrontare i risultati con quelli ottenuti mediante la teoria delle perturbazioni.

c) Si consideri il sistema nello stato rappresentato dal vettore

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando i risultati ottenuti con la teoria delle perturbazioni, calcolare la probabilità che, a seguito di una misura dell'energia, il sistema venga trovato nello stato fondamentale.

d) *Facoltativo*: Determinare il valore esatto di tale probabilità e confrontare il risultato con quello ottenuto mediante la teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N^o 2

Due particelle identiche di spin 0 e momento di inerzia I sono descritte dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{L_1^2 + L_2^2 + \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2}{2I}\,,$$

dove $\vec{L}_1$ ed $\vec{L}_2$ rappresentano gli operatori di momento angolare orbitale delle due particelle. (N.B.: $\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 = \frac{1}{2}\,(L^2 - L_1^2 - L_2^2)$, dove $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ è il momento angolare orbitale totale del sistema).

a) Classificare gli autostati dell'Hamiltoniana corrispondenti ad autovalori di L_1^2 ed L_2^2 minori o uguali di $2\,\hbar^2$ e che posseggono le corrette proprietà di simmetria rispetto allo scambio delle particelle. Determinare inoltre i corrispondenti autovalori dell'energia e le rispettive degenerazioni.

b) Si aggiunga ora all'Hamiltoniana un termine della forma

$$H_B = b\,(L_{1z} + L_{2z}) \ ,$$

dove b è una costante reale compresa nell'intervallo $0 < b < \hbar/2I$. Limitandosi ancora a considerare i soli stati di cui al punto a), determinare il nuovo spettro di autovalori dell'energia, graficando schematicamente la posizione dei livelli ed indicandone le rispettive degenerazioni.

c) All'istante iniziale $t = 0$, le particelle si trovano in uno stato tale che una misura di L_1^2 ed L_2^2 fornisce con certezza i valori $L_1^2 = L_2^2 = 2\,\hbar^2$ ed una misura della componente z dei momenti angolari orbitali fornisce il risultato $L_{1z} = L_{2z} = 0$. Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ e i possibili risultati di una misura dell'energia e della componente L_z del momento angolare totale e le rispettive probabilità.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Settembre 2006

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi, in una dimensione, in una buca di potenziale infinita definita da

$$V(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{per } |x| \leq a \\ \infty \ , & \text{per } |x| \geq a \ . \end{cases}$$

a) Se la particella si trova nello stato descritto dalla f.d.o.

$$\psi(x) = \begin{cases} N\,(x^2/a^2 - 1) \ , & \text{per } |x| \leq a \\ 0 \ , & \text{per } |x| \geq a \ . \end{cases}$$

determinare il valore della costante di normalizzazione N, i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità. Quale risulta essere il valore di energia più probabile? E quanto vale la sua probabilità?

b) Si assuma di sottoporre il sistema ad una piccola perturbazione $V_1(x)$. Utilizzando la teoria delle perturbazioni, calcolare le correzioni al primo ordine ai livelli energetici del sistema nei tre casi seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & V_1(x) = \varepsilon \ , & 0 \leq x \leq a \\ \text{ii)} & V_1(x) = \varepsilon\, x/a \ , & |x| \leq a \\ \text{iii)} & V_1(x) = \varepsilon\, |x|/a \ , & |x| \leq a \end{array}$$

e $V_1(x) = 0$ fuori dai suddetti intervalli. In quale caso la correzione al livello di energia fondamentale risulta maggiore?

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale considerata sono:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \ , \qquad \text{con} \quad k_n a = \frac{n\pi}{2} \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e:

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cos(k_n x) \ , & \text{per } n \text{ dispari} \\ \psi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{sen}(k_n x) \ , & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di massa infinita e spin 1 è immersa in un campo magnetico costante diretto lungo l'asse z. L' Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -g\, B\, S_z \; .$$

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che: i) la probabilità di ottenere come risultato di una misura dell' energia il valore $E = +gB\hbar$ è nulla; ii) i valori medi delle tre componenti dello spin sono $\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = \langle S_z \rangle = \hbar/2$.

a) Determinare lo stato iniziale della particella.

b) Calcolare, in funzione del tempo, il valori medi degli operatori S_x, S_y ed S_z.

c) Calcolare, in funzione del tempo, le probabilità dei possibili risultati di una misura di S_x.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
4 Dicembre 2006

ESERCIZIO N° 1
Un fascio di particelle di massa m e prive di spin sono vincolate a muoversi in una dimensione soggette al potenziale

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2\,m\,a}\,\delta\,(x) + V_0\,\theta(x), \qquad V_0, a > 0 \; .$$

a) Assumendo le particelle provenienti da $x = -\infty$ con energia $\underline{E > V_0}$, determinare i coefficienti di riflessione e trasmissione R e T nel punto $x = 0$. Studiare inoltre il valore di questi coefficienti nei due limiti $E \to V_0$ ed $E \to \infty$.

b) Determinare la funzione d'onda del sistema ed i coefficienti R e T nel caso in cui le particelle, provenienti da $x = -\infty$, abbiano invece energia $\underline{0 < E < V_0}$.

c) Considerando il caso di energia $0 < E < V_0$, determinare quale frazione media delle particelle nella regione $x > 0$ si trovano ad una distanza dall'origine minore di a, ossia il rapporto delle probabilità

$$\frac{\mathrm{P}(0 \leq x \leq a)}{\mathrm{P}(0 \leq x < \infty)} \; .$$

ESERCIZIO N° 2
Si consideri un sistema composto di due particelle di spin rispettivamente $s_1 = 1$ ed $s_2 = 1/2$ immerse in un campo magnetico esterno $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. L' Hamiltoniana che descrive il sistema è

$$H = \lambda\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \mu\,\left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right) \cdot \vec{B} \; ,$$

con λ, $\mu > 0$.

a) Determinare gli autovalori dell' energia del sistema ed il relativo grado di degenerazione discutendo separatamente i due casi $\vec{B} = 0$ e $\vec{B} \neq 0$.

All'istante iniziale $t = 0$, il sistema si trova nello stato in cui le componenti z dello spin delle due particelle (in unità $\hbar$) assumono i valori $s_{1z} = -1$ e $s_{2z} = +1/2$.

b) Determinare i possibili risultati di una misura dell' energia del sistema, le rispettive probabilità ed il valore medio dell' energia.

c) Determinare, in funzione del tempo, le probabilità che una misura dello spin S_{1z} della particella 1 fornisca come risultati rispettivamente $s_{1z} = 1, 0, -1$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

14 Dicembre 2006

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , \quad \text{per } x < -a \\ -\dfrac{\hbar^2 \lambda}{2\, m\, a}\, \delta(x) + V_0\, \theta(x) & , \quad \text{per } x > -a \end{cases} \qquad ,$$

con $V_0 > 0$.

Determinare quale valore deve assumere il parametro λ affinchè la particella possa trovarsi in uno stato con energia pari rispettivamente a:

$$\textbf{a)}\ E = V_0\ ; \quad \textbf{b)}\ E = 0\ ; \quad \textbf{c)}\ E = -\frac{1}{3} V_0\ .$$

d) Assumendo che la particella si trovi nello stato con energia $E = 0$ (caso b), determinare quanto vale il rapporto delle probabilità

$$\frac{P(-a < x < 0)}{P(0 < x < \infty)}\ ,$$

dove $P(x_1 < x < x_2)$ indica la probabilità di trovare la particella in una posizione compresa tra i punti x_1 ed x_2.

ESERCIZIO N° 2

Un gas perfetto è costituito da N particelle *distinguibili*, ciascuna delle quali è un oscillatore armonico bidimensionale, mantenute in equilibrio alla temperatura T. I livelli di energia di singola particella sono pertanto

$$E_n = n\, \varepsilon\ , \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

($\varepsilon = \hbar\omega$) e la degenerazione del livello n-esimo è pari ad $n + 1$.

a) Calcolare l'energia media del sistema, mostrando che il suo valore è pari a due volte l'energia che avrebbe il gas se i livelli di energia E_n fossero non degeneri (oscillatori armonici unidimensionali).

b) Calcolare il calore specifico a volume costante del sistema, studiandone in particolare i limiti di basse ed alte temperature.

c) Calcolare l'entropia del gas e verificare che il risultato ottenuto è in accordo con il terzo principio della termodinamica.

d) Supponendo invece che il sistema sia costituito da N *fermioni indistinguibili*, calcolare l'energi di Fermi ε_F del gas (si consideri nel risultato finale la condizione $N \gg 1$).

Si ricordano i valori delle seguenti sommatorie:

$$\sum_{k=1}^{M} k = \frac{1}{2} M(M+1) \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad , \quad \frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, z^k$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

9 Gennaio 2007

ESERCIZIO N° 1

Si definisce oscillatore fermionico (o di Dirac) il sistema quantistico a due stati, $|0\rangle$ ed $|1\rangle$, descritto dagli operatori di creazione e distruzione:

$$a\,|0\rangle = 0\ , \qquad a\,|1\rangle = |0\rangle\ , \qquad a^+\,|0\rangle = |1\rangle\ , \qquad a^+\,|1\rangle = 0\ .$$

a) Determinando le matrici rappresentative degli operatori a ed a^+, mostrare che valgono le seguenti regole di anticommuntazione: $\{a,\, a^+\} = 1$, $\{a,\, a\} = \{a^+,\, a^+\} = 0$.

Si consideri quindi il sistema a quattro stati,

$$|0,0\rangle\ , \quad |1,0\rangle = a_1^+|0,0\rangle\ , \quad |0,1\rangle = a_2^+|0,0\rangle\ , \quad |1,1\rangle = a_1^+ a_2^+|0,0\rangle\ ,$$

costituito da due oscillatori fermionici e descritto dall'Hamiltoniana $H = H_1 + H_2$, dove

$$H_1 = \hbar\omega_1 \left(a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2\right) \quad , \quad H_2 = \hbar\omega_2 \left(a_1 a_2^+ + a_2 a_1^+\right)\ .$$

b) Assumendo che gli operatori di creazione e distruzione relativi a due oscillatori distinti commutino tra loro, calcolare autostati ed autovalori dell'Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nell'autostato dell'operatore

$$Q = \left(a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2\right)$$

corrispondente all'autovalore $Q = +1$.

c) Determinare, in funzione del tempo $t > 0$, i possibili risultati di una misura di Q, le rispettive probabilità ed il valore medio di Q. Verificare che nel limite $\omega_2 \to 0$ il valore medio di Q diventa indipendente dal tempo e fornirne una spiegazione.

d) *Facoltativo*: assumendo invece che gli operatori di creazione e distruzione relativi a due oscillatori distinti anticommutino tra loro, ossia $\{a_1,\, a_2\} = \{a_1^+,\, a_2\} = \{a_1,\, a_2^+\} = \{a_1^+,\, a_2^+\} = 0$, determinare come cambiano rispetto al caso precedente gli elementi di matrice dell'Hamiltoniano sugli stati $|0,0\rangle$, $|1,0\rangle$, $|0,1\rangle$ ed $|1,1\rangle$.

ESERCIZIO N° 2
Un rotatore quantistico è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_1 \left(\frac{L^2}{\hbar^2}\right) + \hbar\omega_2 \left(\frac{L_z}{\hbar}\right)$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore di momento angolare orbitale.

a) Determinare lo spettro degli autovalori dell'energia e le corrispondenti autofunzioni. Assumendo quindi $\omega_2 \ll \omega_1$, indicare quali sono i primi 9 livelli energetici del sistema.

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato del momento angolare orbitale corrispondente ad $l = 1$ e descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(\theta, \varphi; t = 0) = A\,\text{sen}\theta\ \text{sen}\,\varphi$$

dove A è una costante di normalizzazione.

b) Determinare a quale istante di tempo $t^* > 0$ la funzione d'onda del rotatore diventa proporzionale, a meno di un fattore di fase irrilevante, alla funzione

$$\psi(\theta, \varphi; t^*) = A\,\text{sen}\theta\ \cos\varphi$$

c) Mostrare che le funzioni d'onda $\psi(\theta, \varphi; 0)$ e $\psi(\theta, \varphi; t^*)$ sono autofunzioni rispettivamente degli operatori L_y ed L_x e determinarne i corrispondenti autovalori.

d) Determinare, in funzione del tempo generico $t > 0$, la probabilità che una misura di L_x fornisca come risultato $m_x = 0$ ed il valore medio di L_x.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ corrispondenti all'autovalore $l = 1$ sono:

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\text{sen}\,\theta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
28 Marzo 2007

ESERCIZIO N° 1
Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all' istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla f.d.o.

$$\psi(\xi) = A\,\xi^3 \exp\left(-\xi^2/2\right) \qquad , \qquad \text{con} \quad \xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x\ .$$

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell' energia, le rispettive probabilità ed il valore medio dell' energia.

b) Mostrare che la f.d.o. al tempo $t > 0$ ha la forma

$$\psi(\xi, t) = \left[A(t)\,\xi^3 + B(t)\,\xi\right] \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

e determinare i coefficienti $A(t)$ e $B(t)$.

c) Calcolare in funzione del tempo $t > 0$ i valori medi dell' energia potenziale e dell' energia cinetica dell' oscillatore.

d) Calcolare in funzione del tempo il prodotto delle dispersioni $\Delta x\,\Delta p$ e mostrare che il risultato è consistente, a qualunque tempo, con la relazione di indeterminazione $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\, H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di massa infinita e spin 1 è immersa in un campo magnetico costante di componenti

$$\vec{B} = \frac{B}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\ (1,\, \varepsilon,\, 0)$$

L' Hamiltoniana che descrive la particella è:

$$H = -g\,\vec{B}\cdot\vec{S}\ .$$

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell' autostato dell' operatore S_x corrispondente all' autovalore $S_x = 0$. Determinare:

a) Gli autovalori e gli autovettori dell' Hamiltoniana.

b) Le probabilità dei possibili risultati di una misura dell' energia ed il valore medio dell' energia.

c) La probabilità, in funzione del tempo $t > 0$, che una misura di S_x fornisca come risultato $S_x = 0$. Determinare infine i valori massimo e minimo che tale probabilità assume al variare del tempo.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

2 Luglio 2007

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = -V_0\, a\, \delta(x) + V_1\, a\, \delta(x-a)\ ,$$

con V_0, V_1, $a > 0$.

a) Determinare la condizione cui devono soddisfare V_0 e V_1 affinchè esista uno stato con energia $E = 0$.

b) Assumendo $V_0 = V_1$, derivare l'equazione che determina gli autovalori dell'energia corrispondenti agli stati legati, $E < 0$. Facoltativo: mostrare che questa equazione ammette sempre una ed un'unica soluzione.

c) Assumendo che la particella si trovi nello stato legato determinato al punto b), calcolare la probabilità relativa di trovare la particella nelle regioni $x < 0$ ed $x > a$, ossia il rapporto delle probabilità $\mathrm{P}(x < 0)/\mathrm{P}(x > a)$. Questo rapporto risulta maggiore o minore di 1?

ESERCIZIO N° 2

Si consideri un atomo di idrogeno, descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\,m} - \frac{e^2}{r}$$

e da autofunzioni spaziali della forma $\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) = R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$, dove R_{nl} sono le funzioni radiali per il campo coulombiano ed Y_{lm} le armoniche sferiche.

a) Calcolare il valore medio di r nello stato fondamentale dell' atomo ed i valori medi di $1/r$ nello stato fondamentale e negli stati corrispondenti al primo livello eccitato.

b) Utilizzando i risultati precedentemente ottenuti, calcolare nello stato fondamentale e negli stati corrispondenti al primo livello eccitato i valori medi dell' energia potenziale e dell' energia cinetica, mostrando che risulta sempre verificata la relazione $\langle T\rangle = -\langle V\rangle/2$. Mostrare inoltre che in tali stati il valore medio di v^2, dove $\vec{v} = \vec{p}/m$ è la velocità relativa dell' elettrone, è dato da

$$\langle v^2\rangle = \left(\frac{\alpha\, c}{n}\right)^2\ ,$$

con c la velocità della luce, $\alpha = e^2/(\hbar c)$ la costante di struttura fine ed n il numero quantico principale.

Si supponga che l' atomo si trovi nello stato descritto dalla f.d.o.

$$\psi_\lambda(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\lambda}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\lambda\, r/a_0}\ ,$$

dove λ è un parametro reale positivo ed a_0 è il raggio di Bohr, $a_0 = \hbar^2/(m\,e^2)$.

c) Calcolare in funzione di λ la probabilità che a seguito di una misura dell'energia l' atomo venga trovato nel suo stato fondamentale. Determinare in particolare il valore di tale probabilità nei casi $\lambda = 1$ e $\lambda = 1/2$.

Si ricorda che per n intero e non negativo vale il seguente integrale:

$$\int_0^\infty ds\, s^n\, e^{-s} = n!\ .$$

Si ricorda inoltre che le funzioni radiali per il campo coulombiano, normalizzate con la condizione $\int_0^\infty dr\, r^2\, |R_{nl}(r)|^2 = 1$, *sono date, per i primi valori di n, da:*

$$R_{10}(\rho) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} 2\; e^{-\rho}\ ,$$

$$R_{20}(\rho) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\rho}{2}\right) e^{-\rho/2}\ , \qquad R_{21}(\rho) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{6}}\; \rho\; e^{-\rho/2}\ ,$$

$$R_{30}(\rho) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(1-\frac{2}{3}\rho+\frac{2}{27}\rho^2\right) e^{-\rho/3}\ ,$$

$$R_{31}(\rho) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{8}{27\sqrt{6}}\left(1-\frac{\rho}{6}\right)\rho\; e^{-\rho/3}\ , \quad R_{32}(\rho) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{4}{81\sqrt{30}}\; \rho^2\; e^{-\rho/3}\ ,$$

....

con $\rho = r/a_0$. *Si ricorda infine che* $Y_{00}(\vartheta,\varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
17 Luglio 2007

ESERCIZIO N° 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale $V(x)$ definito da:

$$V(x) = \begin{cases} +V_0\,, & \text{per } |x| < a \\ 0\,, & \text{per } a < |x| < 2a \\ +\infty\,, & \text{per } |x| > 2\,a \end{cases}$$

con V_0, $a > 0$.

a) Determinare, a meno di una costante di normalizzazione, le autofunzioni dell' Hamiltoniana corrispondenti agli autovalori $\underline{E > V_0}$ e le equazioni che determinano implicitamente tali autovalori.

b) Determinare i valori del parametro V_0 per i quali esiste uno stato con energia $\underline{E = V_0}$ descritto da una funzione d' onda simmetrica rispetto allo scambio $x \to -x$.

c) Assumendo che la particella si trovi nell' autostato corrispondente ad $E = V_0$ determinato al punto b), calcolare la probabilità che, a seguito di una misura di posizione, la particella venga trovata nell' intervallo $|x| < a$.

ESERCIZIO N° 2
Un sistema quantistico con momento angolare orbitale $\ell = 1$ e spin $s = 1$ è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = a\,J_+ J_-$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è l'operatore di momento angolare totale, $J_\pm = J_x \pm i\,J_y$ ed a è una costante reale e positiva.

a) Mostrare che l' Hamiltoniana commuta con gli operatori J^2 e J_z. Determinare quindi lo spettro degli autovalori dell' energia per il sistema ed il relativo grado di degenerazione. *Facoltativo*: Mostrare che l' aggiunta all' Hamiltoniana di un termine della forma $H' = b\,J_z$ rimuove completamente la degenerazione dei livelli (a meno di degenerazioni accidentali generate per particolari valori della costante b).

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nell' autostato di L_z ed S_z corrispondente agli autovalori $L_z = \hbar$ ed $S_z = 0$.

b) Determinare i possibili risultati di una misura dell' energia del sistema, le corrispondenti probabilità ed il valore medio dell' energia.

c) Determinare, in funzione del tempo $t > 0$, i possibili risultati di una misura di L_z, S_z e J_z, le corrispondenti probabilità ed i valori medi delle tre grandezze.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
12 Settembre 2007

ESERCIZIO N° 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione descritta dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,(x - x_0)^2\ .$$

a) Considerando il termine in ω_0^2 del potenziale come una perturbazione, determinare la correzione al generico autovalore E_n dell' energia al primo ordine dello sviluppo perturbativo.

b) Determinare quindi tale correzione al secondo ordine dello sviluppo.

c) Osservando che l' Hamiltoniana H può essere riscritta, a meno di una costante additiva, come l' Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale avente centro differente dall' origine delle coordinate, determinare le espressioni esatte degli autovalori dell' energia.

d) *Facoltativo*: confrontare le espressioni esatte degli autovalori dell' Hamiltoniana con i risultati ottenuti in teoria delle perturbazioni.

Al fine di semplificare la notazione, si suggerisce di introdurre nei calcoli le variabili adimensionali $\lambda = (\omega_0/\omega)^2$ *e* $\xi_0 = (m\,\omega/\hbar)^{1/2}\,x_0$.

ESERCIZIO N° 2
Si consideri un sistema costituito da due particelle distinguibili di spin 1/2 descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{4\,a}{\hbar^2}\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{3\,a}{\hbar}\,S_{1z}\ ,$$

dove $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$ rappresentano gli operatori di spin delle due particelle ed a è una costante avente le dimensioni dell' energia.

a) Determinare gli autovalori dell' Hamiltoniana.

b) Determinare i corrispondenti autostati.

c) Assumendo che all' istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovino nell' autostato di spin totale corrispondente ad $s = 1$ ed $s_z = 0$, determinare, in funzione del tempo, la probabilità di trovare le particelle nello stato di spin totale $s = 0$.

d) *Facoltativo*: mostrare che per il sistema dato la componente S_z dello spin totale delle due particelle è una quantità conservata.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

14 Dicembre 2007

ESERCIZIO N° 1

Un fascio di particelle di massa m e prive di spin è vincolato a muoversi in una dimensione soggetto al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \ \text{per} \ \ x < -a \\ V_0 & , \ \text{per} \ \ -a < x < 0 \\ +\infty & , \ \text{per} \ \ x > 0 \end{cases}$$

con $V_0, a > 0$.

a) Assumendo le particelle provenienti da $x = -\infty$ con energia $\underline{E > V_0}$, determinare la funzione d'onda del sistema e i coefficienti di riflessione e trasmissione R e T nel punto $x = -a$.

b) Calcolare la probabilità relativa di trovare le particelle nelle regioni $-a < x < -a/2$ e $-a/2 < x < 0$, ossia il rapporto delle probabilità

$$\frac{\mathrm{P}(-a < x < -a/2)}{\mathrm{P}(-a/2 < x < 0)} \ .$$

c) Determinare la funzione d'onda del sistema nel caso in cui le particelle provengano da $x = -\infty$ con energia $\underline{E < V_0}$. (Si osservi come questa funzione d'onda può essere completamente determinata a partire dalla funzione d'onda del caso $E > V_0$ mediante una semplice sostituzione di variabile).

ESERCIZIO N° 2

Un gas perfetto è costituito da N particelle identiche di massa m e spin $1/2$ mantenute in equilibrio alla temperatura $T = 0$. Le particelle sono vincolate a muoversi su un piano ($z = 0$) soggette ad una forza radiale costante diretta verso l'origine delle coordinate. L'Hamiltoniana che descrive la singola particella del gas è pertanto

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + a\,r \ ,$$

dove $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed $a > 0$. Calcolare:

a) L'energia di Fermi ε_F del gas e l'energia media per particella.

b) I valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del gas.

c) La distanza massima dall'origine r_M a cui è possibile trovare particelle del gas e il numero medio di particelle che si trovano ad una distanza minore di $r_M/2$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Gennaio 2008

ESERCIZIO N° 1

L'Hamiltoniana di un sistema quantistico a tre stati ed un'osservabile A sono rappresentate dalle matrici

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato in cui una misura di A fornisce con certezza il risultato $A = 0$.

Determinare:

a) Il vettore di stato del sistema al tempo generico $t > 0$.

b) I possibili risultati di una misura di A al tempo t, le rispettive probabilità ed il valore medio di A.

c) La rappresentazione matriciale dell' operatore dA/dt ed il suo valore medio al tempo t.

ESERCIZIO N° 2

Un sistema è costituito da due particelle identiche di spin 1 descritte dall'Hamiltoniana

$$H = H_1^{(0)} + H_2^{(0)} + \frac{a}{\hbar^2}\,S_+ S_- \ ,$$

dove:

- $H_1^{(0)}$ ed $H_2^{(0)}$ sono Hamiltoniane di singola particella a due livelli con autovalori ed autostati definiti da

$$\begin{aligned} H_1^{(0)}|+\rangle_1 &= \varepsilon\,|+\rangle_1 \quad , \quad H_1^{(0)}|-\rangle_1 = -\varepsilon\,|-\rangle_1 \quad , \\ H_2^{(0)}|+\rangle_2 &= \varepsilon\,|+\rangle_2 \quad , \quad H_2^{(0)}|-\rangle_2 = -\varepsilon\,|-\rangle_2 \quad , \end{aligned}$$

  con $\varepsilon > 0$.

- S_+ ed S_- sono gli operatori a scala relativi allo spin totale del sistema:

$$S_\pm = S_x \pm i\,S_y \quad , \quad \text{con} \ \ S_x = S_{1x} + S_{2x} \quad , \quad S_y = S_{1y} + S_{2y} \ .$$

- a è una costante reale e positiva tale che $a < \varepsilon/3$.

a) Determinare i livelli di energia del sistema, il loro grado di degenerazione ed ordinarli dal livello fondamentale ai livelli via via più eccitati.

b) All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano in uno stato tale che: i) una misura dello spin totale S^2 produce con certezza il risultato $2\hbar^2$; ii) la probabilità che una misura della componente z dello spin totale fornisca il risultato $S_z = +\hbar$ è nulla; iii) il valore medio dell'energia è $\langle E\rangle = a$; iv) il valore medio della componente x dello spin totale è $\langle S_x\rangle = \hbar/\sqrt{2}$. Determinare tale stato.

c) Calcolare il valore medio $\langle S_x\rangle$ della componente x dello spin totale al tempo generico $t > 0$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Aprile 2008

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita definita da

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } 0 \leq x \leq L \\ \infty\,, & \text{fuori}\,. \end{cases}$$

Si considerino le funzioni d'onda

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{\sqrt{30}}{L^{n_1}}\, x\,(A-x) \\ \varphi_2(x) &= \frac{2\sqrt{210}}{L^{n_2}}\, x\,(A-x)\,(B-x) \end{aligned}\right. \quad , \qquad \text{per } 0 \leq x \leq L$$

(con $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$ fuori) che rappresentano f.d.o. approssimate per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato del sistema.

a) Determinare: i) le potenze n_1 ed n_2 imponendo che le f.d.o. φ_1 e φ_2 abbiano la corretta dimensione; ii) il coefficiente A imponendo le opportune condizioni al contorno sulle f.d.o. φ_1 e φ_2; iii) il coefficiente B imponendo l'ortogonalità delle f.d.o. φ_1 e φ_2. *Facoltativo*: è possibile determinare il coefficiente B utilizzando le sole proprietà di simmetria del sistema?

b) Calcolare i valori medi dell'energia negli stati descritti dalle f.d.o. φ_1 e φ_2 e confrontare i risultati ottenuti con gli autovalori esatti E_1 ed E_2 dell'energia del sistema ($E_n = \hbar^2\pi^2 n^2/(2mL^2)$).

c) Calcolare il valore medio della posizione della particella se questa si trova nello stato descritto dalla f.d.o. φ_1.

d) *Facoltativo*: calcolare il prodotto delle indeterminazioni $\Delta x \cdot \Delta p$ nello stato descritto dalla f.d.o. φ_1 e confrontare il risultato con il limite imposto dal principio di indeterminazione.

Nota bene: una volta determinati i coefficienti n_1, n_2, A e B, le f.d.o. φ_1 e φ_2 risultano già correttamente normalizzate.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa infinita e spin 1/2 è soggetta all'azione di un campo magnetico $\vec{B}$ costante diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -g\,B\,S_z\,,$$

dove $\vec{S}$ è l'operatore di spin e g una costante positiva.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato corrispondente all'autovalore minimo dell'operatore $S_{\hat{n}} = \vec{S} \cdot \hat{n}$, proiezione dello spin nella direzione individuata dal versore $\hat{n} = \left(\sqrt{3}/2,\, 1/2,\, 0\right)$.

a) Determinare lo stato iniziale della particella come combinazione lineare di autostati di S_z.

b) Calcolare il valore medio di $S_{\hat{n}}$ in funzione del tempo.

c) Determinare gli istanti di tempo t^* in cui la particella ritorna nell'autostato di $S_{\hat{n}}$ con autovalore minimo.

d) Calcolare il valore medio di $\dot{S}_{\hat{n}} = dS_{\hat{n}}/dt$ verificando che tale valore medio ai tempi t^* risulta nullo.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Luglio 2008

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all' istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla f.d.o.

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(2\,\xi^2 + 2\,\xi - 1\right)\,\exp\left(-\xi^2/2\right)\ ,$$

con $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\,x$.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell' energia, le rispettive probabilità ed il valore medio dell' energia.

b) Determinare l' espressione dell' operatore $\dot{x} = dx/dt$ in termini degli operatori di creazione e distruzione.

c) Calcolare, in funzione del tempo $t > 0$, il valore medio $\langle \dot{x} \rangle$ e verificare che vale la relazione

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{d}{dt}\langle x \rangle\ .$$

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\ H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\xi & H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi & H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin 1/2 si trovano nello stato di singoletto

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_z|\downarrow\rangle_z - |\downarrow\rangle_z|\uparrow\rangle_z\right)\ ,$$

dove $|\uparrow\rangle_z$ e $|\downarrow\rangle_z$ indicano gli autostati dell' operatore di spin S_z di singola particella corrispondenti rispettivamente agli autovalori $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$.

a) Esprimere lo stato $|\psi_0\rangle$ come combinazione lineare degli autostati di S_{1x} ed S_{2x} delle due particelle e, successivamente, come combinazione lineare degli autostati di S_{1y} ed S_{2y}. Fornire quindi una spiegazione dei risultati ottenuti.

b) Si supponga di eseguire una misura dello spin S_{1x} della prima particella e di ottenere come risultato $+\hbar/2$. Determinare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura, eseguita immediatamente dopo la determinazione di S_{1x}, delle seguenti osservabili: i) S_{2x}; ii) S_{2y}; iii) la coppia S_{1z} ed S_{2z}.

c) Si consideri ora l' evoluzione temporale del sistema costituito dalle due particelle quando questa è descritta dall' Hamiltoniana

$$H = g\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\ .$$

All' istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano nello stato di singoletto $|\psi_0\rangle$. Il sistema evolve quindi indisturbato fino al tempo $T > 0$. A questo punto si esegue una misura di S_{1z} e si ottiene come risultato $+\hbar/2$. Il sistema viene quindi lasciato nuovamente evolvere fino al tempo $2\,T$.

Qual è lo stato del sistema al tempo $2\,T$? E quali sono a questo tempo i possibili risultati di una misura di S_{1z} ed S_{2z} e le rispettive probabilità?

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

16 Settembre 2008

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una doppia buca di potenziale infinita definita da

$$V(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{per } -b \le x \le -a \text{ e } a \le x \le b \\ \infty\ , & \text{fuori}\ , \end{cases}$$

con $b > a > 0$.

a) Si determinino le funzioni d'onda $\psi_n^D(x)$ e $\psi_n^S(x)$ autofunzioni rispettivamente delle Hamiltoniane con la singola buca di potenziale a destra, definita da $V_D(x) = 0$ per $a \le x \le b$ e $V_D(x) = \infty$ fuori, e con la singola buca di potenziale a sinistra, definita da $V_S(x) = 0$ per $-b \le x \le -a$ e $V_S(x) = \infty$ fuori (si osservi a tale scopo che $V_S(x) = V_D(-x)$). Mostrare che le funzioni d'onda $\psi_n^D(x)$ e $\psi_n^S(x)$ sono anche autofunzioni dell'Hamiltoniana con la doppia buca di potenziale $V(x)$, determinare i corrispondenti autovalori dell'energia ed il relativo livello di degenerazione.

Si consideri quindi la particella nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = c_D\, \psi_{n_1}^D(x) + c_S\, \psi_{n_2}^S(x)\ ,$$

con $n_1 \neq n_2$ e c_D, c_S due coefficienti complessi soggetti alla condizione di normalizzazione $|c_D|^2 + |c_S|^2 = 1$.

b) Calcolare le probabilità $P(a \le x \le b)$ e $P(-b \le x \le -a)$ che una misura della posizione della particella fornisca un risultato compreso rispettivamente negli intervalli $[\,a, b\,]$ e $[\,-b, -a\,]$. Determinare inoltre i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità.

c) Calcolare il valore medio della posizione della particella in funzione dei coefficienti c_D e c_S.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m e spin nullo è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R ed è soggetta all'azione di un campo magnetico $\vec{B}$ costante e diretto lungo l'asse z ($\vec{B} = B\,\hat{z}$). L'Hamiltoniana che descrive la particella è dunque:

$$H = \frac{L^2}{2\,m\,R^2} - \mu\,B\,L_z\ .$$

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova in un autostato simultaneo degli operatori L^2 ed $L_+\,L_-$ (dove $L_\pm = L_x \pm i\,L_y$) con stesso autovalore $2\,\hbar^2$. Il valore medio di L_z è inoltre pari ad $\hbar/2$.

a) Mostrare che le suddette condizioni non sono sufficienti a determinare univocamente lo stato iniziale del sistema e derivare l'espressione più generale risultante per tale stato.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ e verificare che il valore medio dell'operatore $L_+\,L_-$ risulta indipendente dal tempo, spiegandone il motivo.

Si consideri poi lo stesso sistema in presenza di un campo magnetico aggiuntivo, meno intenso, diretto lungo l'asse x ($\vec{B} = \varepsilon B\,\hat{x}$). L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H = \frac{L^2}{2\,m\,R^2} - \mu\,B\,(L_z + \varepsilon\,L_x)\ .$$

c) Limitandosi come in precedenza a considerare il solo sottospazio degli stati con $L^2 = 2\,\hbar^2$, calcolare i nuovi autovalori dell'energia del sistema.

d) *Facoltativo*: verificare il risultato ottenuto per gli autovalori dell'energia utilizzando la teoria delle perturbazioni fino all' $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
9 Dicembre 2008

ESERCIZIO
Si considerino i tre operatori

$$A = (a^+)^2 a^2 \ , \qquad B = a^2 (a^+)^2 \ , \qquad C = a^+ a^2 a^+ \ ,$$

dove a^+ ed a sono gli usuali operatori di creazione e distruzione dell'oscillatore armonico.

a) Mostrare che gli operatori A, B e C sono hermitiani (si utilizzi eventualmente a tale scopo la regola di commutazione tra a ed a^+).

b) Indicando con $N = a^+ a$ l'operatore numero, mostrare che valgono le uguaglianze

$$A = N\,(N-1) \ , \qquad B = (N+1)\,(N+2) \ , \qquad C = N\,(N+1)$$

e che pertanto i tre operatori sono legati tra loro dalla relazione

$$C = \frac{1}{2}\,(A+B) - 1 \ .$$

Si consideri quindi lo stato $|\psi_0\rangle$ di un oscillatore che è autostato di A con autovalore nullo e per il quale valgono i valore medi $\langle\psi_0|B|\psi_0\rangle = 4$ e $\langle\psi_0|i\,(a^+ - a)\,|\psi_0\rangle = 1$.

c) Determinare $|\psi_0\rangle$ come combinazione lineare di autostati dell'Hamiltoniana.

d) Assumendo che un oscillatore si trovi nello stato $|\psi_0\rangle$ al tempo $t = 0$, determinare lo stato al tempo $t > 0$ ed il valore medio dell'operatore $(a + a^+)$ in funzione del tempo.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
2 Febbraio 2009

ESERCIZIO N° 1
Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato in cui una misura dell'osservabile Q, rappresentata dalla matrice

$$Q = q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

fornisce con certezza il risultato $+q$ ed una misura dell'energia fornisce con certezza un risultato diverso da ε.

a) Determinare lo stato del sistema al tempo iniziale e al tempo generico $t > 0$.

b) Determinare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura dell'osservabile dQ/dt e le rispettive probabilità.

Si assuma quindi di aggiungere all'Hamiltoniana del sistema una piccola perturbazione proporzionale a Q, cosicchè l'Hamiltoniana completa diventa $H + \lambda\, Q$.

c) Determinare le correzioni ai livelli di energia al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

d) *Facoltativo*: calcolare i livelli energetici esatti e confrontare il risultato con quello ottenuto mediante la teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 1, momento magnetico $\mu\vec{S}$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$ diretto lungo l'asse x. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -\mu\,\vec{S}\cdot\vec{B} = -\mu\,B\,S_x \ .$$

All' istante iniziale $t = 0$ si esegue una misura della componente z dello spin della particella e si ottiene come risultato $S_z = 0$.

Determinare, al tempo generico $t > 0$:

a) Il vettore di stato della particella.

b) I possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di S_z, il valore medio di S_z e l'indeterminazione $\Delta S_z = (\langle S_z^2\rangle - \langle S_z\rangle^2)^{1/2}$.

c) L'indeterminazione ΔS_x sulla componente x dello spin della particella e verificare che, nello stato considerato, risulta sempre soddisfatta la relazione di indeterminazione

$$\Delta S_z\ \Delta S_x \ \geq\ \frac{1}{2}\,|\langle[S_z, S_x]\rangle| \ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
16 Febbraio 2009

ESERCIZIO N° 1
Un oscillatore armonico bidimensionale isotropo è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p_x^2}{2\,m} + \frac{p_y^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\left(x^2+y^2\right) = \hbar\omega\left(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1\right)\ ,$$

dove a_x, a_x^+ ed a_y, a_y^+ sono gli operatori di creazione e distruzione degli oscillatori unidimensionali nelle coordinate x ed y rispettivamente ($a_x = (\hat{x} + i\,\hat{p}_x)/\sqrt{2}$, $a_y = (\hat{y} + i\,\hat{p}_y)/\sqrt{2}$ con $\hat{x} = x\,\sqrt{m\omega/\hbar}$, $\hat{p}_x = p_x/\sqrt{m\hbar\omega}$, ecc.).

a) Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana corrispondenti ai primi tre livelli energetici dell'oscillatore ed il relativo grado di degenerazione dei livelli.

Sia $L_z = x\,p_y - y\,p_x$ l'operatore della componente z del momento angolare orbitale.

b) Esprimere l'operatore L_z in termini degli operatori di creazione e distruzione degli oscillatori in x ed y. Utilizzando quindi il risultato ottenuto, calcolare il commutatore $[H, L_z]$.

c) Mostrare che lo stato fondamentale dell'oscillatore è anche autostato dell'operatore L_z e determinarne il corrispondente autovalore. Determinare quindi la matrice rappresentativa dell'operatore L_z nel sottospazio corrispondente al secondo livello energetico. Diagonalizzare questa matrice determinando in tal modo autovalori ed autostati dell'operatore L_z nel sottospazio considerato. *Facoltativo*: estendere il calcolo anche al sottospazio corrispondente al terzo livello di energia.

d) *Facoltativo*: scrivere le funzioni d'onda degli autostati simultanei di H ed L_z determinati al punto c), mostrando che in coordinate polari ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) la dipendenza angolare di queste funzioni è della forma $\psi \propto e^{i\,m\varphi}$, dove $\hbar m$ è l'autovalore di L_z.

Si ricorda che le autofunzioni dell'energia per l'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\,H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right) \quad , \quad \xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\xi & H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi & H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 1/2 è descritta dall' Hamiltoniana

$$H = A\,\vec{L}\cdot\vec{S}\ ,$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore di momento angolare orbitale, $\vec{S}$ l'operatore di spin ed A una costante.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato del momento angolare orbitale corrispondente ad $\ell = 2$ e descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\theta,\varphi,s_z) = \sqrt{\frac{15}{16\pi}}\ \mathrm{sen}^2\theta\ \mathrm{sen}\,2\varphi\,\chi_+\ ,$$

dove χ_+ è l'autofunzione di S_z con autovalore $+\hbar/2$.

Determinare:

a) I possibili risultati e le rispettive probabilità delle misure del quadrato del momento angolare totale J^2 e della sua componente J_z.

b) Lo stato della particella al tempo generico $t > 0$.

c) La probabilità in funzione del tempo che una misura di S_z fornisca come risultato $-\hbar/2$.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti all'autovalore $\ell = 2$ sono:

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,e^{\pm2\,i\,\varphi} \quad , \quad Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\,e^{\pm\,i\,\varphi}$$
$$Y_{2,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,\left(3\cos^2\theta - 1\right)\ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

19 Maggio 2009

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta ad un potenziale di tipo armonico. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2\,.$$

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova in uno stato tale che: i) una misura dell'energia fornisce con certezza un risultato compreso nell'intervallo $3\,\hbar\omega < E < 6\,\hbar\omega$; ii) il valore medio dell'energia vale $\langle E\rangle = 9/2\,\hbar\omega$; iii) lo stato è autostato della parità con autovalore negativo.

a) Mostrare che lo stato così definito non è univocamente determinato e derivarne l'espressione più generale. Determinare quindi lo stato evoluto al tempo $t > 0$.

b) Calcolare i valori medi $\langle V\rangle_t$ e $\langle T\rangle_t$ dell'energia potenziale e dell'energia cinetica della particella in funzione del tempo t.

c) Misurando $\langle V\rangle_t$ in funzione del tempo, si osserva che tale valore medio assume il suo valore massimo al tempo $t = 0$. Mostrare che questa osservazione aggiuntiva consente di determinare completamente lo stato iniziale dell'oscillatore.

ESERCIZIO N° 2

Un sistema è costituito da due particelle di spin 1/2 descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\Omega}{2\,\hbar} S^2 + \omega S_z\,,$$

dove $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ è l'operatore di spin totale delle due particelle ed S_z la sua componenente nella direzione z.

All'istante iniziale $t = 0$ si effettua una misura delle componenenti y degli spin delle due particelle e si ottiene come risultato $S_{1\,y} = S_{2\,y} = +\hbar/2$.

Determinare:

a) I possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura delle seguenti osservabili: S^2, S_z, $S_{1\,z}$ ed $S_{2\,z}$.

b) Lo stato del sistema al tempo generico $t > 0$.

c) I possibili risultati e le rispettive probabilità in funzione del tempo della misura di $S_{1\,y}$, $S_{2\,y}$ ed S_y.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

15 Giugno 2009

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre stati è descritto dall'Hamiltoniana $H = H_0 + V$, dove

$$H_0 = E\,(A^2 - B^2) \qquad , \qquad V = \sqrt{2}\,\varepsilon\,A$$

ed E ed ε sono costanti aventi le dimensioni di energia, con $\varepsilon \ll E$. Gli operatori A e B sono definiti da

$$\begin{aligned}
A\,|a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|b\rangle\,, & B\,|a\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}\,|b\rangle\,,\\
A\,|b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|c\rangle\,, & B\,|b\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\,|a\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|c\rangle\,,\\
A\,|c\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|b\rangle\,, & B\,|c\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\,|b\rangle\,,
\end{aligned}$$

dove gli stati $|a\rangle$, $|b\rangle$ e $|c\rangle$ costituiscono una base ortonormale.

All' istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|a\rangle$.

a) Determinare autovalori ed autovettori dell' Hamiltoniana H_0.

b) Determinare gli autovalori dell' Hamiltoniana completa $H = H_0 + V$ utilizzando la teoria delle perturbazioni fino al secondo ordine dello sviluppo in V.

c) Trascurando la perturbazione V (ponendo cioè $\varepsilon = 0$), calcolare la probabilità di trovare il sistema nello stato $|a\rangle$ al tempo generico $t > 0$.

d) *Facoltativo*: Determinare gli autovalori esatti dell'Hamiltoniana H e confrontare il risultato con quello ottenuto utilizzando la teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R. Sulla particella agisce un campo magnetico $\vec{B}$ costante e diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive la particella ha dunque la forma:

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} - \mu\,B\,L_z\,.$$

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato simultaneo di L^2 corrispondente ad $\ell = 1$ e di $L_{\hat{n}}$ con autovalore nullo, dove $L_{\hat{n}} \equiv \vec{L}\cdot\hat{n}$ indica la proiezione del momento angolare orbitale nella direzione individuata dal versore $\hat{n} = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$.

a) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo il valore medio di $L_{\hat{n}}$ e la probabilità che una misura di $L_{\hat{n}}$ fornisca il risultato $L_{\hat{n}} = 0$. In quali istanti di tempo tale probabilità vale 1 come al tempo $t = 0$?

c) Determinare la densità di probabilità di $\cos\theta$,

$$f(\cos\theta) = \int_0^{2\pi} d\varphi\, |\psi(\theta,\varphi)|^2 \ ,$$

all'istante iniziale t=0.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ *corrispondenti all'autovalore* $\ell = 1$ *sono:*

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
6 Luglio 2009

ESERCIZIO N° 1
Un fascio di particelle di massa m e prive di spin, provenienti da $x = -\infty$, incide con energia $E = V_0$ sul potenziale $V(x) = V_b(x) + V_\delta(x)$, dove

$$V_b(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ per } x < 0 \\ V_0 & , \text{ per } 0 < x < L \\ +\infty & , \text{ per } x > L \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V_\delta(x) = \lambda\,\hbar\sqrt{\frac{V_0}{2m}}\,\delta(x) \ ,$$

con $L, V_0, \lambda > 0$.

a) Determinare la funzione d'onda del sistema.

b) Calcolare il rapporto delle probabilità di trovare le particelle nelle regioni $0 < x < L/2$ e $L/2 < x < L$.

c) Si assuma di rimuovere la barriera di potenziale a delta (ossia di porre $\lambda = 0$). Mantenendo invariato il flusso di particelle incidenti e la loro energia ($E = V_0$), determinare se la probabilità di trovare particelle nella regione $0 < x < L$ risulta maggiore o minore di quella che si ha in presenza della barriera ($\lambda \neq 0$).

d) *Facoltativo*: mostrare che la funzione d'onda delle particelle nella regione $x < 0$ si può scrivere nella forma

$$\psi(x) = A\,\mathrm{sen}(k\,x + \delta)$$

e determinare i valori del vettore d'onda k e della fase δ.

ESERCIZIO N° 2
Gli stati quantistici di una particella di spin 1/2 sono caratterizzati da una coppia di numeri quantici, n e σ, dove il numero n può assumere i valori $n = 0, 1$ e σ rappresenta la proiezione dello spin della particella nella direzione individuata dall'asse z. Indichiamo quindi con $|n,\sigma\rangle = |0,\downarrow\rangle$, $|0,\uparrow\rangle$, $|1,\downarrow\rangle$, $|1,\uparrow\rangle$ gli stati di base del sistema.

L' Hamiltoniana che descrive la particella ha la forma

$$H = A\,a^+ a\, S_+ S_- + B\hbar\left(a^+ S_- + a\, S_+\right) \ ,$$

dove A e B sono due costanti reali e positive, $S_\pm = S_x \pm i\,S_y$ sono gli usuali operatori a scala dello spin e gli operatori a ed a^+ agiscono sugli stati $|n,\sigma\rangle$ nel modo seguente:

$$a|0,\sigma\rangle = 0 \quad , \quad a|1,\sigma\rangle = |0,\sigma\rangle \quad , \quad a^+|0,\sigma\rangle = |1,\sigma\rangle \quad , \quad a^+|1,\sigma\rangle = 0$$

(a^+ è l'operatore hermitiano coniugato di a).

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nello stato $|0,\uparrow\rangle$.

Determinare:

a) Autovalori ed autostati dell'Hamiltoniana.

b) Lo stato della particella al tempo $t > 0$, la probabilità che una misura di S_z al tempo t fornisca come risultato $S_z = -\hbar/2$ ed il valore medio di S_z al tempo t.

c) L'operatore dS_z/dt e verificare che risulta soddisfatta la relazione

$$\langle\psi_t|\frac{dS_z}{dt}|\psi_t\rangle = \frac{d}{dt}\,\langle\psi_t|S_z|\psi_t\rangle$$

dove $|\psi_t\rangle$ è lo stato della particella al tempo t.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

15 Settembre 2009

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi nel piano xy in una buca di potenziale bidimensionale infinita, definita da

$$U(x,y) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } 0 \le x \le L \quad \text{e} \quad 0 \le y \le L \\ \infty\,, & \text{fuori}\,. \end{cases}$$

a) Determinare autovalori ed autofunzioni dei primi 3 livelli energetici del sistema ed il relativo grado di degenerazione.

Sulla particella viene poi fatta agire una perturbazione della forma

$$V(x,y) = C\,x\,y\,.$$

b) Determinare l'energia dello stato fondamentale della particella al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Quale condizione deve soddisfare la costante C affinchè in questo calcolo il potenziale $V(x,y)$ possa essere effettivamente trattato come una perturbazione?

c) Determinare, al primo ordine della teoria delle perturbazioni, le correzioni all'energia del primo livello eccitato.

Si consideri che per m ed n interi valgono i seguenti integrali definiti:

$$I_0(m,n) = \int_0^1 dx\,\mathrm{sen}\,(m\pi x)\,\mathrm{sen}\,(n\pi x) = \begin{cases} 1/2 & , \ \textit{per} \ \ m = n \\ 0 & , \ \textit{per} \ \ m \neq n\,. \end{cases}$$

$$I_1(m,n) = \int_0^1 dx\,x\,\mathrm{sen}\,(m\pi x)\,\mathrm{sen}\,(n\pi x) = \begin{cases} 1/4 & , \ \textit{per} \ \ m = n \\ -\dfrac{[1-(-1)^{m+n}]\,2\,m\,n}{\pi^2\,(m^2-n^2)^2} & , \ \textit{per} \ \ m \neq n\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO N° 2

Un sistema quantistico con momento angolare orbitale $\ell = 1$ e spin $s = 1/2$ è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = a\,L_+L_- + b\,S_+S_-\,,$$

dove $L_\pm = L_x \pm i\,L_y$, $S_\pm = S_x \pm i\,S_y$ ed a e b sono due costanti reali.

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nell' autostato del quadrato del momento angolare totale J^2 e della sua proiezione J_z lungo l'asse z corrispondente agli autovalori $J^2 = (15/4)\,\hbar^2$ e $J_z = \hbar/2$.

a) Mostrare che gli autostati dell' Hamiltoniana sono anche autostati simultanei di L^2, L_z, S^2, S_z e determinare i valori medi di queste grandezze nello stato iniziale del sistema.

b) Determinare i possibili risultati di una misura dell' energia, le rispettive probabilità e lo stato del sistema al tempo generico $t > 0$.

c) Determinare in funzione del tempo i possibili risultati di una misura di J^2, le rispettive probabilità ed il valore medio di J^2.

PROVA DI ESONERO E DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
10 Dicembre 2009

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a due stati è descritto dall' Hamiltoniana

$$H_0 = E\left(\sigma_z + \sqrt{3}\,\sigma_y\right) \ ,$$

dove σ_z e σ_y sono due operatori rappresentati dalle corrispondenti matrici di Pauli,

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ .$$

a) Determinare autovalori ed autovettori di H_0.

All'istante iniziale $t = 0$, il sistema si trova nell'autostato dell'operatore σ_z con autovalore positivo.

b) Calcolare il valore medio di σ_z in funzione del tempo.

Si consideri l'aggiunta nell' Hamiltoniana di una perturbazione proporzionale a σ_z:

$$H = H_0 + V \qquad \text{con} \qquad V = \varepsilon\,\sigma_z \ .$$

c) Calcolare al primo ordine in teoria delle perturbazioni le correzioni agli autovalori e agli autostati dell' Hamiltoniana.

d) _Facoltativo_: Determinare gli autovalori esatti di H e confrontare il risultato con quello ottenuto al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle identiche di spin 1/2 sono vincolate a muoversi sulla superficie di una sfera descritte dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = A\left(L_1^2 + L_2^2 + \frac{1}{2}\vec{L}_1\cdot\vec{L}_2 + \frac{1}{2}\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\right) \ ,$$

dove $\vec{L}_{1,2}$ ed $\vec{S}_{1,2}$ rappresentano rispettivamente gli operatori di momento angolare orbitale e di spin delle due particelle.

a) Classificare, in termini dei corrispondenti numeri quantici, gli autostati dell' Hamiltoniana che sono anche autostati di L_1^2 ed L_2^2 con autovalore $2\hbar^2$ e che posseggono le corrette proprietà di simmetria rispetto allo scambio delle particelle. Determinare inoltre i corrispondenti autovalori dell'energia e le rispettive degenerazioni.

All'istante iniziale $t = 0$, si effettua una misura di L^2, L_z ed S_z su ciascuna delle due particelle ottenendo per i corrispondenti numeri quantici ℓ, m e σ i seguenti risultati: entrambe le particelle vengono trovate con $\ell = 1$; per una delle due particelle si ottiene poi $m = 1$, $\sigma = +1/2$ e per l'altra $m = 0$, $\sigma = -1/2$. Il vettore di stato che descrive le due particelle è dunque

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1,0\rangle |\uparrow,\downarrow\rangle - |0,1\rangle |\downarrow,\uparrow\rangle \right) \ ,$$

dove si è indicato ad esempio con $|1,0\rangle|\uparrow,\downarrow\rangle$ lo stato in cui $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $\sigma_1 = 1/2$ e $\sigma_2 = -1/2$ (per semplicità di notazione si è omesso di indicare esplicitamente nel vettore di stato i numeri quantici $\ell_1 = \ell_2 = 1$ ed $s_1 = s_2 = 1/2$).

b) Determinare lo stato delle due particelle al tempo $t > 0$.

c) *Facoltativo*: Calcolare la probabilità in funzione del tempo che effettuando una misura di L_z e di S_z su una delle due particelle si ottenga come risultato $m = 1$ e $\sigma = -1/2$. In questo caso, quali risultati fornisce una misura di L_z e S_z dell'altra particella?

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

27 Gennaio 2010

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita definita da

$$V(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{per } |x| < L/2 \\ \infty \ , & \text{per } |x| > L/2 \ . \end{cases}$$

La particella si trova nello stato fondamentale.

a) Determinare la probabilità $P(|x| < aL)$ che, a seguito di una misura della posizione della particella, questa venga trovata ad una distanza dall' origine minore di aL, con $0 \leq a \leq 1/2$.

b) Calcolare le indeterminazioni Δx e Δp su posizione e impulso della particella, verificando che il risultato ottenuto è consistente con il limite imposto dal principio di indeterminazione.

Si assuma quindi di sottoporre la particella all' azione di una perturbazione di tipo armonico della forma

$$V_P(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 - \frac{L^2}{12} \right) \ .$$

c) Calcolare la correzione al primo ordine in teoria delle perturbazioni all' energia dello stato fondamentale della particella. Sulla base del risultato ottenuto, determinare inoltre quale condizione deve soddisfare la frequanza ω affinchè la teoria delle perturbazioni risulti effettivamente applicabile.

ESERCIZIO N° 2

Un rotatore quantistico è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = a\, L^2 + b\, L_z^2 \ ,$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale del rotatore ed a e b sono due costanti reali e positive.

a) Determinare lo spettro degli autovalori dell'energia ed il grado di degenerazione dei livelli. Determinare quindi l'energia dello stato fondamentale e la condizione cui devono soddisfare i parametri a e b dell' Hamiltoniana affinchè gli autostati di L^2 corrispondenti ad $\ell = 1$ abbiano tutti energia minore degli autostati corrispondenti ad $\ell = 2$.

All' istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nell' autostato simultaneo di L^2 con autovalore $6\,\hbar^2$ e di L_x con autovalore nullo.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo generico $t > 0$.

c) Calcolare i valori medi degli operatori L_x, L_y ed L_z in funzione del tempo e verificare che i risultati ottenuti sono in accordo con l'equazione

$$\frac{d}{dt} \langle L_k \rangle_t = \frac{i}{\hbar} \langle\, [H, L_k]\, \rangle_t$$

dove $k = x, y, z$ e $\langle \ldots \rangle_t$ indica il valore medio al tempo t.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Febbraio 2010

ESERCIZIO N° 1

Due particelle di massa m_1 ed m_2, prive di spin, sono vincolate a muoversi in una dimensione soggette ad un potenziale di tipo armonico nella distanza relativa $x = x_1 - x_2$. In termini delle coordinate del centro di massa e del moto relativo, dunque, l'Hamiltoniana che descrive le due particelle è

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2 \ ,$$

dove P è l'impulso del centro di massa, p l'impulso associato al moto relativo, $M = m_1 + m_2$ la massa totale del sistema ed $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ la massa ridotta.

a) Determinare le autofunzioni dell'Hamiltoniana e i corrispondenti autovalori.

All'istante iniziale $t = 0$, le due particelle si trovano in uno stato tale che: i) il centro di massa del sistema è in quiete, ossia $P = 0$; ii) una misura dell'energia delle due particelle fornisce con certezza un risultato compreso nell'intervallo $\frac{5}{2}\,\hbar\omega \le E \le \frac{9}{2}\,\hbar\omega$; iii) la funzione d'onda è simmetrica rispetto allo scambio delle due particelle; iv) i possibili risultati di una misura dell'energia sono equiprobabili; v) il valore medio del quadrato della distanza relativa tra le due particelle è $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = \frac{7}{2}\,\hbar/(m\,\omega)$.

b) Determinare la funzione d'onda del sistema all'istante iniziale $t = 0$, mostrando che lo stato così definito non risulta ancora univocamente determinato.

c) Calcolare in funzione del tempo l'indeterminazione Δx sulla distanza relativa tra le due particelle.

d) *Facoltativo*: calcolare in funzione del tempo l'indeterminazione Δp sull'impulso associato al moto relativo, mostrando che il prodotto $\Delta x \cdot \Delta p$ soddisfa la relazione di indeterminazione.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1/2 è descritta dall' Hamiltoniana

$$H = a\, L_z S_z + b\, (L_+ S_- + L_- S_+) \ ,$$

dove $\vec{L}$ ed $\vec{S}$ sono gli operatori di momento angolare orbitale e di spin della particella, $L_\pm$ ed $S_\pm$ i corrispondenti operatori a scala ed a e b due costanti reali e positive.

Assumendo che la particella abbia momento angolare orbitale corrispondente ad $\ell = 1$, si consideri come possibile insieme di stati di base per la particella gli autostati simultanei di L^2, S^2, L_z ed S_z,

$$|1 \uparrow\rangle\,,\ |1 \downarrow\rangle\,,\ |0 \uparrow\rangle\,,\ |0 \downarrow\rangle\,,\ |-1 \uparrow\rangle\,,\ |-1 \downarrow\rangle\,,$$

dove si è indicato ad esempio con $|-1 \downarrow\rangle$ lo stato corrispondente ad $m = -1$ e $\sigma = -1/2$ (per semplicità di notazione si è omesso di indicare esplicitamente nei vettori di stato i numeri quantici $\ell = 1$ ed $s = 1/2$, il cui valore è fissato).

a) Determinare la matrice rappresentativa dell' Hamiltoniana nella base sopra indicata, mostrando che tale matrice risulta diagonale a blocchi.

b) Determinare gli autovalori dell' Hamiltoniana ed il corrispondente grado di degenerazione. Come si modificano i livelli di energia e la loro degenerazione nel caso particolare in cui i parametri a e b dell' Hamiltoniana soddisfino la relazione $b = a/2$?

Si consideri quindi la base degli autostati simultanei di J^2, J_z, L^2 ed S^2, dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è l'operatore del momento angolare totale.

c) Determinare la matrice rappresentativa dell' Hamiltoniana in questa base limitandosi per brevità a considerare il solo sottospazio di dimensione due individuato dagli autostati di J_z corrispondenti all' autovalore $J_z = +\hbar/2$.

d) *Facoltativo*: determinare l'espressione completa per la matrice Hamiltoniana nella base degli autostati di J^2, J_z, L^2 ed S^2 verificando che per $b = a/2$ tale matrice risulta diagonale. Sapreste indicarne la ragione?

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
21 Giugno 2010

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{\hbar^2\lambda}{m\,a}\,[\delta\,(x+a)+\delta\,(x-a)] & , \quad \text{per } |x| \le 2\,a \\ +\infty & , \quad \text{per } |x| > 2\,a\,, \end{cases}$$

con $\lambda > 0$.

a) Determinare, a meno di una costante di normalizzazione, le autofunzioni dell'Hamiltoniana con parità negativa ($\psi(-x) = -\psi(x)$) e l'equazione che determina implicitamente i corrispondenti autovalori dell'energia.

b) Risolvere graficamente l'equazione che determina gli autovalori dell'energia ed individuare un intervallo all'interno del quale è compreso il livello di energia più basso.

c) Normalizzare le autofunzioni dell'Hamiltoniana determinate al punto a) e calcolare la probabilità che, a seguito di una misura di posizione, la particella che si trova in uno dei suddetti autostati venga trovata nell'intervallo $-a \le x \le a$.

ESERCIZIO N° 2

Una particella priva di spin, vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera, è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = -\mu\,B\,L_x\,,$$

dove $\vec{B}$ è un campo magnetico costante diretto lungo l'asse x, $\vec{L}$ l'operatore di momento angolare orbitale e μ una costante.

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato di L^2 con $\ell = 1$ descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(\vartheta,\varphi;t=0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(\cos\vartheta - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\cos\varphi\right)\,.$$

a) Calcolare la probabilità di trovare la particella in una posizione con angolo ϑ compreso tra $0°$ e $90°$.

b) Determinare i possibili risultati di una misura di L_z e le rispettive probabilità.

c) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$ ed il valore medio di L_z in funzione del tempo.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti all'autovalore $\ell = 1$ sono:

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\,e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta\,.$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
5 Luglio 2010

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre stati è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = A^2 + B^2 + \gamma\,C^2$$

dove γ è una costante ed A, B, C sono operatori rappresentati dalle matrici

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\,.$$

a) Determinare per quale valore della costante γ l'operatore B commuta con l'Hamiltoniana. Determinare quindi, per γ generico, la rappresentazione matriciale dell'operatore dB/dt.

Si consideri il parametro γ piccolo e si tratti quindi il contributo $V = \gamma\,C^2$ nell' Hamiltoniana come una perturbazione.

b) Determinare gli autovalori di H al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

c) Verificare che gli autostati dell' Hamiltoniana completa coincidono con quelli dell' Hamiltoniana imperturbata e determinare gli autovalori esatti dell'energia.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle *identiche* di massa m sono vincolate a muoversi liberamente in due dimensioni sulla superficie di un quadrato di lato L. Il potenziale cui è soggetta ciascuna delle due particelle è pertanto

$$V(x,y) = U(x) + U(y)\,, \qquad \text{dove} \quad U(\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{per } 0 < \xi < L \\ \infty & , \quad \text{fuori}\,. \end{cases}$$

Determinare l'energia del livello fondamentale e del primo livello eccitato del sistema, il relativo grado di degenerazione e le corrispondenti autofunzioni dell'Hamiltoniana nei due casi:

a) particelle di spin 0;

b) particelle di spin 1/2.

Si considerino quindi particelle di spin 1/2 e si supponga di aggiungere all' Hamiltoniana un' interazione reciproca tra gli spin delle due particelle della forma

$$V_S = \lambda\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\,.$$

c) Discutere come si modificano per effetto dell' interazione V_S i livelli di energia corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato e le corrispondenti degenerazioni.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 Settembre 2010

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta ad un potenziale di tipo armonico con pulsazione ω. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H_0 = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2 \,.$$

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che: i) una misura dell'energia può fornire solo i valori $E = 7/2\,\hbar\omega$ ed $E = 9/2\,\hbar\omega$; ii) il valore medio della parità è nullo; iii) il valore medio della posizione è $\langle x\rangle = -\sqrt{2\,\hbar/(m\,\omega)}$.

a) Determinare lo stato della particella al tempo $t = 0$.

b) Calcolare il valore medio della posizione in funzione del tempo $t > 0$.

Si supponga quindi di variare leggermente i parametri fisici del sistema in modo tale che la nuova Hamiltoniana che descrive la particella sia della forma $H = H_0 + H_1$, con

$$H_1 = \lambda_1\,\frac{p^2}{2\,m} + \lambda_2\,\frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2$$

e λ_1, λ_2 due parametri reali e piccoli ($\lambda_1\,, \lambda_2 \ll 1$).

c) Trattando l'Hamiltoniana H_1 come una perturbazione, determinare le correzioni ai livelli di energia della particella al primo ordine dello sviluppo perturbativo.

d) Determinare gli autovalori esatti dell'Hamiltoniana $H = H_0 + H_1$, verificando che il loro sviluppo al primo ordine in λ_1 e λ_2 coincide con il risultato ottenuto in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle distinte di spin 1/2 sono descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \alpha\,S_{1\,z} + \beta\,S_{2\,z}\,,$$

dove $S_{1\,z}$ ed $S_{2\,z}$ indicano le componenti z degli operatori di spin delle due particelle ed α e β sono due costanti reali.

All'istante iniziale $t = 0$ si effettua una misura delle componenti x degli spin delle due particelle e si ottiene come risultato $S_{1\,x} = S_{2\,x} = +\hbar/2$.

a) Determinare lo stato del sistema al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo le probabilità che, a seguito di una misura dello spin totale delle due particelle, queste vengano trovate negli stati corrispondenti ad $s = 0$ ed $s = 1$. Per $\alpha = \beta$ queste probabilità non dipendono dal tempo. Sapreste indicarne la ragione?

Al tempo $t = T$ si esegue una misura della componente S_z dello spin totale delle due particelle, ottenendo come risultato $S_z = 0$. Dopo la misura il sistema viene nuovamente lasciato evolvere liberamente.

c) Calcolare in funzione del tempo $t > T$ le probabilità che una misura dello spin totale delle due particelle fornisca i risultati corrispondenti ad $s = 0$ ed $s = 1$.

d) *Facoltativo*: determinare per il sistema dato la forma esplicita dell'operatore dS^2/dt.

PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

15 Dicembre 2010

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V_\lambda(x) = -\frac{\hbar^2\lambda}{m}\,\delta(x)\;,$$

dove λ è una costante reale e positiva (avente le dimensioni di un inverso di una lunghezza).

a) Assumendo che la particella si trovi nell'unico stato legato con energia $E < 0$ della buca di potenziale, calcolare la probabilità che, a seguito di una misura di posizione, la particella venga trovata ad una distanza dalla buca minore di $1/\lambda$.

b) Si supponga di variare il parametro λ che definisce il potenziale in modo tale che, a seguito della variazione, questo assuma un nuovo valore λ'. Il cambiamento, inoltre, è così rapido che la funzione d'onda della particella, che si trova nello stato legato del potenziale $V_\lambda(x)$, resta invariata. Determinare la probabilità che, a seguito di una misura dell'energia, la particella venga trovata nello stato legato con energia $E < 0$ del nuovo potenziale $V_{\lambda'}(x)$.

c) Si assuma infine che la particella, soggetta al potenziale $V_\lambda(x)$, incida sulla buca di potenziale proveniente da $x = -\infty$ con energia $E = +\hbar^2\lambda^2/(2m) > 0$. Calcolare il valore dei coefficienti di riflessione e trasmissione.

ESERCIZIO N° 2

Un sistema quantistico di momento angolare orbitale $\ell = 1$ e spin $s = 1/2$ è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = a\,\vec{L}\cdot\vec{S} + b\,\hbar\,(L_z + S_z)\;,$$

dove a e b sono costanti reali.

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova in un autostato di L_z ed S_z con autovalori 0 e $+\hbar/2$ rispettivamente.

a) Determinare lo stato in cui si trova il sistema al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare i valori medi di J^2, J_z, L_z ed S_z in funzione del tempo.

c) Determinare la forma esplicita degli operatori $\dot{L}_z$ ed $\dot{S}_z$ e verificare che $\dot{L}_z + \dot{S}_z = 0$ spiegandone il motivo.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

31 Gennaio 2011

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} V_0 - \dfrac{\hbar^2\lambda}{2\,m}\,\delta(x) & , \quad \text{per } |x| < a \\ 0 & , \quad \text{per } |x| > a \ , \end{cases}$$

con λ, $V_0 > 0$. Dipendendo dai valori dei parametri λ e V_0, questo sistema può ammettere uno stato legato con energia $E < 0$ o uno stato non legato con energia $E = 0$, entrambi con parità *positiva*.

a) Determinare, a meno di una costante di normalizzazione, l'autofunzione dell'Hamiltoniana corrispondente allo stato legato con energia $E < 0$ e l'equazione che determina implicitamente l'autovalore dell'energia.

b) Nel limite $E \to 0$, la funzione d'onda determinata al punto a) si riduce all' autofunzione dell'Hamiltoniana dello stato con energia nulla. Determinare per questo stato il rapporto

$$\frac{P(|x| \le a)}{P(a \le |x| \le 2a)}$$

tra le probabilità che, a seguito di una misura di posizione, la particella venga trovata negli intervalli $|x| \le a$ ed $a \le |x| \le 2a$ rispettivamente.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 0 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\,L_+ L_- \ ,$$

dove $L_\pm = L_x \pm i\,L_y$ sono gli operatori a scala del momento angolare orbitale ed a è una costante reale.

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato tale che una misura di L^2 ed L_x fornisce con certezza i risultati $2\hbar^2$ e 0 rispettivamente.

a) Determinare lo stato del particella al tempo generico $t > 0$.

b) Determinare per quali valori del tempo $t^* > 0$ la particella viene a trovarsi nello stesso stato in cui si trovava al tempo iniziale $t = 0$.

c) Determinare l'espressione dell'operatore $\dot{L}_x \equiv dL_x/dt$ e verificare che risulta soddisfatta a qualunque istante di tempo la relazione

$$\langle \dot{L}_x \rangle_t = \frac{d}{dt}\langle L_x \rangle_t \ ,$$

dove $\langle \ldots \rangle_t$ indica il valore medio calcolato nello stato della particella al tempo t.

d) Verificare che l'operatore $Q = L_- L_+$ rappresenta, per il sistema considerato, una grandezza fisica conservata.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10 Febbraio 2011

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all' istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla f.d.o.

$$\psi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \xi^2 \exp\left(-\xi^2/2\right) \ ,$$

con $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\,x$.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia, le rispettive probabilità ed il valore medio dell'energia. Calcolare inoltre il valore medio della parità.

b) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo generico $t > 0$. Verificare quindi che in questo stato è soddisfatta a qualunque istante di tempo la relazione di indeterminazione $\Delta p\,\Delta x \ge \hbar/2$.

Si supponga quindi di aggiungere all'Hamiltoniana dell'oscillatore un'interazione anarmonica della forma

$$V(x) = \lambda\,x^4 \ ,$$

con $\lambda > 0$.

c) Determinare la correzione all'energia dello stato fondamentale dell'oscillatore al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

d) *Facoltativo*: determinare la correzione al primo ordine della teoria delle perturbazioni al livello di energia E_n generico dell'oscillatore.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\,H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\xi & H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi & H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2

Due particelle *identiche* sono descritte nel sistema del centro di massa dall' Hamiltoniana

$$H = \alpha\left(L^2 + \frac{1}{2}J^2 + \frac{1}{2}\hbar\,J_z\right) \ ,$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale delle due particelle, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ il momento angolare totale ed α è una costante reale positiva.

a) Determinare autostati ed autovalori dell' Hamiltoniana corrispondenti al livello di energia fondamentale ed ai due primi livelli eccitati nei casi in cui le particelle siano:

- bosoni di spin 0;
- fermioni di spin 1/2;
- bosoni di spin 1.

b) Considerando il caso di due particelle di spin 1, determinare come si modificano le energie dei primi tre livelli se si aggiunge all'Hamiltoniana un'interazione della forma

$$H_{LS} = \alpha\,\varepsilon\,\vec{L}\cdot\vec{S}\ ,$$

dove ε è una costante reale. Verificare, in particolare, come l'interazione H_{LS} rimuove la degenerazione dei livelli considerati.

Si osservi che una trasformazione di inversione spaziale, $\vec{x}\to-\vec{x}$, corrisponde in coordinate polari alla trasformazione $r\to r$, $\vartheta\to\pi-\vartheta$, $\varphi\to\pi+\varphi$. Rispetto a questa trasformazione la parità delle armoniche sferiche è definita da:

$$Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\to Y_{\ell m}(\pi-\vartheta,\pi+\varphi)=(-1)^{\ell}\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

2 Maggio 2011

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita definita da

$$V(x)=\begin{cases}0\ , & \text{per } 0\le x\le L\\ \infty\ , & \text{fuori}\ .\end{cases}$$

La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x)=A\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos^2\left(\frac{2\,\pi x}{L}\right)\quad ,\quad \text{per } 0\le x\le L$$

e $\psi(x)=0$ fuori, dove A è una costante di normalizzazione.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella, le corrispondenti probabilità ed il valore medio dell'energia.

Si supponga quindi di aggiungere alla buca di potenziale una perturbazione descritta dal potenziale

$$V_P(x)=V_0\,\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\ .$$

b) Determinare come si modificano i primi due livelli di energia del sistema al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Indicare inoltre quale condizione deve soddisfare il parametro V_0 affinchè la teoria delle perturbazioni sia effettivamente applicabile.

c) Determinare le correzioni ai primi due livelli di energia al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana per la buca di potenziale infinita descritta dal potenziale $V(x)$ sono

$$E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2\,m\,L^2}\quad ,\quad \text{con } n=1,2,3,\ldots$$

e

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right)\quad ,\quad \textit{per } 0\le x\le L$$

e $\psi_n(x)=0$ fuori.

Per la risoluzione degli integrali che intervengono nell'esercizio possono inoltre risultare utili le seguenti identità trigonometriche:

$$\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\quad ,\quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]\ ,$$
$$\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)+\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)\right]\ .$$

Per semplicità di notazione si suggerisce inoltre di esprimere i risultati della teoria delle perturbazioni in termini del parametro adimensionale $\delta=V_0/(4\varepsilon)$, dove ε è l'energia dello stato fondamentale della buca di potenziale infinita.

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 1/2 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(J_x + J_y \right) \ ,$$

dove J_x e J_y sono le componenti lungo gli assi x ed y del momento angolare totale ed a è una costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato simultaneo degli operatori J^2, J_z ed L^2 corrispondente a $j = 1/2$, $j_z = 1/2$ ed $\ell = 1$.

a) Determinare lo stato della particella evoluto al tempo generico $t > 0$.

b) Determinare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura di L_z ed S_z e le rispettive probabilità.

c) Calcolare il valore medio dell'operatore dS_z/dt al tempo t.

d) *Facoltativo*: verificare che il risultato ottenuto è in accordo con l'equazione

$$\langle \frac{dS_z}{dt} \rangle_t = \frac{d}{dt} \langle S_z \rangle_t$$

dove $\langle \ldots \rangle_t$ indica il valore medio al tempo t.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
21 Giugno 2011

ESERCIZIO N° 1
Una particella priva di spin è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta ad un potenziale anarmonico. L'Hamiltoniana che descrive la particella si esprime, in termini degli usuali operatori di creazione e distruzione, nella forma:

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega' a (a^\dagger)^2 a \ .$$

L'operatore $\hat{O} = a(a^\dagger)^2 a$ descrive dunque l'effetto di anarmonicità nel potenziale.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato tale che: i) effettuando una misura dell'osservabile $\hat{O}$ si ottengono come soli possibili risultati i valori $\hat{O} = 6$ ed $\hat{O} = 12$ ed il valore medio delle misure è $\langle \hat{O} \rangle = 10$; ii) il valore medio dell'operatore posizione (in unità adimensionali), $\hat{x} = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$, è pari a $\langle \hat{x} \rangle = -2/\sqrt{3}$.

a) Mostrare che gli autostati dell'Hamiltoniana sono gli stessi autostati $|n\rangle$ dell'oscillatore armonico e determinare gli autovalori dell'energia.

b) Determinare lo stato della particella all'istante iniziale $t = 0$ e al tempo generico $t > 0$.

c) Determinare l'espressione dell'operatore velocità $\hat{v} = d\hat{x}/dt$ e calcolarne il valore di aspettazione sullo stato della particella al tempo t.

d) *Facoltativo*: verificare che il risultato ottenuto è in accordo con l'equazione $\langle \hat{v} \rangle_t = d\langle \hat{x} \rangle_t / dt$, dove $\langle \ldots \rangle_t$ indica il valore medio al tempo t.

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 1 è descritta da una funzione d'onda rappresentata, nella base degli autostati $|+1\rangle$, $|0\rangle$ e $|-1\rangle$ di S_z, dal vettore

$$\psi = N \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-r/2a} \ ,$$

dove N è una costante di normalizzazione, (r, ϑ, φ) sono le usuali coordinate polari ed a è una costante avente le dimensioni di una lunghezza.

Determinare:

a) La costante di normalizzazione N e le probabilità che una misura della componente z dello spin della particella fornisca come risultato $s_z = 0, \pm\hbar$.

b) La probabilità che a seguito di una misura della posizione della particella questa venga trovata ad una distanza dall'origine $r < a$.

c) I possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura del quadrato del momento angolare totale della particella.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\vartheta \, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
18 Luglio 2011

ESERCIZIO N° 1

Due particelle di massa m e cariche opposte, $+q$ e $-q$, sono vincolate a muoversi in una dimensione lungo l'asse x, ciascuna soggetta ad una forza di richiamo elastica centrata rispettivamente in $x = -a$ ed $x = +a$ e ad un campo elettrico costante E diretto lungo x. La distanza $2a$ tra i centri è sufficientemente grande ed il campo elettrico E sufficientemente debole che risulta possibile trascurare nel problema gli effetti dell'attrazione coulombiana tra le particelle. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto:

$$H = \frac{p_1^2}{2\,m} + \frac{p_2^2}{2\,m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 (x_1 + a)^2 + \frac{1}{2} m\,\omega^2 (x_2 - a)^2 + qE\,(x_2 - x_1)\ .$$

Le particelle si trovano nello stato di minima energia del sistema.

a) Considerando dapprima il caso di campo elettrico nullo, $E = 0$, calcolare la distanza media $\langle x_2 - x_1 \rangle$ e la distanza quadratica media $\langle (x_2 - x_1)^2 \rangle$ tra le due particelle. (Si suggerisce a tale scopo di effettuare il cambio di variabili $\bar{x}_1 = x_1 + a$, $\bar{x}_2 = x_2 - a$).

b) Considerando quindi il campo elettrico E diverso da zero ma piccolo, e trattando il termine $V = qE\,(x_2 - x_1)$ nell'Hamiltoniana come una perturbazione, calcolare la correzione al primo ordine al vettore di stato del livello fondamentale del sistema.

c) Utilizzando il risultato ottenuto al punto b), calcolare nuovamente i valori medi $\langle x_2 - x_1 \rangle$ e $\langle (x_2 - x_1)^2 \rangle$ al primo ordine dello sviluppo nel campo E.

d) _Facoltativo_: Confrontare i risultati ottenuti in teoria delle perturbazioni con le espressioni esatte per i valori medi $\langle x_2 - x_1 \rangle$ e $\langle (x_2 - x_1)^2 \rangle$. (Si osservi a tale scopo che l'Hamiltoniana H può essere riscritta come somma di Hamiltoniane di due oscillatori armonici indipendenti).

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1/2, momento magnetico $g\vec{S}$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = -g\,\vec{S} \cdot \vec{B} = -gBS_z\ .$$

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che: i) il valore medio dell'energia vale $3/10\,gB\,\hbar$; ii) il valore medio della componente y dello spin è nullo.

a) Determinare lo stato iniziale della particella, verificando che tale stato non risulta completamente determinato dalle suddette condizioni. Determinare quindi lo stato evoluto al tempo $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo il valore medio dell'operatore dS_y/dt. Una misura di questo valore medio permette di determinare completamente lo stato della particella. Si consideri, per la domanda successiva, lo stato per cui al tempo iniziale $t = 0$ si ha $\langle dS_y/dt \rangle < 0$.

c) Calcolare in funzione del tempo le indeterminazioni su S_y ed S_z e verificare che soddisfano la condizione imposta dalla relazione di indeterminazione.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
8 Settembre 2011

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre stati è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = H_0 + V$$

dove gli operatori H_0 e V sono rappresentati dalle matrici

$$H_0 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed ε e λ sono due costanti reali e positive aventi le dimensioni di energia.

Si consideri dapprima il caso in cui $\underline{\lambda/\varepsilon \ll 1}$, nel quale l'operatore V può essere trattato come una piccola perturbazione dell'Hamiltoniana H_0. In questo caso:

a) calcolare le correzioni agli autovalori dell'energia fino al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

Si consideri quindi il caso $\underline{\lambda = 0}$, così che l'evoluzione temporale del sistema risulta descritta dalla sola Hamiltoniana $H = H_0$. In questo caso, sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nell'autostato dell'operatore V con autovalore positivo,

b) determinare lo stato del sistema al tempo generico $t > 0$;

c) calcolare in funzione del tempo il valore medio dell'operatore V.

d) _Facoltativo_: Calcolare gli autovalori esatti dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$ e confrontare il risultato con quello ottenuto al punto a) in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{2\,\varepsilon_1}{\hbar^2}\,S_x^2 + \frac{\varepsilon_2}{\hbar}\,S_z\ ,$$

dove S_x ed S_z sono gli usuali operatori di spin ed ε_1, ε_2 sono due costanti reali e positive aventi le dimensioni di energia. La particella si trova nello stato di energia fondamentale.

a) Determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana H.

b) Determinare i possibili risultati di una misura di S_z e le rispettive probabilità.

c) Calcolare i valori medi degli operatori S_x, S_x^2 ed S_z.

Nei calcoli si suggerisce di introdurre, per comodità di notazione, la variabile $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

26 Ottobre 2011

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in due dimensioni, liberamente, all'interno di un quadrato di lato a. Il potenziale cui è soggetta la particella è dunque

$$V(x,y) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } \ 0 \le x, y \le a \\ \infty\,, & \text{fuori .} \end{cases}$$

La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x,y) = \begin{cases} A\,x\,y\,(a-x)\,(a-y)\,, & \text{per } \ 0 \le x, y \le a \\ 0\,, & \text{fuori ,} \end{cases}$$

dove A è una costante di normalizzazione.

a) Calcolare il valore medio dell'energia della particella.

b) Calcolare la probabilità che, a seguito di una misura dell'energia, la particella venga trovata nello stato fondamentale.

c) Calcolare la probabilità che l'energia della particella risulti invece pari all'energia del primo livello eccitato.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 0 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\left(2\,L_x^2 + L_z^2\right)\ ,$$

dove L_x ed L_z sono le componenti lungo gli assi x e z del momento angolare orbitale ed a è una costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato simultaneo degli operatori L^2 ed L_z corrispondente agli autovalori $2\,\hbar^2$ ed $\hbar$ rispettivamente.

a) Determinare lo stato della particella evoluto al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di L_z.

c) Determinare l'espressione dell'operatore dL_z/dt, calcolarne il valore medio al tempo t e verificare che risulta soddisfatta la relazione

$$\langle\frac{dL_z}{dt}\rangle_t = \frac{d}{dt}\,\langle L_z\rangle_t$$

dove $\langle\ldots\rangle_t$ indica il valore medio al tempo t.

PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

14 Dicembre 2011

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a due stati è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & \delta\,e^{-i\varphi} \\ \delta\,e^{i\varphi} & 1 \end{pmatrix}$$

dove ε e δ sono due costanti reali e positive ed $e^{i\varphi}$ è un fattore di fase.

Si considerino quindi i due stati di base

$$|0^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |1^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

autostati dell'Hamiltoniana nel limite $\delta \to 0$. All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|0^{(0)}\rangle$.

a) Determinare gli autovalori esatti E_0 ed E_1 dell'Hamiltoniana ed i corrispondenti autostati $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

b) Calcolare la probabilità di trovare il sistema nello stato $|1^{(0)}\rangle$ al tempo generico $t > 0$.

c) Assumendo $\delta \ll 1$ ed utilizzando la teoria delle perturbazioni fino al secondo ordine dello sviluppo in δ, determinare gli autovalori approssimati di H. Confrontare quindi i risultati ottenuti con quelli esatti.

d) Facoltativo: utilizzando la teoria delle perturbazioni fino al primo ordine dello sviluppo in δ, determinare gli autostati approssimati dell'Hamiltoniana e confrontare i risultati ottenuti con quelli esatti.

Nello svolgimento dell'esercizio si introduca, per semplicità di notazione, il parametro $\Delta = \sqrt{1 + 4\,\delta^2}$.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1/2 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\,J^2 + b\,J_z\ ,$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è il momento angolare totale della particella ed a e b sono due costanti reali.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato simultaneo di L^2, L_z ed S_z corrispondente agli autovalori $2\,\hbar^2$, 0 e $+\hbar/2$ rispettivamente.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella e le corrispondenti probabilità.

b) Calcolare in funzione del tempo i valori medi di L_z ed S_z.

c) Calcolare le indeterminazioni ΔJ_x e ΔJ_y e verificare che è soddisfatta per ogni tempo la corrispondente relazione di indeterminazione generalizzata.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

30 Gennaio 2012

ESERCIZIO N° 1

Due particelle di massa m prive di spin sono vincolate a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita di larghezza a. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto

$$H = \frac{p_1^2}{2\,m} + \frac{p_2^2}{2\,m} + U(x_1) + U(x_2) \ ,$$

dove

$$U(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{per } |x| \le a/2 \\ \infty & , \quad \text{per } |x| > a/2 \ . \end{cases}$$

a) Determinare gli autovalori dell'energia corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato del sistema, il relativo grado di degenerazione e le corrispondenti funzioni d'onda.

b) Calcolare la distanza quadratica media tra le due particelle, ossia il valore medio $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$, nei due casi in cui le particelle si trovino nello stato fondamentale o in uno qualunque degli stati corrispondenti al primo livello eccitato (a scelta dello studente).

Si supponga quindi di aggiungere all'Hamiltoniana un'interazione attrattiva tra le due particelle descritta dal potenziale

$$V(x_1, x_2) = \lambda\,(x_1 - x_2)^2 \qquad , \qquad \text{con } \lambda > 0 \ .$$

c) Utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in λ, calcolare le correzioni agli autovalori dell'energia del livello fondamentale e del primo livello eccitato.

Per il calcolo degli integrali che entrano nella risoluzione di questo esercizio possono risultare utili le seguenti relazioni trigonometriche:

$$\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\,(\alpha+\beta) + \text{sen}\,(\alpha-\beta)\right] \quad , \quad \cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

ESERCIZIO N° 2

Due particelle *identiche* di spin 1 sono vincolate a muoversi in una dimensione soggette ad un'interazione reciproca attrattiva di tipo armonico, dipendente dalla coordinata relativa $x = x_1 - x_2$ e con pulsazione dipendente dallo spin. Nel sistema del centro di massa, l'Hamiltoniana che descrive le particelle è:

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2 \left(1 + \frac{S_+ S_-}{\hbar^2}\right)^2 x^2 \ ,$$

dove m è la massa ridotta ed S_+, S_- sono gli operatori a scala dello spin totale $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$.

a) Determinare autostati ed autovalori dell'Hamiltoniana ed il relativo grado di degenerazione per i primi 3 livelli di energia.

Una serie di misure effettuate sul sistema mostra che le particelle si trovano in uno stato tale che: i) una misura dell' energia produce con certezza il risultato $E = (5/2)\,\hbar\omega$; ii) una misura del quadrato dello spin totale S^2 produce con certezza il risultato $6\,\hbar^2$; iii) lo stato è autostato dell'operatore $(a^2\,S_+ + a^{\dagger\,2}\,S_-)$ con autovalore $2\sqrt{2}\,\hbar$.

b) Determinare lo stato del sistema.

c) Calcolare in questo stato i valori medi degli operatori S_z ed $S_+ S_-$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 Febbraio 2012

ESERCIZIO N^o 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω ha il suo centro nel punto di coordinata $x = b$. L'Hamiltoniana che descrive l'oscillatore è dunque

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2\,(x-b)^2 \ .$$

a) Calcolare i valori medi della posizione x e del suo quadrato x^2 quando l'oscillatore si trova nello stato fondamentale.

All'istante iniziale $t = 0$, l'oscillatore si trova in uno state tale che: i) una misura dell'energia fornisce con uguale probabilità i risultati $E = (1/2)\,\hbar\,\omega$ ed $E = (3/2)\,\hbar\,\omega$;
ii) una misura del valore medio della posizione fornisce come risultato $\langle x\rangle = x_0/\sqrt{2} + b$, con $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\,\omega)}$

b) Determinare la funzione d'onda dell'oscillatore al tempo generico $t > 0$.

c) Calcolare in questo stato il valore medio dell'operatore dp/dt.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale centrato in $x = 0$ hanno la forma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x_0}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\ H_n(x/x_0)\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\,x_0^2}\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\xi & H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi & H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di spin 0 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = A\ (L_x \cos\alpha + L_y \operatorname{sen}\alpha)$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore del momento angolare orbitale, A una costante con le dimensioni di una frequenza ed α un angolo. All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato simultaneo di L^2 ed L_z corrispondente ad $\ell = 1$ ed $m = 0$.

a) Determinare, nel sottospazio corrispondente ad $\ell = 1$, la rappresentazione matriciale dell'Hamiltoniana nella base degli autostati di L^2 ed L_z. Calcolare quindi autovalori ed autovettori dell'Hamiltoniana.

b) Determinare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura di L_z, le rispettive probabilità ed il valore medio di L_z.

c) Calcolare, in funzione del tempo, la probabilità che una misura di L_x fornisca come risultato il valore $L_x = 0$. Nel limite $\alpha \to 0$ questa probabilità risulta indipendente dal tempo. Sapreste darne la ragione?

d) *<u>Facoltativo</u>*: calcolare, in funzione del tempo, le probabilità dei risultati $L_x = \pm\,\hbar$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

26 Aprile 2012

ESERCIZIO N^o 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita contenuta nell'intervallo $|x| \le a/2$. La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\,x\,(a^2 - 4\,x^2)\ , \qquad \text{per } |x| \le a/2$$

e $\psi(x) = 0$ fuori, dove A è una costante di normalizzazione.

a) Calcolare il valore medio dell'energia della particella.

b) Calcolare la probabilità che, a seguito di una misura dell'energia, la particella venga trovata nel primo livello eccitato ($n = 2$). Considerando il valore numerico di tale probabilità, sapreste dare una spiegazione qualitativa del risultato ottenuto?

c) Calcolare le indeterminazioni Δx e Δp nello stato in cui si trova la particella e confrontare il risultato con il limite imposto dal principio di indeterminazione.

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale considerata sono:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\ , \qquad \text{con} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}\ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e:

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\ \cos(k_n x)\ , & \text{per } n \text{ dispari} \\ \psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\ \operatorname{sen}(k_n x)\ , & \text{per } n \text{ pari}\ . \end{cases}$$

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di spin 1 e massa infinita è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\,\{S_x\,,\,S_y\}\ ,$$

dove $\{S_x\,,\,S_y\} = S_xS_y + S_yS_x$ è l'anticommutatore delle componenti x ed y degli operatori di spin ed ε è una costante. All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di S_x corrispondente ad autovalore nullo.

a) Determinare autovalori ed autovettori dell'Hamiltoniana.

b) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, le indeterminazioni ΔS_x e ΔS_y.

d) *<u>Facoltativo</u>*: verificare che risulta soddisfatta ad ogni istante di tempo la relazione di indeterminazione generalizzata

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y \ge \frac{1}{2}\,|\langle [S_x\,,\,S_y]\rangle|\ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
12 Giugno 2012

ESERCIZIO N^o 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi in due dimensioni soggetta ad un potenziale centrale di tipo armonico. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto

$$H = \frac{p_x^2}{2\,m} + \frac{p_y^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\left(x^2+y^2\right) = \hbar\omega\left(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1\right)\ ,$$

dove a_x, a_x^+ ed a_y, a_y^+ sono gli usuali operatori di creazione e distruzione degli oscillatori unidimensionali nelle coordinate x ed y rispettivamente ($a_x = (\hat{x}+i\,\hat{p}_x)/\sqrt{2}$, $a_y = (\hat{y}+i\,\hat{p}_y)/\sqrt{2}$ con $\hat{x} = x\,\sqrt{m\omega/\hbar}$, $\hat{p}_x = p_x/\sqrt{m\hbar\omega}$, ecc.).

La particella si trova in uno stato tale che:
i) una misura dell'energia fornisce con certezza il risultato $E = 4\,\hbar\omega$;
ii) è autostato dell'operatore $N_{xy} = (a_x^+ a_x)(a_y^+ a_y)$ con autovalore 2;
iii) il valore medio dell'operatore x^2 è pari a $2\,\hbar/(m\omega)$;
iv) il valore medio dell'operatore $x\,y$ è nullo.

a) Determinare l'espressione più generale per il vettore di stato della particella.

b) Calcolare, su questo stato, il valore medio dell'operatore $O = i\left(a_x\,a_y^+ - a_x^+\,a_y\right)$. Determinare quindi a quale grandezza fisica meccanica corrisponde questo operatore.

c) Determinare l'operatore dO/dt.

ESERCIZIO N^o 2
Due particelle distinguibili di spin 1/2 e momento magnetico $\vec{\mu}_1 = g_1\,\vec{S}_1$ e $\vec{\mu}_2 = g_2\,\vec{S}_2$ sono immerse in un campo magnetico $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è

$$H = -\left(g_1\,\vec{S}_1 + g_2\,\vec{S}_2\right)\cdot\vec{B}\ .$$

All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano nello stato di singoletto (spin totale $S = 0$).

a) Calcolare lo stato del sistema al tempo generico $t > 0$ e le probabilità, in funzione del tempo, di trovare le particelle nello stato di singoletto o in ciascuno dei tre stati di tripletto.

Al tempo $t = T > 0$ il campo magnetico viene ruotato nella direzione dell'asse x.

b) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia del sistema e le rispettive probabilità.

c) Calcolare la probabilità che al tempo $t = 2\,T$, a seguito di una misura dello spin totale delle due particelle, il sistema venga trovato nello stato di singoletto.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
23 Luglio 2012

ESERCIZIO N^o 1
Due particelle distinguibili di massa m sono vincolate a muoversi in una dimensione soggette ad un potenziale di tipo armonico centrato nell'origine. L'Hamiltoniana che descrive le due particelle è pertanto

$$H = \frac{p_1^2}{2\,m} + \frac{p_2^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\left(x_1^2+x_2^2\right)\ .$$

a) Calcolare la distanza quadratica media tra le due particelle, $\langle (x_1-x_2)^2\rangle$, quando il sistema si trova nel suo stato fondamentale e in uno (a scelta) degli stati corrispondenti al primo livello eccitato di energia.

Si supponga di aggiungere all'Hamiltoniana un'interazione reciproca tra le particelle della forma

$$V = -\lambda\,\delta(x_1-x_2)\ , \qquad\qquad (\lambda > 0)\ .$$

b) Utilizzando la teoria delle perturbazioni, determinare la correzione al livello di energia fondamentale al primo ordine in λ.

c) Determinare, al primo ordine in λ, le correzioni ai livelli di energia corrispondenti al primo livello eccitato imperturbato.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana per l'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x_0}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\;H_n(x/x_0)\;\exp\left(-\frac{x^2}{2\,x_0^2}\right) \quad , \quad x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$H_0(\xi) = 1 \qquad H_1(\xi) = 2\xi \qquad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$
$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi \qquad H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \qquad \ldots\ldots$$

ESERCIZIO N^o 2
Una particella di spin $s = 1/2$ e momento angolare orbitale $\ell = 1$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\,\left(J^2 + 2\,\hbar\,S_z\right)\ ,$$

dove $\vec{J} = \vec{L}+\vec{S}$ è l'operatore di momento angolare totale, S_z la componente z dell'operatore di spin ed a una costante data.

a) Determinare la rappresentazione matriciale dell'Hamiltoniana nella base degli stati

$$|1\uparrow\rangle\,,\ |1\downarrow\rangle\,,\ |0\uparrow\rangle\,,\ |0\downarrow\rangle\,,\ |-1\uparrow\rangle\,,\ |-1\downarrow\rangle\ ,$$

autostati simultanei di L^2, S^2, L_z ed S_z, dove si è indicato ad esempio con $|1\uparrow\rangle$ lo stato corrispondente ad $m = 1$ ed $s_z = 1/2$ e, per semplicità di notazione, si è omesso di indicare esplicitamente nei vettori di stato i numeri quantici $\ell = 1$ ed $s = 1/2$ il cui valore è fissato.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che una misura di L_z ed S_z produce con certezza i risultati 0 e $-\hbar/2$ rispettivamente.

b) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di S_z.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10 Settembre 2012

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre stati è descritto dall'Hamiltoniana $H = H_0 + V$, con H_0 e V definiti da

$$H_0 |a\rangle = E (|a\rangle - |c\rangle) \ , \qquad V |a\rangle = \varepsilon |b\rangle \ ,$$

$$H_0 |b\rangle = E |b\rangle \ , \qquad V |b\rangle = \varepsilon |a\rangle \ ,$$

$$H_0 |c\rangle = E (-|a\rangle + |c\rangle) \ , \qquad V |c\rangle = 0 \ ,$$

dove gli stati $|a\rangle$, $|b\rangle$ e $|c\rangle$ costituiscono una base ortonormale ed E ed ε sono costanti aventi le dimensioni di energia, con $\varepsilon << E$.

a) Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana imperturbata H_0.

b) Calcolare in teoria delle perturbazioni le correzioni agli autovalori dell'Hamiltoniana al secondo ordine in $\delta \equiv \varepsilon/E$ ed agli autostati al primo ordine in δ.

c) Utilizzando i risultati ottenuti in teoria delle perturbazioni, calcolare la probabilità che il sistema che si trova all'istante $t = 0$ nello stato $|a\rangle$ venga a trovarsi al tempo $t > 0$ nello stato $|b\rangle$.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1/2, vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera, è descritta da una funzione d'onda rappresentata nella base degli autostati $|+1/2\rangle$ e $|-1/2\rangle$ di S_z dal vettore

$$\psi = N \begin{pmatrix} 1 + \cos\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta \, e^{i\varphi} \end{pmatrix} \ ,$$

dove N è una costante di normalizzazione e (ϑ, φ) sono gli usuali angoli polari.

a) Determinare i possibili risultati e le corrispondenti probabilità di una misura di L^2, L_z ed S_z.

b) Determinare i possibili risultati e le corrispondenti probabilità di una misura di J^2 e J_z.

c) Assumendo che la particella sia descritta da un'Hamiltoniana della forma

$$H = a \, \vec{L} \cdot \vec{S} + b \left(L^2 + S^2 \right)$$

con a e b costanti, determinare i possibili risultati e le corrispondenti probabilità di una misura dell'energia.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\vartheta \, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

29 Ottobre 2012

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita nell'intervallo $0 \leq x \leq L$. La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{840}{L^7}}\, x\,(x-L)\,(x-L/2)\;, \qquad \text{per } 0 \leq x \leq L$$

e $\psi(x) = 0$ fuori.

a) Calcolare il valore medio della posizione della particella e fornire una spiegazione del risultato ottenuto.

b) Calcolare la probabilità che, a seguito di una misura dell'energia, la particella venga trovata rispettivamente nello stato fondamentale e nel primo livello eccitato.

c) Calcolare i valori medi dell'impulso, del quadrato dell'impulso e dell'energia della particella.

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale considerata sono

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2\,mL^2} \qquad \text{e} \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{per } 0 \leq x \leq L$$

e $\psi(x) = 0$ *fuori, con* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Per lo svolgimento dei calcoli risultano utili i valori dei seguenti integrali:*

$$I_k^{(n)} \equiv \int_0^1 ds\, s^k\, \text{sen}\,(n\pi s) \qquad , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$I_1^{(n)} = -\frac{(-1)^n}{n\,\pi} \quad , \quad I_2^{(n)} = -\frac{2\,[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3} - \frac{(-1)^n}{n\,\pi} \quad , \quad I_3^{(n)} = \frac{6\,(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{(-1)^n}{n\,\pi}\;.$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin $1/2$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -g\,B\,S_z\;,$$

dove $\vec{\mu} = g\,\vec{S}$ è il momento magnetico della particella.

All'istante di tempo iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di S_x con autovalore $+\hbar/2$.

a) Determinare lo stato evoluto al tempo $t > 0$, i possibili risultati di una misura di S_z e le rispettive probabilità.

b) Calcolare nello stato al tempo t i valori degli scarti quadratici medi $\langle(\Delta S_x)^2\rangle$, $\langle(\Delta S_y)^2\rangle$ e $\langle(\Delta S_z)^2\rangle$ e verificare che risulta sempre soddisfatta la relazione di indeterminazione

$$\langle(\Delta S_y)^2\rangle\,\langle(\Delta S_z)^2\rangle \;\geq\; \frac{1}{4}\langle i\,[S_y, S_z]\rangle^2\;.$$

c) Determinare l'operatore dS_x/dt e verificare che, nello stato della particella al tempo t, risulta soddisfatta la relazione

$$\langle\frac{dS_x}{dt}\rangle = \frac{d}{dt}\langle S_x\rangle\;.$$

PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10 Dicembre 2012

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre stati è descritto dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \varepsilon \left(R + R^{+} + R\, R^{+} \right)$$

dove l'operatore R agisce su un insieme di stati di base $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ in modo ciclico:

$$R\,|a\rangle = |b\rangle \ , \qquad R\,|b\rangle = |c\rangle \ , \qquad R\,|c\rangle = |a\rangle \ .$$

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|a\rangle$.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia del sistema e le rispettive probabilità.

b) Calcolare la probabilità che al tempo $t > 0$ il sistema venga trovato nello stato $|b\rangle$.

Si supponga di sottoporre il sistema ad una perturbazione della forma

$$V = \lambda\, \varepsilon\, S \ ,$$

dove l'azione dell'operatore S è definita da

$$S\,|a\rangle = 2\,|b\rangle \ , \qquad S\,|b\rangle = 2\,|a\rangle \ , \qquad S\,|c\rangle = -|c\rangle \ .$$

c) Utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$.

d) *Facoltativo*: utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, determinare gli autostati dell'Hamiltoniana H.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa m, priva di spin, è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R. La particella è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ costante e diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive la particella è dunque:

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} - \mu\, B\, L_z \, .$$

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato del momento angolare orbitale corrispondente ad $\ell = 1$ e descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(\theta, \varphi\, ; t = 0) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \, \left(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\varphi \right) \ .$$

a) Calcolare la probabilità che, a seguito di una misura di posizione, la particella venga trovata con un valore dell'angolo θ compreso tra 0 e $\pi/2$.

b) Determinare i possibili risultati di una misura di L_x al tempo $t = 0$ e le rispettive probabilità.

c) Determinare lo stato evoluto al tempo $t > 0$ e calcolare, in questo stato, il valore medio di L_x.

d) *Facoltativo*: calcolare il funzione del tempo il valore medio dell'operatore dL_x/dt e verificare che risulta soddisfatta la relazione

$$\langle \frac{dL_x}{dt} \rangle_t = \frac{d}{dt} \langle L_x \rangle_t \, .$$

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti all'autovalore $\ell = 1$ sono:

$$Y_{1,\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \,\mathrm{sen}\,\theta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \, \cos\theta \ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
28 Gennaio 2013

ESERCIZIO N° 1
Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\xi) = N \left(\xi^3 + \frac{i}{2\sqrt{2}} \right) \exp\left(-\xi^2/2\right) \ ,$$

dove $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\, x$ ed N è una costante di normalizzazione.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità.

b) Calcolare il valore medio della posizione dell'oscillatore in funzione del tempo $t > 0$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio della velocità $v = dx/dt$ dell'oscillatore e verificare che risulta soddisfatta la relazione

$$\langle v \rangle_t = \frac{d}{dt} \langle x \rangle_t$$

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\, H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\xi & H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi & H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 3/2 e massa infinita è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ costante diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H = -g\, \vec{S} \cdot \vec{B} = -g\, B\, S_z \ .$$

All'istante di tempo iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di S_x con autovalore $\frac{3}{2}\hbar$.

a) Determinare le matrici rappresentative degli operatori di spin S_x, S_y, S_z nella base degli autostati di S^2 e S_z.

b) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$, i possibili risultati di una misura di S_z e le rispettive probabilità.

c) Calcolare il valore medio di S_y in funzione del tempo.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
12 Febbraio 2013

ESERCIZIO N° 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2\, m} - \frac{\hbar^2}{m\, a}\, \delta(x) \ ,$$

dove a è una costante con le dimensioni di una lunghezza. La particella si trova nell'unico stato legato, con energia $E < 0$, della buca di potenziale.

a) Determinare la funzione d'onda della particella, la sua energia E e i valori medi dell'energia potenziale e dell'energia cinetica (si osservi a tale scopo che vale la relazione $E = \langle T \rangle + \langle V \rangle$).

b) Calcolare la distanza quadratica media $\langle x^2 \rangle$ della particella dall'origine delle coordinate. Calcolare quindi le indeterminazioni Δx e Δp su posizione e impulso e verificare che il risultato è consistente con il vincolo imposto dal principio di indeterminazione.

c) Calcolare la probabilità che, a seguito di una misura di posizione, la particella venga trovata ad una distanza dall'origine $|x| \leq b$. Per quale valore di b tale probabilità è pari ad 1/2?

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin $s = 0$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = A\, (L_x\, L_y + L_y\, L_x) \ ,$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore di momento angolare orbitale ed A una costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di L^2 ed L_z corrispondente a $\ell = 1$ ed $m = 1$.

a) Calcolare, nel sottospazio corrispondente ad $\ell = 1$, autovalori ed autovettori dell'Hamiltoniana.

b) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$ e calcolare il valore medio di L_z in funzione del tempo.

c) Determinare l'operatore dL_z/dt e verificare che risulta soddisfatta la relazione

$$\langle \frac{dL_z}{dt} \rangle_t = \frac{d}{dt} \langle L_z \rangle_t$$

dove $\langle \ldots \rangle_t$ indica il valore medio nello stato della particella al tempo t.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

25 Marzo 2013

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita definita da

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{per} \quad |x| \leq L/2 \\ \infty\,, & \text{per} \quad |x| > L/2\,. \end{cases}$$

La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\left[\cos\left(\frac{\pi\,x}{L}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\,\pi\,x}{L}\right)\right] \qquad \text{per } |x| \leq L/2$$

e $\psi(x) = 0$ fuori, dove A è una costante di normalizzazione.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia E della particella e le rispettive probabilità.

b) Calcolare il valore medio della posizione, $\langle x\rangle$, e dell'impulso, $\langle p\rangle$.

c) Calcolare le indeterminazioni Δp e Δx verificando che risulta soddisfatto il principio di indeterminazione (per il calcolo di Δp può essere utile osservare che vale la relazione $\langle p^2\rangle = 2\,m\langle E\rangle$).

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale considerata sono

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2\,m}\,, \qquad \text{con} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

e, nell'intervallo $|x| \leq L/2$,

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\,\cos(k_n x)\,, & \text{per } n \text{ dispari} \\ \psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\,\mathrm{sen}(k_n x)\,, & \text{per } n \text{ pari}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO N° 2

Per una particella di spin 1/2 si consideri l'operatore $S_{\hat{n}} = \vec{S}\cdot\hat{n}$ proiezione dello spin nella direzione individuata dal generico versore

$$\hat{n} = (\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\varphi,\ \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \cos\vartheta)\,,$$

dove ϑ e φ sono gli usuali angoli delle coordinate polari.

a) Determinare, nella base degli autostati di S_z, la matrice rappresentativa di $S_{\hat{n}}$ e l'autovettore di $S_{\hat{n}}$ corrispondente all'autovalore $+\hbar/2$.

Si consideri quindi una particella di spin 1/2 che si trovi all'istante iniziale $t = 0$ nell'autostato di S_z corrispondente all'autovalore $+\hbar/2$. La particella viene immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ diretto lungo l'asse x. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è dunque della forma

$$H = g\,B\,S_x\,,$$

dove g è il momento magnetico della particella.

b) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$. Questo stato, per un certo versore $\hat{n}(t)$, è autostato di $S_{\hat{n}(t)}$ con autovalore $+\hbar/2$. Determinare gli angoli $\vartheta(t)$ e $\varphi(t)$ che individuano tale versore.

c) Determinare il versore $\hat{n}(t)$ nel caso in cui invece la particella si trovi al tempo $t = 0$ in un autostato di S_x con autovalore $+\hbar/2$ e il campo magnetico sia diretto nella direzione z.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
17 Giugno 2013

ESERCIZIO N° 1
Due oscillatori armonici unidimensionali di massa m e pulsazione ω, con centro nell'origine, vengono perturbati dall'azione di una forza costante, uguale in modulo ma diretta in senso opposto per i due oscillatori. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto

$$H = \frac{p_1^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 x_1^2 + \frac{p_2^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 x_2^2 + g\,(x_1 - x_2)\ ,$$

dove g rappresenta l'intensità della forza costante.

a) Utilizzando la teoria delle perturbazioni, determinare la correzione al primo ordine in g all'energia del livello fondamentale e del primo livello eccitato (degenere) del sistema. Calcolare quindi la correzione al livello di energia fondamentale al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

b) Utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, determinare la funzione d'onda dello stato fondamentale del sistema, fornendone l'espressione esplicita come funzione delle coordinate x_1 e x_2 dei due oscillatori.

c) Calcolare nello stato fondamentale determinato al punto b) i valori medi $\langle x_1 \rangle$, $\langle x_2 \rangle$ e $\langle x_1 - x_2 \rangle$.

d) *Facoltativo*: confrontare i risultati ottenuti in teoria delle perturbazioni per i primi due livelli di energia del sistema e per la funzione d'onda dello stato fondamentale con i risultati esatti.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana per l'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x_0}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\ H_n(x/x_0)\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\,x_0^2}\right) \quad , \quad x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\xi & H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi & H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 0 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\,L_+ L_- + b\,L_z^2$$

dove $L_{+,-}$ sono gli operatori a scala del momento angolare orbitale, L_z è la componente lungo l'asse z del momento e a e b sono due costanti reali.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato tale che una misura di L^2 e L_y fornisce con certezza i risultati $2\,\hbar^2$ e 0 rispettivamente.

a) Determinare lo stato in cui si trova la particella al tempo generico $t > 0$ ed i valori del tempo $t^* > 0$ per i quali la particella viene a trovarsi nello stato in cui si trovava al tempo iniziale $t = 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo il valore medio degli operatori L_y e L_y^2.

c) Calcolare in funzione del tempo il valore medio degli operatori L_x^2 e L_z^2 e verificare che risulta soddisfatta la relazione $\langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle = 2\,\hbar^2$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

22 Luglio 2013

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove ε è una costante avente le dimensioni di energia.

a) Determinare autovalori e autostati di H_0.

Si aggiunga all'Hamiltoniana H_0 una perturbazione rappresentata da

$$V = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con la costante λ avente le dimensioni di energia.

b) Calcolare le correzioni al secondo ordine in λ agli autovalori dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$.

c) Calcolare le correzioni agli autostati dell'Hamiltoniana al primo ordine in λ.

d) *Facoltativo*: Determinare gli autovalori esatti di H e confrontare il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle distinguibili di spin 1 sono descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \,.$$

dove ω è una frequenza ed $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle.

All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano nello stato in cui le componenti z dei loro spin valgono rispettivamente $s_{1z} = \hbar$ e $s_{2z} = 0$.

a) Determinare lo stato delle due particelle al tempo generico $t > 0$. Determinare quindi i possibili risultati di una misura dell'energia del sistema e le rispettive probabilità.

b) Determinare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura di S_{1z} e S_{2z} e le rispettive probabilità. Calcolare quindi i valori medi di S_{1z}, S_{2z} e della componente S_z dello spin totale delle due particelle.

c) Calcolare la probabilità che una misura della componente S_{1x} dello spin della prima particella fornisca come risultato $s_{1x} = \hbar$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

2 Settembre 2013

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi liberamente su di una circonferenza di raggio R. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2\,mR^2} = -\frac{\hbar^2}{2\,mR^2}\,\frac{d^2}{d\varphi^2}$$

dove φ rappresenta l'angolo polare che definisce la posizione della particella lungo la circonferenza e $p_\varphi = -i\,\hbar\, d/d\varphi$ è il suo momento coniugato.

All' istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi\,(\varphi) = N\left(\frac{1}{2} + \operatorname{sen}\varphi\right)$$

dove N è una costante di normalizzazione.

a) Osservando che le funzioni

$$\psi_\ell(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i\ell\varphi}, \qquad \ell = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

sono autofunzioni simultanee del momento p_φ e dell'Hamiltoniana H, determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella, le rispettive probabilità ed il valore medio dell'energia.

b) Determinare la funzione d'onda della particella al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di $sen\,\varphi$.

c) Determinare l'operatore velocità angolare $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ e calcolarne il valore medio nello stato della particella.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin nullo è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = -\mu\,\vec{B}\cdot\vec{L}\,,$$

dove $\vec{B}$ è un campo magnetico costante diretto lungo l'asse z, $\vec{L}$ l'operatore momento angolare orbitale e μ il momento magnetico della particella.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato di L^2 con $\ell = 1$ descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi\,.$$

a) Calcolare il valore medio di $cos^2\theta$.

b) Determinare lo stato evoluto al tempo $t > 0$, i possibili risultati di una misura di L_z e le rispettive probabilità.

c) Calcolare il valor medio di L_x in funzione del tempo.

d) Calcolare il valor medio dell'anticommutatore $\{L_x, L_y\}$ in funzione del tempo.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti all'autovalore $\ell = 1$ sono:

$$Y_{1,\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\text{sen}\,\theta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Novembre 2013

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno stato tale che:

i) una misura dell'energia fornisce solo valori $E \leq 7/2\,\hbar\omega$;
ii) una misura della parità fornisce con certezza il risultato -1;
iii) il valore medio dell'energia vale $\langle E\rangle = 13/6\,\hbar\omega$;
iv) risulta il seguente valore medio: $\langle a^2 + (a^+)^2\rangle = -4/\sqrt{3}$.

a) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t = 0$ ed al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo i valori medi degli operatori x, p, x^2 e p^2.

c) Verificare che a qualunque tempo risulta soddisfatta la relazione di indeterminazione $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1 è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera descritta dall' Hamiltoniana

$$H = a\,\vec{L}\cdot\vec{S}$$

dove a è una costante. Al tempo iniziale $t = 0$, la funzione d'onda della particella nella base degli autovettori di S_z è espressa da

$$\psi = N\begin{pmatrix} 3\cos\vartheta \\ 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,\vartheta\, e^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

con N costante di normalizzazione e ϑ, φ gli usuali angoli polari.

a) Determinare i possibili risultati e le corrispondenti probabilità di una misura di L^2, L_z ed S_z al tempo $t = 0$.

b) Determinare la funzione d'onda della particella al tempo generico $t > 0$.

c) Calcolare i valori medi di L_z, S_z e J_z in funzione del tempo.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm 1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\text{sen}\,\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\ .$$

PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

2 Dicembre 2013

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in due dimensioni soggetta ad un potenziale centrale di tipo armonico. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto

$$H = \frac{p_x^2}{2\,m} + \frac{p_y^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\left(x^2 + y^2\right) \ .$$

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che:
i) una misura dell'energia può fornire solo uno dei due valori $E = \hbar\omega$ ed $E = 2\,\hbar\omega$;
ii) il valore medio dell'energia è $\langle E\rangle = 3/2\,\hbar\omega$;
iii) i valori medi $\langle x^2\rangle$ ed $\langle y^2\rangle$ sono uguali tra loro;
iv) i valori medi delle coordinate valgono $\langle x\rangle = -\langle y\rangle = 1/2\,\sqrt{\hbar/(m\,\omega)}$.

a) Determinare il vettore di stato della particella al tempo $t = 0$ e al tempo generico $t > 0$.

Si supponga di aggiungere all'Hamiltoniana una perturbazione della forma

$$V(x, y) = \lambda\,m\,\omega^2\,x\,y \ .$$

b) Calcolare la correzione al livello di energia dello stato fondamentale al primo ordine non nullo della teoria delle perturbazioni.

c) Calcolare le correzioni al primo ordine in teoria delle perturbazioni al primo livello eccitato (degenere) di energia.

d) *Facoltativo*: Determinare i livelli di energia esatti del sistema descritto dall'Hamiltoniana $H + V$ e confrontare i risultati con quelli ottenuti in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\Omega}{\hbar}S^2 + \omega\,S_x \ ,$$

dove $\vec{S}$ è l'operatore di spin ed Ω e ω sono due frequenze.

All'istante di tempo iniziale $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che:
i) una misura di S_x può fornire solo uno dei due valori $S_x = \hbar$ ed $S_x = 0$;
ii) il valore medio dell'energia è $\langle E\rangle = 2\,\hbar\,(\Omega + \omega/3)$;
iii) il valore medio di S_z è $\langle S_z\rangle = -2/3\,\hbar$.

a) Determinare lo stato della particella al tempo $t = 0$ e al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo i possibili risultati di una misura di S_z e le rispettive probabilità.

c) Determinare i tre operatori $\dot{S}_i = dS_i/dt$ $(i = x, y, z)$, calcolarne i valori medi $\langle\dot{S}_i\rangle_t$ nello stato della particella al tempo t e verificare che risultano soddisfatte le relazioni

$$\langle\dot{S}_i\rangle_t = \frac{d}{dt}\langle S_i\rangle_t \ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

27 Gennaio 2014

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana H definita da

$$\begin{aligned} H\,|1\rangle &= \varepsilon\left(2\,|1\rangle - \sqrt{2}\,|3\rangle\right) \ , \\ H\,|2\rangle &= 2\,\varepsilon\,|2\rangle \ , \\ H\,|3\rangle &= \varepsilon\left(-\sqrt{2}\,|1\rangle + 3\,|3\rangle\right) \ , \end{aligned}$$

dove ε è una costante avente le dimensioni di energia e $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ sono stati ortonormali. All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|1\rangle$.

a) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ e gli istanti di tempo in cui il sistema si ritrova nello stato iniziale.

Si consideri quindi l'operatore A definito da

$$\begin{aligned} A\,|1\rangle &= a\left(\sqrt{2}\,|1\rangle + 4\,|3\rangle\right) \ , \\ A\,|2\rangle &= a\,|2\rangle \ , \\ A\,|3\rangle &= a\left(4\,|1\rangle - \sqrt{2}\,|3\rangle\right) \ , \end{aligned}$$

dove a è una costante reale.

b) Mostrare che i valore medi di A risultano, per il sistema considerato, indipendenti dal tempo.

c) Determinare la matrice rappresentativa di A nella base degli autostati dell'Hamiltoniana.

ESERCIZIO N° 2

Un atomo di idrogeno è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\,m} - \frac{e^2}{r}$$

e da relative autofunzioni della forma

$$\psi_{n\ell m\sigma} = R_{n\ell}(r)\,Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)\,\chi_\sigma$$

dove $R_{n\ell}$ sono le funzioni radiali per il campo coulombiano, $Y_{\ell m}$ le armoniche sferiche e $\chi_\pm$ gli usuali spinori autovettori di S_z per particelle di spin 1/2.

a) Si consideri l'atomo nello stato fondamentale descritto dalla funzione d'onda ψ_{100+}. Calcolare i valori medi degli operatori z, z^2, p_z e p_z^2. Determinare inoltre le indeterminazioni Δz e Δp_z di posizione e impulso nella direzione z e verificare che risulta soddisfatto il principio di indeterminazione.

b) Si consideri quindi l'atomo nello stato eccitato descritto dalla funzione d'onda ψ_{210+}. Calcolare i valori medi degli operatori x^2 e z^2 verificando che il primo risulta minore del secondo. Sapreste dare una spiegazione qualitativa di questo risultato?

c) Nello stato descritto dalla funzione d'onda ψ_{210+}, determinare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di J^2, dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è il momento angolare totale dell'atomo.

Si ricorda che le funzioni radiali per il campo coulombiano per i primi due valori di n sono date da:

$$R_{10}(\rho) = \frac{2}{a_0^{3/2}}\, e^{-\rho}\ , \quad R_{20}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}\, a_0^{3/2}} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) e^{-\rho/2}\ , \quad R_{21}(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{6}\, a_0^{3/2}}\, \rho\, e^{-\rho/2}\ ,$$

dove $\rho = r/a_0$ ed $a_0 = \hbar^2/(me^2)$ è il raggio di Bohr. Si ricorda inoltre che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{00}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, \mathrm{sen}\,\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{10}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, \cos\vartheta\ .$$

Si consideri infine che, per n intero e non negativo, vale il seguente integrale:

$$\int_0^\infty ds\, s^n\, e^{-s} = n!$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10 Febbraio 2014

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = -\frac{\hbar^2\,\lambda}{2\,m}\,\delta(x) + V_0\,\theta(x)\ .$$

con $V_0\,, \lambda > 0$.

a) Determinare l'energia $E < 0$ dell'unico stato legato permesso per il sistema.

b) Assumendo che la particella si trovi in questo stato, calcolare le probabilità che, a seguito di una misura di posizione, la particella venga trovata rispettivamente nelle regioni con $x < 0$ ed $x > 0$. Calcolare inoltre il valore medio della posizione.

Si consideri quindi un fascio di particelle dello stesso tipo provenienti da $x = -\infty$ con energia $E > V_0$ ed incidenti sul potenziale $V(x)$.

c) Calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione R e T nel punto $x = 0$.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin nullo è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = -\mu\,\vec{B}\cdot\vec{L}\ ,$$

dove $\vec{B} = \frac{B}{\sqrt{2}}\,(1,1,0)$ è un campo magnetico costante, $\vec{L}$ è l'operatore momento angolare orbitale e μ il momento magnetico della particella.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato di L^2 e L_z con autovalori rispettivamente pari a $2\,\hbar^2$ e 0.

a) Calcolare la probabilità che facendo una misura di posizione la particella venga trovata con angolo $\theta \in [0,\pi/4]$ ed angolo $\varphi \in [0,\pi]$.

b) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità.

c) Determinare lo stato evoluto al tempo $t > 0$ e calcolare in funzione del tempo i valori medi di L_z e L_z^2.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, \mathrm{sen}\,\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, \cos\vartheta\ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

28 Aprile 2014

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t=0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\xi) = N\left(4\,\xi^4 - 3\right)\exp\left(-\xi^2/2\right) \ ,$$

dove $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\,x$ ed N è una costante di normalizzazione.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia, le rispettive probabilità e il valore medio dell'energia.

b) Determinare la funzione d'onda dell'oscillatore al tempo generico $t>0$ e la densità di probabilità di trovare al tempo t l'oscillatore nella posizione $x=0$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\;H_n(\xi)\;\exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin 1 si trovano nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1\rangle_x|-1\rangle_x - |-1\rangle_x|+1\rangle_x\right) \ ,$$

dove $|\pm 1\rangle_x$ indicano gli stati di singola particella autostati di S_{1x} o S_{2x} con autovalori $\pm\hbar$.

a) Determinare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura simultanea degli spin S_{1z} e S_{2z} delle due particelle.

b) Determinare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura dello spin totale $S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ delle due particelle e delle sue componenti S_z ed S_x.

Si effettua quindi una misura dello spin S_{1z} della prima particella e si ottiene come risultato $S_{1z}=0$.

c) Determinare lo stato delle particelle dopo la misura e i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura degli spin totali S^2 ed S_z.

d) *Facoltativo*: Determinare in questo stato i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di S_x.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10 Giugno 2014

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a due stati è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \hbar\omega\begin{pmatrix} 1 & i\,\varepsilon \\ -i\,\varepsilon & -1 \end{pmatrix}$$

dove ω è una frequenza ed ε una costante adimensionale.

All'istante iniziale $t=0$ il sistema si trova nello stato $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare autovalori ed autostati di H.

b) Assumendo $\varepsilon \ll 1$ ed utilizzando la teoria delle perturbazioni, determinare gli autovalori di H approssimati fino al secondo ordine dello sviluppo in ε e gli autostati approssimati al primo ordine in ε.

Confrontare quindi i risultati ottenuti con quelli esatti.

c) Utilizzando i risultati ottenuti in teoria delle perturbazioni, calcolare la probabilità che al tempo generico $t>0$ il sistema venga a trovarsi nello stato $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) *Facoltativo*: Determinare la probabilità calcolata al punto c) utilizzando le formule della teoria delle perturbazioni dipendendente dal tempo al primo ordine.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin $s=1$ e momento angolare orbitale $\ell=1$ è descritta dall' Hamiltoniana

$$H = a\,J^2$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è l'operatore momento angolare totale ed a una costante.

All'istante iniziale $t=0$ la particella si trova in un autostato con autovalore nullo sia di L_z che di S_z.

a) Determinare lo stato della particella al tempo $t>0$.

b) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi di J^2, L_z, S_z e del prodotto L_zS_z.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio del prodotto L_xS_x.

ESERCIZIO N° 1
Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno stato tale che:

i) una misura dell'energia fornisce solo risultati $E \leq \frac{5}{2}\hbar\omega$;

ii) il valore medio dell'energia vale $\langle E \rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega$;

iii) il valore medio della parità è nullo;

iv) il valore medio dell'energia cinetica vale $\langle T \rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega\,(3 - 1/\sqrt{2})$;

v) il valore medio della posizione vale $\langle x \rangle = -\frac{(1+\sqrt{2})}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

a) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t = 0$ e al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo i valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

c) Calcolare in funzione del tempo l'indeterminazione sulla posizione $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$.

d) *Facoltativo*: calcolare il prodotto delle indeterminazioni su posizione e impulso, $\Delta x \cdot \Delta p$, e verificare che il risultato è consistente, a qualunque tempo, con la relazione di indeterminazione.

ESERCIZIO N° 2
Due particelle di spin 1/2 interagiscono reciprocamente descritte dall'Hamiltoniana

$$H = A\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - 3\,S_{1x}\,S_{2x}\right) ,$$

dove $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle ed A è una costante reale positiva.

a) Determinare la matrice rappresentativa dell'Hamiltoniana H nella base degli autostati dello spin totale S^2 ed S_z.

b) Determinare i livelli di energia del sistema, il relativo grado di degenerazione e gli autostati dell'Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$ si effettua una misura delle componenti z degli spin delle due particelle e si ottiene come risultato $S_{1z} = S_{2z} = +\hbar/2$.

c) Determinare lo stato delle particelle al tempo generico $t > 0$ e il valore medio in funzione del tempo dello spin totale S_z.

ESERCIZIO N° 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = V_0(x) + V_\lambda(x)$$

dove:

$$V_0(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } 0 \leq x \leq L \\ +\infty\,, & \text{fuori} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V_\lambda(x) = \lambda\,\delta(x - L/2)\ ,$$

con $\lambda > 0$.

a) Considerando il potenziale $V_\lambda(x)$ come una perturbazione, determinare le correzioni all'autovalore dell'energia dello stato fondamentale E_1 al secondo ordine dello sviluppo in λ.

b) Risolvendo esattamente l'equazione di Schrodinger per il potenziale $V(x)$, derivare l'equazione che determina implicitamente gli autovalori dell'energia, risolvere graficamente questa equazione e individuare un intervallo di valori all'interno del quale è compreso il livello di energia fondamentale.

c) *Facoltativo*: Mostrare che la soluzione dell'equazione che determina il livello di energia E_1 coincide, al secondo ordine dello sviluppo in λ, con il risultato ottenuto in teoria delle perturbazioni.

Per lo svolgimento dei calcoli risulta utile il valore della seguente serie:

$$\sum_{\substack{k\,\text{dispari} \\ k \neq 1}} \frac{1}{k^2 - 1} \overset{(k=2k'+1)}{=} \frac{1}{4}\sum_{k'=1}^{\infty} \frac{1}{k'\,(k'+1)} = \frac{1}{4}\sum_{k'=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k'+1}\right) = \frac{1}{4}$$

Si ricorda inoltre che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale $V_0(x)$ sono

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2\,mL^2} \qquad \text{e} \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2/L}\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,, & \text{per } 0 \leq x \leq L \\ 0\,, & \text{fuori} \end{cases}$$

con $n = 1, 2, 3, \ldots$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 0 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\left(L_x^2 - L_y^2\right) ,$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore di momento angolare orbitale ed a una costante.

a) Determinare nel sottospazio corrispondente ad $\ell = 1$ la rappresentazione matriciale dell'Hamiltoniana nella base degli autostati di L^2 ed L_z. Calcolare quindi autovalori ed autovettori di H.

b) Calcolare per l'autostato di H con autovalore positivo la probabilità di trovare la particella, descritta da questo stato, con angolo polare ϑ compreso tra 0^o e 60^o.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato simultaneo di L^2 ed L_z corrispondente ad $\ell = 1$ ed $m = 1$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi di L_z ed L_x.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta \ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

27 Ottobre 2014

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\xi) = N\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(2\,\xi^3 + 2\,\xi^2 - 3\,\xi - 1\right)\exp\left(-\xi^2/2\right) \ ,$$

dove $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\,x$ ed N è una costante di normalizzazione.

a) Determinare la costante di normalizzazione N, il valore medio dell'energia ed il valore medio della parità.

b) Calcolare, all'istante iniziale, la probabilità di trovare l'oscillatore con $x > 0$.

c) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo generico $t > 0$ e calcolare per tale stato il valore medio della posizione e dell'impulso.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\,H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

Si ricorda inoltre il risultato generale per gli integrali di tipo gaussiano

$$\int_0^\infty d\xi\,\xi^\alpha\,e^{-\xi^2} = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

dove $\Gamma(s)$ è la funzione Gamma di Eulero che soddisfa

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\ , \quad \Gamma(1) = 1\ , \quad \Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)\ .$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa infinita e spin 1 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{gB}{\sqrt{2}}\,(S_x + S_y)$$

dove $\vec{S} = (S_x,\,S_y,\,S_z)$ è l'operatore di spin, B il campo magnetico e g una costante.

a) Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova in uno stato tale che:

$$\langle S_z\rangle = 0\ , \quad \langle S_z^2\rangle = \frac{1}{3}\,\hbar^2\ , \quad \langle S_x\rangle = \frac{4}{3\sqrt{2}}\,\hbar\ .$$

b) Determinare lo stato della particella al tempo $t = 0$.

c) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$.

d) Facoltativo: Calcolare, in funzione del tempo, la probabilità che effettuando una misura di S_z si ottenga come risultato il valore $+\hbar$.

N.B. Nei calcoli può risultare utile considerare che: $\dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}} = e^{\pm\,i\,\pi/4}$.

PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

15 Dicembre 2014

ESERCIZIO N^o 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno state tale che: i) una misura dell'energia fornisce solo risultati $3\hbar\omega \le E \le 5\hbar\omega$; ii) il valore medio dell'energia vale $\langle E\rangle = (25/6)\hbar\omega$; iii) il valore medio dell'impulso vale $\langle p\rangle = (4/3)\sqrt{m\hbar\omega}$.

a) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo iniziale $t = 0$ ed al tempo generico $t > 0$.

b) Determinare l'operatore dp/dt, calcolare i valori medi $\langle dp/dt\rangle_t$ e $\langle p\rangle_t$ nello stato dell'oscillatore al tempo t e verificare che risulta soddisfatta ad ogni istante di tempo la relazione

$$\langle \frac{dp}{dt}\rangle_t = \frac{d}{dt}\langle p\rangle_t \ .$$

c) Calcolare il prodotto delle indeterminazioni su posizione e impulso $\Delta x \cdot \Delta p$ al tempo t e verificare che il risultato è consistente con la relazione di indeterminazione.

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di spin nullo è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = -\mu\, B L_z \ ,$$

dove L_z è la componente z del momento angolare orbitale, B un campo magnetico costante e μ il momento magnetico della particella.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato di L^2 corrispondente ad $\ell = 2$ descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{16\pi}}\,\mathrm{sen}^2\theta\, \cos 2\varphi \ .$$

a) Calcolare la probabilità che, a seguito di una misura di posizione al tempo $t = 0$, la particella venga trovata con un valore dell'angolo θ compreso tra 60° e 90°.

b) Calcolare in funzione del tempo $t > 0$ i valori medi $\langle L_x^2\rangle_t$, $\langle L_y^2\rangle_t$ e $\langle L_z^2\rangle_t$.

c) Calcolare la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella venga a trovarsi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi_\alpha(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{48\pi}}\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sen}^2\theta\, \cos 2\varphi - 3\sqrt{2}\cos^2\theta + \sqrt{2}\right) \ .$$

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti all'autovalore $\ell = 2$ sono:

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\mathrm{sen}^2\theta\, e^{\pm 2i\varphi} \quad , \quad Y_{2,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\, \cos\theta\, e^{\pm i\varphi}$$
$$Y_{2,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1) \ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

27 Gennaio 2015

ESERCIZIO N^o 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale $V(x)$ definito da

$$V(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{per } |x| < a \\ -V_0\ , & \text{per } a \le |x| \le 2a \\ \infty\ , & \text{per } |x| > 2a\ , \end{cases}$$

con V_0 costante positiva.

a) Determinare, a meno di una costante di normalizzazione, le autofunzioni dell Hamiltoniana corrispondenti ad energia $E = 0$ e le equazioni che determinano i valori della costante V_0 per cui questo stato con energia nulla esiste. Discutere quindi, esplicitamente o graficamente, le soluzioni di queste equazioni.

b) Nel caso in cui V_0 è uguale al minimo dei valori precedentemente trovati, calcolare la probabilità relativa di trovare la particella nelle regioni $a \le x \le 2a$ e $0 \le x \le a$, ossia il rapporto delle probabilità

$$\frac{P(a \le x \le 2a)}{P(0 \le x \le a)} \ .$$

ESERCIZIO N^o 2

Due particelle di spin 1/2 sono descritte dall'Hamiltoniana

$$H = a\, S_+ S_- \ ,$$

dove $S_\pm$ sono gli operatori a scala dello spin totale $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ delle due particelle ed a è una costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano nello stato in cui una misura di S_{1x} fornisce con certezza il risultato $+\hbar/2$ ed una misura di S_{2y} fornisce con certezza il risultato $-\hbar/2$.

a) Calcolare il valore medio dell'energia delle due particelle.

b) Determinare lo stato delle particelle al tempo generico $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, i valori medi $\langle S_x\rangle_t$ e $\langle S_y\rangle_t$ delle componenti x ed y dello spin totale.

c) Calcolare in funzione del tempo i valori medi $\langle S_{1z}\rangle_t$, $\langle S_{2z}\rangle_t$ ed $\langle S_z\rangle_t$ delle componenti z degli spin delle due particelle e dello spin totale.

d) *Facoltativo*: Calcolare in funzione del tempo l'indeterminazione $(\Delta S_z)_t^2 = \langle (S_z - \langle S_z\rangle)^2\rangle_t$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
6 Febbraio 2015

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana $H = H_0 + V$, dove

$$H_0 = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad V = 2\,\lambda\,\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\,i \\ 0 & 3 & 0 \\ -2\,i & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

ε è una costante avente le dimensioni di energia e λ una costante adimensionale.

a) Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana H_0.

b) Trattando V come una perturbazione, calcolare le correzioni al primo ordine in λ agli autovalori e agli autostati di H.

c) Determinare gli autovalori esatti di H e confrontare il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni.

d) *Facoltativo*: Determinare gli autostati esatti di H e confrontare il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin $s = 1/2$ e momento angolare orbitale $\ell = 1$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\ (L_+ S_- + L_- S_+)\ ,$$

dove $L_\pm$ e $S_\pm$ sono gli operatori a scala del momento angolare orbitale e di spin ed a è una costante.

a) Determinare la rappresentazione matriciale dell'Hamiltoniana H nella base degli autostati simultanei di L^2, S^2, L_z, S_z. A tale scopo si suggerisce di ordinare gli stati di base nel modo seguente

$$|1\uparrow\rangle\,,\ |1\downarrow\rangle\,,\ |0\uparrow\rangle\,,\ |0\downarrow\rangle\,,\ |-1\uparrow\rangle\,,\ |-1\downarrow\rangle\ ,$$

dove si è indicato ad esempio con $|1\uparrow\rangle$ l'autostato corrispondente ad $m = 1$ e $s_z = 1/2$ (i numeri quantici $\ell = 1$ ed $s = 1/2$ sono sempre sottintesi).

Calcolare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato $|1\downarrow\rangle$.

b) Determinare lo stato evoluto al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, i valori medi di L_z, S_z e J_z, dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è il momento angolare totale della particella.

c) Determinare le espressioni degli operatori $\dfrac{dL_z}{dt}$, $\dfrac{dS_z}{dt}$ e $\dfrac{dJ_z}{dt}$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
20 Aprile 2015

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita nell'intervallo $0 \le x \le L$. La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = N\,x^2\,(x-a)\ , \qquad \text{per } 0 \le x \le L$$

e $\psi(x) = 0$ fuori, dove a ed N sono costanti.

a) Determinare le costanti a ed N.

b) Calcolare la probabilità che, effettuando una misura dell'energia, si ottenga come risultato il valore $E = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2\,mL^2}$.

c) Calcolare i valori medi di x, x^2, p e p^2 e verificare che risulta soddisfatta la relazione di indeterminazione $\Delta x \cdot \Delta p \ge \hbar/2$.

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale considerata sono

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2\,mL^2} \qquad \text{e} \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{per } 0 \le x \le L$$

e $\psi(x) = 0$ fuori, con $n = 1, 2, 3, \ldots$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin nullo e momento angolare orbitale $\ell = 1$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\left(L_x^2 - 3L_y^2 + L_z^2\right)\ ,$$

dove L_x, L_y ed L_z sono le componenti del momento angolare orbitale ed a è una costante reale.

a) Determinare autovalori ed autostati dell'Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di L_z con autovalore $-\hbar$.

b) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di L_z.

c) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi di L_x^2, L_y^2 ed L_z^2.

d) *Facoltativo*: Verificare che risulta soddisfatta a tutti i tempi la relazione di indeterminazione per L_x ed L_y.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
15 Giugno 2015

ESERCIZIO N^o 1
Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno state tale che: i) una misura dell'energia fornisce solo valori $E \leq (7/2)\,\hbar\,\omega$; ii) una misura della parità fornisce con certezza il risultato $P = -1$; iii) i possibili risultati di una misura dell'energia sono equiprobabili; iv) il valore medio dell'energia potenziale è $\langle V\rangle = (5/4)\,\hbar\,\omega$.

a) Mostrare che le suddette condizioni non sono sufficienti a determinare univocamente lo stato iniziale del sistema e derivare l'espressione più generale risultante per tale stato.

b) Determinare i valori medi dell'energia potenziale e dell'energia cinetica dell'oscillatore al tempo $t > 0$.

Si supponga di aggiungere all'Hamiltoniana una perturbazione della forma

$$V(x) = \lambda\,\hbar\omega\,\hat{x}^3 \ ,$$

dove $\hat{x} = x\,\sqrt{m\omega/\hbar}$ e $\lambda \ll 1$ è una costante adimensionale.

c) Calcolare le correzioni al livello di energia dello stato fondamentale del sistema fino al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

d) _Facoltativo_: calcolare la correzione all'autostato di energia fondamentale al primo ordine della teoria delle perturbazioni

ESERCIZIO N^o 2
Due particelle identiche di spin 3/2 sono descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{2\hbar}\left(S^2 + 2\hbar\,S_z\right) \ ,$$

dove $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ è l'operatore di spin totale delle due particelle, $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$ gli spin di singola particella ed ω una frequenza costante.

a) Determinare i livelli di energia del sistema nei due casi in cui la funzione d'onda spaziale delle due particelle sia rispettivamente antisimmetrica o simmetrica rispetto allo scambio delle particelle. Discutere quindi in particolare la degenerazione dei livelli.

All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2,2\rangle + |2,1\rangle\right) \ ,$$

dove $|s, s_z\rangle$ sono gli autostati simultanei di S^2 ed S_z (corrispondenti rispettivamente agli autovalori $\hbar^2 s(s+1)$ e $\hbar s_z$).

b) Esprimere lo stato iniziale delle due particelle come combinazione lineare degli autostati delle componenti di spin S_{1z} ed S_{2z} di singola particella, calcolando esplicitamente i coefficienti di Clebsch-Gordan rilevanti. Determinare quindi i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di S_{1z}.

c) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, i valori medi di S_x ed S_{1x}.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
21 Luglio 2015

ESERCIZIO N^o 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi liberamente in una dimensione e si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = N \exp\left(-a\,|x|\right) \ ,$$

dove N è una costante di normalizzazione ed a una costante reale e positiva.

a) Calcolare i valori medi di x e x^2 e l'indeterminazione Δx sulla posizione della particella.

b) Calcolare i valori medi di p e p^2 e l'indeterminazione Δp sull'impulso della particella. Verificare quindi, per lo stato dato, la relazione di indeterminazione $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$.

c) Determinare la funzione d'onda $\psi(p)$ della particella nella rappresentazione degli impulsi e utilizzare quindi questa funzione per calcolare nuovamente i valori medi di p e p^2.

d) _Facoltativo_: utilizzando il risultato ottenuto per la funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi, determinare l'evoluzione temporale della funzione $\psi(x)$.

Nel calcolo di $\langle p^2\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate si suggerisce di sostituire la derivata seconda della funzione d'onda mediante un'integrazione per parti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\psi^* \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^* \left(\frac{d\psi}{dx}\right) \ .$$

Si consideri inoltre che vale il seguente integrale: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} ds\,\frac{s^2}{(s^2+s_0^2)^2} = \frac{\pi}{2\,s_0}$.

ESERCIZIO N^o 2
Una particella di spin 1/2 e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante di componenti $\vec{B} = B\,(1, -2, 2)\,/3$. L'Hamiltoniana che descrive la particella è:

$$H = \mu\,\vec{S}\cdot\vec{B}$$

dove $\vec{S}$ è l'operatori di spin e μ il momento magnetico della particella.

a) Determinare la rappresentazione matriciale dell'Hamiltoniana nella base degli autostati di S_z e gli autovalori e gli autostati di H.

All'istante iniziale $t = 0$ si esegue una misura della componente y dello spin della particella e si ottiene come risultato $S_y = +\hbar/2$.

b) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$ e le probabilità dei possibili risultati di una misura dell'energia.

c) Calcolare, in funzione del tempo, la probabilità che una misura di S_z fornisca il risultato $S_z = +\hbar/2$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
14 Settembre 2015

ESERCIZIO N° 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi in due dimensioni descritta dall'Hamiltoniana

$$H = H_0 + V \ ,$$

dove H_0 è l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico bidimensionale,

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$$

e $V(x,y)$ una perturbazione della forma

$$V = \varepsilon\,(x+y)^2 \ .$$

a) Determinare autostati e autovalori dell'Hamiltoniana imperturbata H_0 ed il grado di degenerazione dei livelli di energia.

b) Calcolare la correzione al livello di energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine (ε^2) della teoria delle perturbazioni.

c) Calcolare le correzioni al primo ordine al primo livello eccitato (degenere) di energia.

d) Facoltativo: Determinare i livelli di energia esatti dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$ e confrontare i risultati con quelli ottenuti in teoria delle perturbazioni. A tale scopo si suggerisce di scrivere H come somma di due Hamiltoniane note mediante la trasformazione di coordinate $x_+ = x + y \ , \ x_- = x - y$.

ESERCIZIO N° 2
Un rotatore quantistico è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2I_1}\left(L_x^2 + L_y^2\right) + \frac{1}{2I_2}\,L_z^2$$

dove L_x, L_y, L_z sono le componenti del momento angolare orbitale ed I_1, I_2 due momenti di inerzia, con $I_1 \neq I_2$.

a) Determinare autostati e autovalori dell'Hamiltoniana ed il grado di degenerazione dei livelli di energia.

All'istante iniziale $t = 0$ il rotatore si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi\,(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{16\pi}}\left(1 + \sqrt{6}\cos\vartheta - i\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\vartheta\,e^{i\varphi}\right) \ .$$

b) Determinare lo stato del rotatore al tempo $t > 0$. Calcolare quindi i valori medi di L_x, L_y, L_z in funzione del tempo.

c) Calcolare i possibili risultati di una misura di L_y al tempo $t > 0$ e le relative probabilità.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\vartheta \ .$$

PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
10 Dicembre 2015

ESERCIZIO N° 1
Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\xi) = A\,(1 + b\,\xi)\exp\left(-\xi^2/2\right) \ ,$$

dove $\xi = x/x_0 = x/\sqrt{(\hbar/(m\omega)}$, A è una costante di normalizzazione e b un parametro complesso.

a) Determinare, in funzione del parametro b, la costante di normalizzazione A, i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità.

b) Calcolare la probabilità di trovare l'oscillatore in $x > 0$ e il valore medio della posizione al tempo $t = 0$. Determinare quindi per quale valore b_m di b queste due grandezze hanno un massimo e i valori assunti dalla probabilità e dal valore medio per $b = b_m$.

c) Determinare la funzione d'onda dell'oscillatore al tempo $t > 0$ e l'indeterminazione Δx sulla sua posizione. Valutare quindi Δx per $b = b_m$.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\,H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 1 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \varepsilon\left(\frac{2\,S_x^2 + S_z^2}{\hbar^2} - \frac{2S_z}{\hbar}\right)$$

dove S_x e S_z sono le componenti x e z dell'operatore di spin ed ε una costante avente le dimensioni dell'energia.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato di S_z con autovalore $+\hbar$.

a) Determinare gli autovalori e gli autostati dell'Hamiltoniana.

b) Determinare lo stato evoluto della particella al tempo $t > 0$, i possibili risultati di una misura di S_z e le rispettive probabilità. Calcolare inoltre il valore medio di S_z in funzione del tempo.

c) Determinare l'espressione dell'operatore dS_z/dt.

d) Facoltativo: Calcolare il valore medio di dS_z/dt al tempo t e verificare che risulta soddisfatta la relazione

$$\langle\frac{dS_z}{dt}\rangle_t = \frac{d}{dt}\langle S_z\rangle_t \ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Febbraio 2016

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana H definita da

$$H\,|1\rangle = 2\,\varepsilon\,|2\rangle \;,$$
$$H\,|2\rangle = \varepsilon\,(2\,|1\rangle + 4\,|2\rangle - i\,|3\rangle) \;,$$
$$H\,|3\rangle = i\,\varepsilon\,|2\rangle \;,$$

dove ε è una costante avente le dimensioni di energia e $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ sono stati ortonormali. All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|2\rangle$.

a) Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ e la probabilità di ritrovare al tempo t il sistema nello stato iniziale.

Si consideri poi l'operatore Q definito da

$$Q\,|1\rangle = q\,(|1\rangle + 2\,|3\rangle) \;,$$
$$Q\,|2\rangle = q\,|2\rangle \;,$$
$$Q\,|3\rangle = q\,(2\,|1\rangle + |3\rangle) \;,$$

dove q è una costante reale.

c) Calcolare il valore medio di Q in funzione del tempo e verificare che non ne dipende.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin 1/2 si trovano nello stato di singoletto

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\uparrow\rangle_z|\downarrow\rangle_z - |\downarrow\rangle_z|\uparrow\rangle_z) \;,$$

dove $|\uparrow\rangle_z$ e $|\downarrow\rangle_z$ indicano gli autostati della componente z dell'operatore di spin di singola particella corrispondenti rispettivamente agli autovalori $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$.

Si indichi quindi con $S_{\hat{n}} = \vec{S}\cdot\hat{n}$ la proiezione dello spin nella direzione individuata dal versore $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,1,0)$.

a) Calcolare la probabilità che una misura dello spin S_{1x} della prima particella e dello spin $S_{2\hat{n}}$ della seconda particella forniscano come risultato $S_{1x} = S_{2\hat{n}} = +\hbar/2$.

b) Si supponga ora di aver misurato lo spin S_{1x} della prima particella e di avere ottenuto come risultato $S_{1x} = +\hbar/2$. Determinare lo stato delle particelle dopo la misura. Calcolare quindi la probabilità che una misura dello spin $S_{2\hat{n}}$ della seconda particella, eseguita immediatamente dopo la determinazione di S_{1x}, fornisca come risultato $S_{2\hat{n}} = +\hbar/2$.

c) Se dopo la prima misura di S_{1x} si misura invece lo spin totale delle due particelle, con che probabilità si ottiene $s = 1$?

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

22 Febbraio 2016

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m e carica elettrica e è vincolata a muoversi in una dimensione sul semiasse $x > 0$ soggetta a un potenziale coulombiano. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{x} \;.$$

a) Mostrare che le funzioni d'onda

$$\psi_1(\xi) = \frac{2}{\sqrt{a_0}}\,\xi\,e^{-\xi} \quad \text{e} \quad \psi_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a_0}}\,\xi\,(1-\xi/2)\,e^{-\xi/2} \;,$$

dove $\xi = x/a_0$ e $a_0 = \hbar^2/(m\,e^2)$, sono autofunzioni dell'Hamiltoniana e calcolare i corrispondenti autovalori E_1 ed E_2.

b) Calcolare i valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale della particella quando questa si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda ψ_1.

c) Si assuma che la particella si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\xi) = N\,\xi\,e^{-\xi/2} \;,$$

dove N è una costante di normalizzazione. Calcolare le probabilità che una misura dell'energia della particella fornisca come risultato rispettivamente E_1 e E_2.

ESERCIZIO N° 2

Una particella è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left(J_x\,J_y + J_y\,J_x + \frac{\hbar}{\sqrt{3}}J_z\right) \;,$$

dove $\vec{J}$ è l'operatore di momento angolare totale ed ε una costante avente le dimensioni dell'energia.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$$

dove $|j,m\rangle$ indicano gli autostati di J^2 ed J_z.

a) Determinare lo stato evoluto della particella al tempo $t > 0$.

b) Calcolare, in funzione del tempo, le probabilità che una misura di J_z fornisca come risultato rispettivamente $+\hbar$ e $-\hbar$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di J_x.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
16 Giugno 2016

ESERCIZIO N° 1
Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\xi) = N\left(2\,\xi^2 - 2\,\xi - 1\right)\exp\left(-\xi^2/2\right)\ ,$$

dove $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\,x$ ed N è una costante di normalizzazione.

a) Determinare la costante di normalizzazione N, i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità.

b) Calcolare, all'istante iniziale, la probabilità di trovare l'oscillatore con $x > 0$.

c) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo generico $t > 0$ e calcolare per tale stato il valore medio della posizione e dell'impulso.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\,H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

Si ricorda inoltre il risultato generale per gli integrali di tipo gaussiano

$$\int_0^\infty d\xi\,\xi^\alpha\,e^{-\xi^2} = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

dove $\Gamma(s)$ *è la funzione Gamma di Eulero che soddisfa*

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\ ,\quad \Gamma(1) = 1\ ,\quad \Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)\ .$$

ESERCIZIO N° 2
Due particelle distinguibili di spin 1/2 e momento magnetico $\vec{\mu}_1 = g_1\,\vec{S}_1$ e $\vec{\mu}_2 = g_2\,\vec{S}_2$ sono immerse in un campo magnetico $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto

$$H = -\left(g_1\,\vec{S}_1 + g_2\,\vec{S}_2\right)\cdot\vec{B}\ .$$

All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano nello stato di tripletto con $S_z = 0$, dove $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ è lo spin totale delle due particelle.

a) Calcolare lo stato del sistema al tempo generico $t > 0$, i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura dell'energia e le probabilità in funzione del tempo di trovare le particelle nello stato di singoletto o in ciascuno dei tre stati di tripletto.

b) Calcolare, in funzione del tempo, le probabilità dei possibili risultati di una misura congiunta degli spin S_{1y} e S_{2y} delle due particelle ed i valori medi di S_{1y}, S_{2y}, $S_{1y}\cdot S_{2y}$ e dello spin totale S_y.

Si supponga quindi di eseguire una misura degli spin S_{1y} e S_{2y} delle due particelle e di ottenere come risultato $S_{1y} = +\hbar/2$ e $S_{2y} = -\hbar/2$.

c) Calcolare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura dell'energia, dello spin totale delle due particelle e della sua componente S_z.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 Luglio 2016

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale $V(x)$ definito da

$$V(x) = \begin{cases} -V_0\,, & \text{per } |x| < a \\ 0\,, & \text{per } a \le |x| \le 2a \\ \infty\,, & \text{per } |x| > 2a\,, \end{cases}$$

con V_0 costante positiva.

a) Determinare, a meno di una costante di normalizzazione, le autofunzioni dell' Hamiltoniana corrispondenti ad energia $E = 0$ e le equazioni che determinano implicitamente i valori della costante V_0 per cui questo stato con energia nulla esiste. Discutere quindi graficamente le soluzioni di queste equazioni.

b) Nel caso in cui V_0 è uguale al minimo dei valori precedentemente trovati, calcolare la probabilità relativa di trovare la particella nelle regioni $a \le x \le 2a$ e $0 \le x \le a$, ossia il rapporto delle probabilità

$$\frac{P(a \le x \le 2a)}{P(0 \le x \le a)}\ .$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin $s = 1$ e momento angolare orbitale $\ell = 1$ è descritta dall' Hamiltoniana

$$H = a\,J^2 + b\,\hbar\,J_z$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è l'operatore momento angolare totale ed a e b due costanti reali.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato di L_z con autovalore $+\hbar$ e di S_z con autovalore 0.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità.

b) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, i valori medi di L_z, S_z e J_z.

Si effettua poi una misura di J^2 ottenendo come risultato $2\,\hbar^2$.

c) Determinare lo stato della particella dopo la misura ed i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di L_z ed S_z. Calcolare quindi in questo stato i valori medi di L_x, S_x e del prodotto L_xS_x.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

16 Settembre 2016

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \varepsilon \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove ε è una costante avente le dimensioni di energia.

a) Determinare autovalori e autostati di H_0.

Si aggiunga all'Hamiltoniana H_0 una perturbazione rappresentata da

$$V = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

con la costante λ avente le dimensioni di energia e $\lambda/\varepsilon \ll 1$.

b) Calcolare le correzioni agli autovalori dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$ al secondo ordine della teoria delle perturbazioni e le correzioni agli autostati al primo ordine.

c) Determinare gli autovalori esatti di H e confrontare il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Tre particelle di massa m sono vincolate a muoversi in una dimensione soggette ad un potenziale armonico di frequenza ω centrato nell'origine. Indicando con p_i e x_i, $i = 1, 2, 3$, impulsi e coordinate spaziali delle tre particelle, l'Hamiltoniana che descrive il sistema è pertanto

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{2}m\,\omega^2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\ .$$

a) Determinare autostati e autovalori dell'Hamiltoniana e la relativa degenerazione per il livello fondamentale ed i primi due livelli eccitati di energia nei casi in cui le particelle siano:

i) particelle *distinguibili* di spin 0;

ii) particelle *identiche* di spin 0.

b) Determinare autostati e autovalori dell'Hamiltoniana e la relativa degenerazione per il livello fondamentale ed il primo livello eccitato nel caso in cui le particelle siano:

i) particelle *identiche* di spin 1/2.

c) Assumendo che le particelle siano particelle *identiche* di spin 1/2 che si trovano in uno degli stati corrispondenti al livello di energia fondamentale, calcolare la distanza quadratica media tra le prime due particelle, ossia il valore medio dell'operatore $(x_1 - x_2)^2$.

d) Facoltativo: Determinare autostati e autovalore dell'Hamiltoniana e la relativa degenerazione per il livello fondamentale nel caso in cui le particelle siano:

i) particelle *identiche* di spin 3/2.

PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Dicembre 2016

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = -\lambda\,\delta(x+a) + \lambda'\,\delta(x-a) \ ,$$

con λ e λ' costanti reali e non negative.

a) Ponendo $\lambda' = 0$, determinare l'autovalore dell'energia corrispondente all'unico stato legato con $E < 0$ e la relativa autofunzione, inclusa la costante di normalizzazione.

b) Ponendo $\lambda' = \lambda$, derivare l'equazione che determina l'autovalore dell'energia corrispondente allo stato legato con $E < 0$ e la relativa autofunzione a meno della costante di normalizzazione.

c) *Facoltativo*: studiare graficamente l'equazione che determina l'autovalore dell'energia derivata al punto b) e mostrare che questa equazione ammette sempre una ed un'unica soluzione.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa infinita e spin 1/2 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = gB\,(4\,S_y + 3\,S_z)$$

dove $\vec{S} = (S_x,\, S_y,\, S_z)$ è l'operatore di spin, B il campo magnetico e g una costante.

a) Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato di S_z con autovalore $+\hbar/2$.

b) Determinare lo stato evoluto della particella al tempo $t > 0$ ed il valore del tempo t_* al quale la particella si trova nuovamente nell'autostato di S_z con autovalore $+\hbar/2$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di S_x.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

30 Gennaio 2017

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno state tale che: i) una misura dell'energia fornisce solo due possibili risultati: $E = (5/2)\,\hbar\,\omega$ ed $E = (11/2)\,\hbar\,\omega$, con probabilità 2/3 ed 1/3 rispettivamente; ii) il valore medio di x^3 è pari a $\langle x^3 \rangle = 2\sqrt{5/3}\,(\hbar/m\omega)^{3/2}$.

a) Determinare lo stato iniziale dell'oscillatore.

b) Determinare lo stato evoluto al tempo $t > 0$ e i valori medi di x, x^2 e x^3 in funzione del tempo.

Si supponga di aggiungere all'Hamiltoniana una perturbazione della forma

$$V(x) = \lambda\,\hbar\omega\,(a^3 + a^{\dagger\,3}) \ ,$$

dove λ è una costante adimensionale.

c) Calcolare per lo stato fondamentale la correzione all'autovalore dell'energia al secondo ordine in teoria delle perturbazioni e la correzione all'autostato al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin $s_1 = 3/2$ e $s_2 = 1/2$ sono descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{2\hbar} S^2 \ ,$$

dove $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ è lo spin totale delle due particelle, $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$ gli spin di singola particella ed ω una frequenza costante.

All'istante iniziale $t = 0$ si misurano le componenti z dello spin delle due particelle e si ottiene come risultato $S_{1z} = +\hbar/2$ e $S_{2z} = -\hbar/2$.

a) Determinare lo stato delle due particelle al tempo $t > 0$ e i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura dell'energia.

b) Determinare in funzione del tempo i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura degli spin S_{1z} e S_{2z} delle due particelle e dello spin S_{2x} della seconda particella.

Ad un istante di tempo $t > 0$ si effettua una misura di S_{2x} ottenendo come risultato $+\hbar/2$.

c) Determinare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di S_z.

d) *Facoltativo*: determinare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di S^2.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
15 Febbraio 2017

ESERCIZIO N° 1

Una particella priva di spin è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta ad un potenziale anarmonico. L'Hamiltoniana che descrive la particella ha la forma:

$$H = H_0 + V \,,$$

dove H_0 e V si esprimono in termini degli usuali operatori di creazione e distruzione come:

$$H_0 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + a^{\dagger\,2} a^2\right) \qquad \text{e} \qquad V = \lambda\,\hbar\omega\left(a^{\dagger\,2} a + a^\dagger a^2\right) \,.$$

La costante λ è reale e verifica $\lambda \ll 1$.

a) Mostrare che H_0 commuta con l'Hamiltoniana $H_{osc} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + 1/2\right)$ dell'oscillatore armonico, da cui segue anche che gli autostati di H_0 sono gli stessi autostati $|n\rangle$ dell'oscillatore. Determinare quindi gli autovalori di H_0.

b) Trattando l'operatore V come una perturbazione, calcolare gli autovalori di H al secondo ordine della teoria delle perturbazioni e gli autostati di H al primo ordine.

Al tempo $t = 0$ la particella si trova nell'autostato $|1\rangle$ di H_0.

c) Utilizzando per gli autostati e gli autovalori di H i risultati ottenuti al punto b) al primo ordine della teoria delle perturbazioni, determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ e calcolare la probabilità in funzione del tempo di trovare la particella nell'autostato $|2\rangle$ di H_0.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin nullo e momento angolare orbitale $\ell = 1$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \alpha\left(L_x^2 + 3\,L_y^2 - L_z^2\right) \,,$$

dove L_x, L_y, L_z sono le componenti del momento angolare orbitale ed α è una costante reale.

a) Determinare autovalori ed autostati dell'Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di L_z con autovalore $+\hbar$.

b) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$ e calcolare in funzione del tempo il valore medio di L_x, L_y ed L_z.

c) Verificare che risulta soddisfatta a tutti i tempi la relazione di indeterminazione per L_y ed L_z.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
26 Giugno 2017

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\xi) = N\left(\xi^2 - \xi\right)\exp\left(-\xi^2/2\right) \,,$$

dove $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\,x$ ed N è una costante di normalizzazione.

a) Determinare la costante di normalizzazione N, il valore medio dell'energia ed il valore medio della parità.

b) Calcolare, all'istante iniziale, la probabilità di trovare l'oscillatore con $x > 0$.

c) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t > 0$ e calcolare per tale stato il valore medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\; H_n(\xi)\;\exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

Si ricorda inoltre il risultato generale per gli integrali di tipo gaussiano

$$\int_0^\infty d\xi\,\xi^\alpha\,e^{-\xi^2} = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

dove $\Gamma(s)$ *è la funzione Gamma di Eulero che soddisfa*

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,, \quad \Gamma(1) = 1\,, \quad \Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)\,.$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1/2 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{a}{\hbar}\,J^2 \,,$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è il momento angolare totale della particella ed a è una costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato simultaneo di L^2, L_z ed S_z corrispondente agli autovalori $6\,\hbar^2$, 0 e $+\hbar/2$ rispettivamente.

a) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di L_z ed S_z ed i valori medi $\langle L_z\rangle_t$ ed $\langle S_z\rangle_t$.

c) Determinare l'operatore dL_z/dt, calcolarne il valore medio al tempo t e verificare che risulta soddisfatta la relazione

$$\langle\frac{dL_z}{dt}\rangle_t = \frac{d}{dt}\langle L_z\rangle_t \,.$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

17 Luglio 2017

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si considerino due osservabili A e B per il sistema rappresentate dalle matrici

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Verificare che le due osservabili sono compatibili.

All'istante iniziale $t = 0$ si esegue una misura di A e B e si ottengono come risultati i valori $-a$ e $+b$ rispettivamente.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo $t = 0$.

c) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità.

d) Al tempo $t > 0$ si esegue una nuova misura delle osservabili A e B. Determinare i possibili risultati della coppia di misure e le rispettive probabilità.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di massa infinita e spin 1/2 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = gB\,(4\,S_x + 3\,S_z)$$

dove $\vec{S} = (S_x,\, S_y,\, S_z)$ è l'operatore di spin, B il campo magnetico e g una costante.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato di S_z con autovalore $+\hbar/2$.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella, le rispettive probabilità e il valore medio dell'energia.

b) Determinare lo stato evoluto della particella al tempo $t > 0$ e il valore medio di S_z in funzione del tempo.

c) Determinare l'operatore dS_z/dt, calcolarne il valore medio al tempo t e verificare che risulta soddisfatta la relazione

$$\langle \frac{dS_z}{dt} \rangle_t = \frac{d}{dt} \langle S_z \rangle_t \ .$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

14 Settembre 2017

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno stato tale che:

1) una misura dell'energia fornisce valori compresi tra $(11/2)\,\hbar\omega$ e $(15/2)\,\hbar\omega$;
2) è autostato della parità con autovalore -1;
3) il valore medio dell'energia è $(37/6)\,\hbar\omega$;
4) il valore medio di x^2 è $(2\hbar/(m\,\omega))\,\left(37/12 + \sqrt{7/3}\right)$.

a) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo i valori medi dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

c) Calcolare il prodotto delle indeterminazioni su posizione e impulso, $\Delta x \cdot \Delta p$, e verificare che il risultato è consistente, a qualunque tempo, con la relazione di indeterminazione.

ESERCIZIO N° 2

Una particella priva di spin è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\,L_x \ ,$$

dove $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ è il momento angolare orbitale ed a una costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di L^2 ed L_y corrispondente ad $\ell = 1$ ed $m_y = 1$.

a) Determinare la funzione d'onda della particella, $\psi_0(\vartheta, \varphi)$, al tempo $t = 0$.

b) Calcolare la probabilità che, a seguito di una misura di posizione al tempo t = 0, la particella venga trovata con un valore dell'angolo ϑ compreso tra 0 e $\pi/2$.

c) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, i possibili risultati e le corrispondenti probabilità di una misura di L_z.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\vartheta \ .$$

PROVA DI ESONERO DI MECCANICA QUANTISTICA

7 Dicembre 2017

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova in uno state tale che: i) una misura dell'energia fornisce solo valori $E < 2\,\hbar\omega$; ii) il valore medio dell'energia cinetica è $\langle T \rangle = \dfrac{3}{8}\,\hbar\omega$; il valore medio dell'impulso è $\langle p \rangle = \sqrt{\dfrac{3}{8}\,m\hbar\omega}$.

a) Determinare lo stato dell'oscillatore.

b) Calcolare la probabilità che una misura della posizione fornisca un valore $x > 0$.

Si aggiunga quindi all'Hamiltoniana dell'oscillatore H_0 una perturbazione della forma

$$V(x) = \lambda\, m\, \omega^2\, x\, (x - x_0) \ ,$$

con λ e x_0 costanti.

c) Calcolare la correzione al primo ordine della teoria delle perturbazioni al generico autovalore E_n dell'energia e all'autostato corrispondente al livello fondamentale.

d) <u>*Facoltativo*</u>: determinare le espressioni esatte dei livelli di energia e della funzione d'onda dello stato fondamentale dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$ e confrontare i risultati con quelli ottenuti al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\ H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin $s_1 = 1$ e $s_2 = 1/2$ sono descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \ ,$$

dove $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$ sono gli spin di singola particella ed ω una frequenza costante.

All'istante iniziale $t = 0$ si misurano le componenti z dello spin delle due particelle e si ottiene come risultato $S_{1z} = 0$ e $S_{2z} = +\hbar/2$.

a) Determinare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura dell'energia.

b) Determinare lo stato delle due particelle al tempo $t > 0$ e, in funzione del tempo, i valori medi di S_{1z}, S_{2z} ed S_{2x}.

Ad un istante di tempo $t^* > 0$ si effettua una misura di S_{2x} ottenendo come risultato $+\hbar/2$.

c) Calcolare la probabilità che una misura della componente z dello spin totale fornisca il valore $S_z = +3/2\,\hbar$.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

29 Gennaio 2018

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto, nella base degli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, dall'Hamiltoniana

$$H_0 = E \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove E è una costante avente le dimensioni di un'energia.

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|1\rangle$.

a) Determinare lo stato evoluto al tempo $t > 0$. Calcolare quindi, in funzione del tempo, la probabilità che il sistema venga trovato nello stato $|3\rangle$.

Si aggiunga poi all'Hamiltoniana H_0 una perturbazione rappresentata da

$$V = i\,\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\varepsilon/E \ll 1$.

b) Calcolare le correzioni agli autovalori dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$ fino al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

c) Determinare gli autovalori esatti di H e confrontare il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\,(S_x\,S_z + S_z\,S_x) \ ,$$

dove a è una costante. All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di S_z corrispondente all'autovalore $s_z = 1$.

a) Determinare lo stato della particella evoluto al tempo $t > 0$.

b) Calcolare, in funzione del tempo, i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di S_z e il valore dell'indeterminazione ΔS_z.

c) Calcolare, in funzione del tempo, l'indeterminazione ΔS_x.

d) <u>*Facoltativo*</u>: verificare che risulta soddisfatta ad ogni istante di tempo la relazione di indeterminazione generalizzata

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_z \geq \frac{1}{2}\,|\langle [S_x\,,\,S_z] \rangle| \ .$$

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

19 Febbraio 2018

ESERCIZIO N$^{\circ}$ 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita definita da

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } |x| \leq a \\ \infty\,, & \text{per } |x| > a\,. \end{cases}$$

La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\,(x^2 - B)\,, \qquad \text{per } |x| \leq a$$

e $\psi(x) = 0$ per $|x| > a$, dove A e B sono due costanti.

a) Determinare le costanti A e B e i valori medi dell'energia cinetica T, dell'energia potenziale V e dell'energia totale $E = T + V$ della particella.

b) Calcolare le indeterminazioni Δx e Δp e verificare che risulta soddisfatta la relazione di indeterminazione $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$.

Si assuma di sottoporre la particella alla perturbazione

$$\overline{V}(x) = \begin{cases} \varepsilon\,, & \text{per } 0 \leq x \leq a \\ 0\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

c) Calcolare la correzione al primo ordine in teoria delle perturbazioni all'energia dello stato fondamentale.

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale considerata sono:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\,, \qquad \text{con} \quad k_n = \frac{n\pi}{2a}\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e:

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\,\cos(k_n x)\,, & \text{per } n \text{ dispari} \\ \psi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\,\text{sen}\,(k_n x)\,, & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

ESERCIZIO N$^{\circ}$ 2

Una particella di spin $s = 1/2$ e momento angolare orbitale $\ell = 1$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\,\left(J^2 + \hbar\,L_z\right)\,,$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è l'operatore di momento angolare totale ed a una costante.

a) Determinare la rappresentazione matriciale dell'Hamiltoniana nella base degli stati

$$|1\uparrow\rangle\,,\; |1\downarrow\rangle\,,\; |0\uparrow\rangle\,,\; |0\downarrow\rangle\,,\; |-1\uparrow\rangle\,,\; |-1\downarrow\rangle\,,$$

autostati simultanei di L^2, S^2, L_z ed S_z, dove si è indicato ad esempio con $|1\uparrow\rangle$ lo stato corrispondente ad $m = 1$ ed $s_z = 1/2$ (e per semplicità di notazione si è omesso di indicare esplicitamente nei vettori di stato i numeri quantici $\ell = 1$ ed $s = 1/2$, il cui valore è fissato).

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato $|0\uparrow\rangle$.

b) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di L_z e i valori medi di L_z, S_z e J_z.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

18 Giugno 2018

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = N\,\xi^3\,\exp\left(-\xi^2/2\right)\ ,$$

dove $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\,x$ ed N è una costante di normalizzazione.

a) Determinare la costante di normalizzazione N, il valore medio dell'energia ed il valore medio della parità.

b) Calcolare all'istante iniziale la probabilità di trovare l'oscillatore con $x > 0$.

c) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t > 0$, calcolare il valore medio di x, p, x^2, p^2 e verificare che risulta soddisfatta la relazione di indeterminazione.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\;H_n(\xi)\;\exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin 0 sono descritte dall'Hamiltoniana

$$H = a\,\vec{L}_1\cdot\vec{L}_2\ ,$$

dove $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$ sono gli operatori di momento angolare orbitale di singola particella ed a una costante.

All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano nell' autostato di L_1^2, L_2^2, L_{1z}, L_{2z} definito dai numeri quantici $\ell_1 = \ell_2 = 1$ e $m_1 = m_2 = 0$.

a) Calcolare le probabilità che: i) la prima particella si trovi nel semispazio $z > 0$; ii) entrambe le particelle si trovino nel semispazio $z > 0$.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$.

c) Determinare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di m_1 ed m_2 al tempo t.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\quad,\quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,e^{\pm i\varphi}\quad,\quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\vartheta\ .$$

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

16 Luglio 2018

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = V_0(x) + \frac{\hbar^2\,\lambda}{2m}\,\delta(x-a)$$

con

$$V_0(x) = \begin{cases} \infty\ , & \text{per}\ \ x < 0 \\ -\upsilon\ , & \text{per}\ \ 0 < x < a \\ 0\ , & \text{per}\ \ x > a\ , \end{cases}$$

e υ e λ costanti positive.

a) Determinare, a meno di una costante di normalizzazione, le autofunzioni dell'Hamiltoniana corrispondenti ad autovalori dell'energia $E < 0$ e l'equazione che determina implicitamente tali autovalori.

b) Per questi stati con $E < 0$ calcolare la probabilità relativa di trovare la particella nelle regioni $0 < x < a$ ed $x > a$, ossia il rapporto delle probabilità

$$\frac{P(0 < x < a)}{P(x > a)}\ .$$

c) Determinare, a meno di una costante di normalizzazione, l'autofunzione dell'Hamiltoniana corrispondente ad energia $E = 0$ e l'equazione che determina implicitamente i valori della costante υ per cui questo stato con energia nulla esiste. Discutere quindi graficamente le soluzioni di questa equazione.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin nullo è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\left(L_x^2 - L_y^2\right)\ ,$$

dove $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ è il momento angolare orbitale ed a una costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di L^2 con autovalore $2\,\hbar^2$ e di L_x con autovalore $+\hbar$.

a) Si scriva la funzione d'onda $\psi_0(\vartheta,\varphi)$ che descrive la particella al tempo $t = 0$.

b) Calcolare la probabilità che facendo una misura di posizione al tempo t = 0 la particella venga trovata nella regione con $z > 0$.

c) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura di L_z e le rispettive probabilità.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\quad,\quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,e^{\pm i\varphi}\quad,\quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\vartheta\ .$$

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

14 Settembre 2018

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \varepsilon \begin{pmatrix} 8 & 4\,i & 0 \\ -4\,i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove ε è una costante avente le dimensioni di un'energia.

a) Determinare autovalori e autostati di H_0.

Si aggiunga all'Hamiltoniana H_0 una perturbazione

$$V = \lambda\,\varepsilon \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dove λ è una costante adimensionale e $\lambda \ll 1$.

b) Calcolare le correzioni agli autovalori dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$ al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

c) Determinare gli autovalori esatti di H e confrontare il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni al primo ordine dello sviluppo in λ.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin 1/2 sono descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \omega\,(S_{1x} + S_{2x})\,,$$

dove S_{1x} e S_{2x} sono le componenti x degli spin delle due particelle ed ω una frequenza costante.

All'istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano nello stato di tripletto corrispondente a $S_z = +\hbar$, dove $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ è lo spin totale delle due particelle.

a) Determinare autostati e autovalori dell'Hamiltoniana e il grado di degenerazione dei livelli.

b) Determinare lo stato delle due particelle al tempo $t > 0$ e, in funzione del tempo, i possibili risultati e le corrispondenti probabilità di una misura delle componenti S_x e S_z dello spin totale.

Ad un istante di tempo $T > 0$ si effettua una misura di S_{1z} e si ottiene come risultato $+\hbar/2$.

c) Calcolare i possibili risultati e le corrispondenti probabilità di una misura effettuata al tempo T di S_{2z} e di S^2.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

21 Novembre 2018

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita nell'intervallo $0 \leq x \leq a$.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\,, \qquad \text{per } 0 \leq x \leq a$$

e $\psi(x) = 0$ fuori.

a) Determinare la funzione d'onda della particella al tempo $t > 0$.

b) Calcolare i valori medi dell'energia e dell'energia al quadrato della particella.

c) Calcolare, in funzione del tempo, la probabilità che una misura di posizione della particella fornisca un risultato compreso nell'intervallo $0 \leq x \leq a/2$.

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale considerata sono

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2\,m\,a^2} \qquad \text{e} \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad \text{per } 0 \leq x \leq a$$

e $\psi_n(x) = 0$ *fuori, con* $n = 1, 2, 3, \ldots$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1/2 e massa infinita è immersa in un campo magnetico e descritta dall'Hamiltoniana

$$H = -\frac{gB}{2}\left(S_z + \sqrt{3}\,S_y\right)\,,$$

con S_x, S_y, S_z le componenti dello spin, B il modulo del campo magnetico e g una costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato di S_z con autovalore $-\hbar/2$.

a) Determinare lo stato evoluto della particella al tempo $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo il valore medio di S_z.

c) Determinare l'operatore dS_z/dt, calcolarne il valore medio al tempo t e verificare che risulta soddisfatta la relazione

$$\langle \frac{dS_z}{dt} \rangle_t = \frac{d}{dt}\langle S_z \rangle_t\,.$$

PROVA DI ESONERO DI MECCANICA QUANTISTICA

13 Dicembre 2018

ESERCIZIO N^o 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2ma}\lambda\,\delta(x-a) - V_0\,\theta(x)\,\theta(a-x)$$

con λ, a, e V_0 costanti positive.

a) Determinare, a meno di una costante di normalizzazione, l'autofunzione dell' Hamiltoniano corrispondente ad energia $E=0$ e l'equazione che determina implicitamente i valori della costante V_0 per cui questo stato esiste. Discutere quindi graficamente le soluzioni di questa equazione.

b) Assumendo che la particella si trovi nello stato con $E=0$, calcolare la probabilità relativa di osservare la particella nelle regioni $a \le x \le 2a$ e $0 \le x \le a$, ossia il rapporto delle probabilità

$$\frac{P(a \le x \le 2a)}{P(0 \le x \le a)}\,.$$

c) Assumendo invece $\lambda < 0$, mostrare che può esistere uno stato con energia $E = -V_0$ e derivare l'equazione che determina il valore di V_0 per cui questo stato esiste.

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di spin $s=1$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = g\,B\,S_z,$$

dove $\vec{S}$ è l'operatore di spin, B un campo magnetico e g una costante.

All'istante iniziale $t=0$ la particella si trova in uno stato tale che valgono i seguenti valori medi: $\langle S_z\rangle = 0$, $\langle S_z^2\rangle = \hbar^2$ e $\langle S_x^2\rangle = 0$.

a) Determinare lo stato della particella al tempo $t=0$.

b) Calcolare in questo stato le indeterminazioni sulle tre componenti dello spin, ΔS_x, ΔS_y e ΔS_z. Fornire quindi una spiegazione del risultato ottenuto per ΔS_x.

c) Determinare lo stato della particella al tempo $t>0$ e i possibili risultati, in funzione del tempo, di una misura di S_x e le rispettive probabilità.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

28 Gennaio 2019

ESERCIZIO N^o 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t=0$ in uno state tale che una misura dell'energia fornisce solo valori $E < 3\,\hbar\omega$ e valgono i seguenti valori medi:

$$\langle E\rangle = \frac{9}{10}\,\hbar\omega \quad , \quad \langle P\rangle = 1 \quad , \quad \langle x\,p + p\,x\rangle = -\frac{4\sqrt{2}}{5}\,\hbar\ ,$$

dove E è l'energia, P la parità, x la posizione e p l'impulso dell'oscillatore.

a) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t=0$.

b) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t>0$ e calcolare, in funzione del tempo, i valori medi degli operatori dT/dt e dV/dt, dove T e V sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale dell'oscillatore.

Si aggiunga quindi all'Hamiltoniana dell'oscillatore una perturbazione della forma

$$V(x) = \lambda\,\omega\,(x\,p + p\,x)$$

con λ costante adimensionale.

c) Calcolare la correzione al primo ordine non nullo della teoria delle perturbazioni al generico autovalore E_n dell'energia e all'autostato corrispondente al livello fondamentale.

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di spin $s=1$ e momento angolare orbitale $\ell = 1$ è descritta dall' Hamiltoniana

$$H = a\left(L^2 + S^2 + 2\,L_z\,S_z\right)\ ,$$

dove a è una costante reale.

All'istante iniziale $t=0$ la particella si trova in un autostato di J^2 ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$) con autovalore $6\,\hbar^2$ e di J_z con autovalore 0.

a) Determinare il valore medio dell'energia.

b) Determinare lo stato della particella al tempo $t>0$ e calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di L_z ed S_z.

c) Calcolare in funzione del tempo il valore medio di J^2.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

17 Giugno 2019

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\xi + \xi^2\right) \exp\left(-\xi^2/2\right) \ ,$$

con $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\, x$.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità. Determinare il valore medio della parità.

b) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo generico $t > 0$. Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di x e p.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di x^2 e p^2. Verificare che risulta soddisfatta a qualunque istante di tempo la relazione di indeterminazione $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\ H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2

Si consideri l'operatore di momento angolare orbitale L_z e le sue autofunzioni

$$\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im\varphi} \ ,$$

con $m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

a) Utilizzando per l'operatore L_z la sua espressione nella rappresentazione delle coordinate, calcolare i seguenti commutatori:

$$[L_z, \varphi]\ ,\ [L_z, \mathrm{sen}\,\varphi]\ ,\ [L_z, \cos\varphi]\ ,\ [L_z, e^{i\varphi}]\ ,\ [L_z, e^{-i\varphi}]\ .$$

b) Nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_m(\varphi) + \psi_{-m}(\varphi)\right] \qquad (m \neq 0)$$

determinare il valore delle indeterminazioni $\langle(\Delta L_z)^2\rangle$ e $\langle(\Delta \mathrm{sen}\,\varphi)^2\rangle$ e verificare che risulta soddisfatta la relazione di indeterminazione generalizzata per gli operatori L_z e $\mathrm{sen}\,\varphi$.

c) Nella base definita dalle autofunzioni $\psi_m(\varphi)$, determinare le matrici rappresentative degli operatori L_z, $\mathrm{sen}\,\varphi$ e $\cos\varphi$, limitandosi a considerare per semplicità il solo sottospazio corrispondente a $m = 1,\ 0,\ -1$. Utilizzando questa rappresentazione matriciale, verificare il risultato ottenuto al punto a) per il commutatore $[L_z, \mathrm{sen}\,\varphi]$.

Per lo svolgimento degli integrali può essere utile esprimere le funzioni trigonometriche in termini di esponenziali e considerare che, per n intero, vale:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi} = \delta_{n,0}\ .$$

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
22 Luglio 2019

ESERCIZIO N° 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita definita da

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } |x| \le L \\ \infty\,, & \text{per } |x| > L\,. \end{cases}$$

La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\,, \qquad \text{per } |x| \le L$$

e $\psi(x) = 0$ per $|x| > L$, dove A è una costante di normalizzazione.

a) Determinare la costante A e le probabilità che, a seguito di una misura dell'energia, la particella venga trovata nello stato fondamentale o nello stato corrispondente al primo livello eccitato.

b) Calcolare il valore medio dell'energia della particella.

Si assuma di sottoporre la particella alla perturbazione

$$U(x) = \varepsilon\,\frac{|x|}{L}\,.$$

c) Calcolare la correzione al primo ordine in teoria delle perturbazioni ai livelli di energia dell'Hamiltoniana imperturbata.

Per la risoluzione degli integrali possono risultare utili le seguenti identità trigonometriche:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right] \quad , \quad \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\,.$$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin nullo è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = -\mu\,B L_z\,,$$

dove B è il modulo di un campo magnetico costante, L_z la componente z del momento angolare orbitale e μ il modulo del momento magnetico della particella.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\,.$$

a) Calcolare la probabilità di trovare la particella in un punto dello spazio con $0 \le \theta \le \pi/2$.

b) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$ e i possibili risultati e le rispettive probabilità, in funzione del tempo, di una misura di L_z ed L_y.

c) Calcolare in funzione del tempo i valori medi di L_y e L_y^2.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\,.$$

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
16 Settembre 2019

ESERCIZIO N° 1
Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

dove ε è una costante avente le dimensioni di un'energia.

a) Determinare autovalori e autostati di H_0.

Si aggiunga all'Hamiltoniana H_0 una perturbazione

$$V = \lambda\,\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove λ è una costante adimensionale e $\lambda \ll 1$.

b) Calcolare le correzioni agli autovalori dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$ al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

c) Calcolare la correzione al primo ordine della teoria delle perturbazioni all'autostato di H corrispondente al livello di energia fondamentale.

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 0 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\left(L_x^2 + L_y^2\right)\,,$$

dove a è una costante reale. Al tempo $t = 0$, la particella si trova nello stato (corrispondente a $\ell \le 2$) descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\theta,\varphi) = N\operatorname{sen}^2\theta\,,$$

con N costante di normalizzazione.

a) Calcolare la costante di normalizzazione N e la probabilità di trovare la particella nella regione con $0 \le \theta \le \pi/2$ e $0 \le \varphi \le \pi/2$.

b) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$ e i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di L^2, L_z e dell'energia.

c) Calcolare i valori medi di L_x^2 e L_y^2 e le indeterminazioni ΔL_x e ΔL_y.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti a $\ell = 0, 1, 2$ sono:

$$Y_{0,0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\operatorname{sen}^2\theta\, e^{\pm 2i\varphi} \quad , \quad Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1)\,.$$

PROVA DI ESONERO DI MECCANICA QUANTISTICA

15 Novembre 2019

ESERCIZIO N° 1

Una fascio di particelle di massa m si propaga nella direzione dell'asse x, proveniente da $x = -\infty$, con energia $E = V_0 > 0$. Il fascio incide sul potenziale $V(x)$ definito da

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{per} \;\; x \leq 0 \, , \\ V_0 & , \quad \text{per} \;\; 0 < x < a \, , \\ 2V_0 & , \quad \text{per} \;\; x \geq a \, . \end{cases}$$

a) Determinare la funzione d'onda delle particelle a meno di una costante di normalizzazione.

b) Determinare la densità di corrente del fascio, $j(x)$, nelle tre regioni: i) $x < 0$; ii) $0 < x < a$; iii) $x > a$. Verificare quindi che il risultato ottenuto è consistente con l'equazione di continuità.

c) Calcolare la probabilità relativa che, a seguito di una misura di posizione, una particella del fascio venga trovata nelle regioni $0 < x < a$ e $a < x < 2a$, ossia il rapporto delle probabilità

$$\frac{P(0 < x < a)}{P(a < x < 2a)} \, .$$

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin 1 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\left(S^2 - 2\, S_y^2\right)$$

con a costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato di S_z corrispondente all'autovalore $-\hbar$.

a) Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana.

b) Determinare lo stato della particella evoluto al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura di S_z, le rispettive probabilità ed il valore medio di S_z.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di S_y.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

27 Gennaio 2020

ESERCIZIO N° 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno stato tale che:

1) una misura dell'energia fornisce solo i valori $(9/2)\,\hbar\omega$ e $(11/2)\,\hbar\omega$;
2) il valore medio della parità vale -1/3;
3) il valore medio di x è $-2\sqrt{5}/3\,\sqrt{\hbar/(m\omega)}$.

a) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo i valori medi di x e p.

c) Calcolare il prodotto delle indeterminazioni su posizione e impulso, $\Delta x \cdot \Delta p$, e verificare che il risultato è consistente, a qualunque tempo, con la relazione di indeterminazione.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle *identiche* di spin 1/2 sono vincolate a muoversi in una dimensione soggette ad un potenziale armonico centrato nell'origine e ad un'interazione reciproca dipendente dallo spin. L'Hamiltoniana che descrive le particelle è:

$$H = H_{osc}^{(1)} + H_{osc}^{(2)} + H_s^{(12)} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_2^2 + \frac{3}{2}\frac{\omega}{\hbar}\left(S_{1z} - S_{2z}\right)^2 \, .$$

a) Determinare gli autostati e gli autovalori dell'Hamiltoniana corrispondenti al livello di energia fondamentale e al primo livello eccitato e il relativo grado di degenerazione dei livelli.

All'istante iniziale $t = 0$, le particelle si trovano in uno stato tale che:

1) una misura dell'energia fornisce con certezza un valore $E < 3\,\hbar\omega$;
2) una misura dello spin $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ fornisce i valori $S_z = 0$ e $S_z = +\hbar$ con probabilità pari rispettivamente a 1/3 e 2/3;
3) si misura il seguente valore medio: $\langle (x_1 - x_2)\,(S_{1x} - S_{2x}) \rangle = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\hbar^3}{m\omega}\right)^{1/2}$.

b) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$ e il valore medio dell'energia.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

17 Febbraio 2020

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre stati è descritto dall'Hamiltoniana $H = H_0 + V$, dove

$$H_0 = \varepsilon \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ ,$$

ed ε e δ sono costanti aventi le dimensioni dell'energia tali che $\delta \ll \varepsilon$.

a) Calcolare le correzioni agli autovalori dell'Hamiltoniana H al secondo ordine della teoria delle perturbazioni in V.

b) Calcolare le correzioni agli autostati dell'Hamiltoniana H al primo ordine della teoria delle perturbazioni in V.

Indichiamo con $E_1^{(0)}$, $E_2^{(0)}$, $E_3^{(0)}$ gli autovalori di H_0 ordinati secondo $E_1^{(0)} < E_2^{(0)} < E_3^{(0)}$, e con $|1^{(0)}\rangle$, $|2^{(0)}\rangle$, $|3^{(0)}\rangle$ i corrispondenti autostati di H_0. All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|3^{(0)}\rangle$.

c) Utilizzando i risultati ottenuti con la teoria delle perturbazioni, calcolare la probabilità che al tempo $t > 0$ il sistema venga trovato nello stato $|2^{(0)}\rangle$.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin $s = 1/2$ e momento angolare orbitale $\ell = 1$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\left(J^2 - L^2 - S^2 + 2\,\hbar\, L_z\right) \ ,$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è l'operatore del momento angolare totale, $\vec{L}$ ed $\vec{S}$ gli operatori del momento angolare orbitale e di spin ed a una costante data.

a) Determinare la rappresentazione matriciale dell'Hamiltoniana H nella base degli stati

$$|1\uparrow\rangle\,,\ |1\downarrow\rangle\,,\ |0\uparrow\rangle\,,\ |0\downarrow\rangle\,,\ |-1\uparrow\rangle\,,\ |-1\downarrow\rangle\ ,$$

autostati simultanei di L^2, L_z, S^2, S_z. (Si è indicato ad esempio con $|1\uparrow\rangle$ l'autostato corrispondente ad $m = 1$, $s_z = 1/2$).

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nello stato $|0\uparrow\rangle$ ($m = 0$, $s_z = 1/2$).

b) Determinare lo stato della particella evoluto al tempo $t > 0$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi di L_z ed S_z.

PROVA DI ESONERO DI MECCANICA QUANTISTICA

18 Novembre 2020

ESERCIZIO N° 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita nell'intervallo $0 \le x \le a$. La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = N \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\left[1 + i\sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right] \ , \qquad \text{per } 0 \le x \le a$$

e $\psi(x) = 0$ fuori, dove N è una costante di normalizzazione.

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella, le rispettive probabilità e il valore medio dell'energia.

b) Calcolare la probabilità $P(\lambda)$ che una misura di posizione della particella fornisca un risultato compreso nell'intervallo $0 \le x \le \lambda\, a$, dove λ è un parametro compreso tra 0 ed 1. Valutare esplicitamente tale probabilità per $\lambda = 1/4,\ 1/2,\ 1$.

c) Calcolare i valori medi della posizione e dell'impulso della particella.

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale considerata sono

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2\,m\,a^2} \qquad \text{e} \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad \text{per } 0 \le x \le a$$

e $\psi_n(x) = 0$ *fuori, con* $n = 1, 2, 3, \ldots$

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
25 Gennaio 2021

ESERCIZIO N^o 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\xi) = N\,\left(1 + \sqrt{2} - 2\,\xi^2\right)\,\exp\left(-\xi^2/2\right)\ ,$$

dove $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\,x$ ed N è una costante di normalizzazione.

a) Determinare la costante di normalizzazione N ed il valore medio dell'energia.

b) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t > 0$ e calcolare per tale stato il valore medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

c) Calcolare il prodotto delle indeterminazioni su posizione e impulso, $\Delta x \cdot \Delta p$, e verificare che, a qualunque tempo, è soddisfatta la relazione di indeterminazione.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\; H_n(\xi)\;\; \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N$^{\rm O}$. 2

Una particella di spin $3/2$ e massa infinita è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = g\,\vec{B}\cdot\vec{S}\,,$$

dove $\vec{B}$ è un campo magnetico costante diretto lungo l'asse z e g il momento magnetico della particlella.

All'istante di tempo iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di S_y con autovalore $+\hbar/2$.

a) Determinare le matrici rappresentative degli operatori di spin S_x, S_y, S_z nella base degli autostati di S^2 e S_z.

b) Determinare lo stato della particella al tempo generico $t > 0$, i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità.

c) Calcolare in funzione del tempo il valore medio dell'operatore a scala S_+ ed i valori medi di S_x ed S_y.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
15 Febbraio 2021

ESERCIZIO N^o 1

Un sistema quantistico a tre stati è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & -i\delta & 0 \\ i\delta & -1 & i\delta \\ 0 & -i\delta & -3 \end{pmatrix}\ ,$$

dove ε e δ sono due costanti con $\delta \ll 1$.

a) Calcolare gli autovalori di H al secondo ordine della teoria delle perturbazioni in δ.

b) Calcolare gli autostati di H al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

c) Determinare gli autovalori esatti di H e confrontare il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni. Verificare, in particolare, che l'autovalore esatto corrispondente al primo livello eccitato coincide con l'autovalore imperturbato.

d) Determinare l'autostato esatto di H corrispondente al primo livello eccitato e confrontare il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N^o 2

Una particella di spin nullo è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\left(L_x^2 - \frac{1}{2}\hbar L_z\right)\,,$$

dove $\vec{L} = (L_x,\, L_y,\, L_z)$ è il momento angolare orbitale ed a una costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di L^2 con autovalore $2\hbar^2$ e di L_z con autovalore $+\hbar$.

a) Determinare autovalori ed autostati dell'Hamiltoniana.

b) Determinare lo stato della particella evoluto al tempo $t > 0$.

c) Determinare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura di L_z, le rispettive probabilità ed il valore medio di L_z.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
21 Giugno 2021

ESERCIZIO N° 1
Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno stato tale che:

i) una misura dell'energia fornisce risultati $E \in (5\,\hbar\omega\,, 7\,\hbar\omega)$;

ii) il valore medio della parità è nullo;

iii) il valore medio della posizione vale $\langle x \rangle = -\sqrt{\dfrac{3\hbar}{m\omega}}$.

a) Determinare lo stato dell'oscillatore al tempo $t = 0$ e al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare in funzione del tempo i valori medi degli operatori x, p, x^2 e p^2.

c) Verificare che a qualunque tempo risulta soddisfatta la relazione di indeterminazione $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$.

ESERCIZIO N° 2
Due particelle con momento angolare $j_1 = 3/2$ e $j_2 = 1$ si trovano, all'istante iniziale $t = 0$, nello stato con $j = 3/2$ e $m = 1/2$, dove j ed m sono i numeri quantici associati agli operatori del momento angolare totale J^2 e J_z, con $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Le particelle sono descritte dall'Hamiltoniana
$$H = \omega\,(2\,J_{1z} + J_{2z})\,.$$

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia del sistema e le rispettive probabilità.

b) Determinare lo stato delle due particelle al tempo $t > 0$ e calcolare il valore medio del prodotto $J_{1z}\,J_{2z}$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio del prodotto $J_{1x}\,J_{2x}$.

Indicazione: nello svolgimento dell'esercizio si riporti esplicitamente il calcolo dei coefficienti di Clebsch-Gordan rilevanti, senza fare riferimento alle tavole dedicate.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
19 Luglio 2021

ESERCIZIO N° 1
Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione in una buca di potenziale infinita nell'intervallo $|x| \leq a/2$.

La particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda
$$\psi(x) = A + B\,x + C\,x^2\,, \qquad \text{per } |x| \leq a/2$$
e $\psi(x) = 0$ per $|x| > a/2$, dove A, B e C sono costanti.

a) Imponendo le opportune condizioni al bordo sulla funzione d'onda e la condizione di normalizzazione, determinare le costanti A, B e C.

b) Calcolare le indeterminazioni Δx e Δp e verificare che risulta soddisfatta la relazione di indeterminazione $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$.

c) Calcolare il valore medio dell'energia della particella e la probabilità di trovare, a seguito di una misura dell'energia, la particella nello stato fondamentale. Confrontando il risultato ottenuto per il valore medio dell'energia con l'autovalore dell'energia dello stato fondamentale, sapreste spiegare qualitativamente il risultato ottenuto?

Si ricorda che autovalori ed autofunzioni della buca di potenziale considerata sono:
$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\,, \qquad \text{con} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$
e, per $|x| \leq a/2$,
$$\begin{cases} \psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\,\cos(k_n x)\,, & \text{per } n \text{ dispari} \\ \psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\,\text{sen}\,(k_n x)\,, & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 1 è descritta dall'Hamiltoniana
$$H = a\left(S_x^2 - S_y^2\right)\,,$$
dove S_x ed S_y sono le componenti x ed y dell'operatore di spin ed a è una costante reale.

a) Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato di S_z corrispondente all'autovalore $-\hbar$.

b) Determinare lo stato della particella evoluto al tempo $t > 0$.

c) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi di S_x^2, S_y^2, S_z^2.

d) _Facoltativo_: verificare che risulta soddisfatta ad ogni istante di tempo la relazione di indeterminazione generalizzata per le componenti di spin S_x e S_y

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA

13 Settembre 2021

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a due stati è descritto dall'Hamiltoniana $H = H_0 + V$, dove

$$H_0 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \delta \begin{pmatrix} 10 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \; ,$$

con ε e δ costanti aventi le dimensioni di energia e $\delta \ll \varepsilon$.

a) Calcolare le correzioni agli autovalori dell'Hamiltoniana al 2° ordine in teoria delle perturbazioni.

b) Calcolare le correzioni agli autostati dell'Hamiltoniana al 1° ordine in teoria delle perturbazioni.

c) Determinare gli autovalori esatti di H e confrontare il risultato con quello ottenuto in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

Un particella di spin 0 si trova in uno stato tale che:

1. una misura del quadrato del momento angolare orbitale fornisce solo come possibili risultati $L^2 = 0$ o $L^2 = 2\hbar^2$;
2. una misura della componente z del momento angolare orbitale fornisce con certezza $L_z = 0$;
3. il valore medio del quadrato del momento angolare orbitale è $\langle L^2 \rangle = 3/2\,\hbar^2$;
4. il valore medio di $\cos\vartheta$, dove ϑ è l'angolo polare, vale $\langle \cos\vartheta \rangle = 1/2$.

a) Determinare la funzione d'onda della particella.

b) Calcolare i valori medi di $\mathrm{sen}^2\varphi$ e $\mathrm{sen}^2\vartheta$.

c) Calcolare i valori medi di L_x ed L_x^2 e la probabilità che una misura di L_x fornisca come risultato $L_x = 0$.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\vartheta \; .$$

PROVA DI ESONERO DI MECCANICA QUANTISTICA

11 Novembre 2021

ESERCIZIO N° 1

Una fascio di particelle di massa m si propaga nella direzione dell'asse x, proveniente da $x = -\infty$, con energia $E = V_1$. Il fascio incide sul potenziale a due gradini definito da

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{per} \;\; x < 0 \; , \\ V_1 & , \quad \text{per} \;\; 0 < x < a \; , \\ V_2 & , \quad \text{per} \;\; x > a \; , \end{cases} \qquad \text{con} \;\; \mathrm{V}_2 > \mathrm{V}_1 > 0 \; .$$

a) Determinare la funzione d'onda delle particelle a meno della costante di normalizzazione del flusso incidente.

b) Determinare i coefficienti riflessione e trasmissione, R e T, e dare un'interpretazione fisica del risultato ottenuto.

c) Determinare il rapporto

$$\frac{P(0 < x < a)}{P(x > a)}$$

tra le probabilità di trovare, a seguito di una misura della posizione, una particella rispettivamente nelle regioni $0 < x < a$ e $x > a$.

ESERCIZIO N° 2

Una particella di spin nullo e momento angolare $\ell = 1$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = -\mu\, B\, L_z \; ,$$

dove B è il modulo di un campo magnetico costante, L_z la componente z del momento angolare orbitale e μ il modulo del momento magnetico della particella.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{1}{8\pi}}\left(\sqrt{2}\,\cos\theta - 2\,i\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) \; .$$

a) Calcolare la probabilità di trovare la particella nella regione di spazio con $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

b) Determinare lo stato della particella al tempo $t > 0$ e i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di L_z.

c) Calcolare la probabilità, in funzione del tempo, che una misura di L_x fornisca come risultato $L_x = +\hbar$.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ corrispondenti all'autovalore $\ell = 1$ sono:

$$Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\vartheta \; .$$

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
24 Gennaio 2022

ESERCIZIO N° 1
Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\xi) = N \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(2\,\xi^4 - 3\,\xi^2\right) \exp\left(-\xi^2/2\right) \ ,$$

dove $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2}\, x$ ed N è una costante di normalizzazione.

a) Determinare la costante di normalizzazione N, i possibili risultati di una misura dell'energia, le rispettive probabilità ed il valore medio dell'energia.

b) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi dell'energia potenziale e dell'energia cinetica dell'oscillatore.

c) Determinare, in funzione del tempo, il prodotto delle dispersioni $\Delta x \cdot \Delta p$ e mostrare che il risultato è consistente, a qualunque tempo, con la relazione di indeterminazione.

Si ricorda che le autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la forma:

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\ H_n(\xi)\ \exp\left(-\xi^2/2\right)$$

dove i primi polinomi di Hermite sono:

$$\begin{array}{lll} H_0(\xi) = 1 & H_1(\xi) = 2\,\xi & H_2(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) = 8\,\xi^3 - 12\,\xi & H_4(\xi) = 16\,\xi^4 - 48\,\xi^2 + 12 & \ldots\ldots \end{array}$$

ESERCIZIO N° 2
Un atomo di idrogeno si trova, al tempo iniziale $t = 0$, nello stato descritto dalla funzione d'onda spaziale

$$\psi_0(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}\, a_0^{3/2}} \left(e^{-\rho} - \frac{1}{2}\, \rho \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi\, e^{-\rho/2}\right)$$

dove $\rho = r/a_0$ ed a_0 è il raggio di Bohr.

a) Determinare la funzione d'onda spaziale dell'atomo al tempo $t > 0$.

b) Calcolare i valori medi dell'energia, del quadrato del momento angolare orbitale L^2 e della sua componente L_z.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio del raggio r e della coordinata x della posizione.

Si ricorda che le funzioni d'onda radiali $R_{n\ell}$ per il campo coulombiano sono date, per i primi due valori di n, da:

$$R_{10}(\rho) = \frac{2}{a_0^{3/2}}\, e^{-\rho}\ , \quad R_{20}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}\, a_0^{3/2}} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) e^{-\rho/2}\ , \quad R_{21}(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{6}\, a_0^{3/2}}\, \rho\, e^{-\rho/2}\ ,$$

dove $\rho = r/a_0$. Si ricorda inoltre che le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}$ corrispondenti agli autovalori $\ell = 0$ ed $\ell = 1$ sono:

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{1\pm1}(\vartheta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\vartheta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \ .$$

Si ricorda infine che, per n intero e non negativo, vale il seguente integrale:

$$\int_0^\infty ds\, s^n\, e^{-s} = n!$$

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
14 Febbraio 2022

ESERCIZIO N° 1
Per un sistema quantistico a due livelli siano

$$H = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le matrici rappresentative rispettivamente dell'Hamiltoniana e di due osservabili A e B.

All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova nello stato in cui: i) i possibili risultati di una misura dell'osservabile A sono equiprobabili; ii) i possibili risultati di una misura dell'osservabile B sono equiprobabili; iii) il valore medio dell'operatore $C = i\,[A, B]$ vale $\langle C \rangle = a\,b$.

a) Determinare lo stato del sistema al tempo $t = 0$.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, le indeterminazioni ΔA e ΔB delle osservabili A e B.

c) <u>*Facoltativo*</u>: verificare che risulta soddisfatta, ad ogni istante di tempo, la relazione di indeterminazione generalizzata per le osservabili A e B.

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin $s = 1/2$ e momento angolare orbitale $\ell = 1$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\, L_+ L_- + L_+ S_- + L_- S_+ \right) ,$$

dove $L_\pm$ e $S_\pm$ sono gli operatori a scala del momento angolare orbitale e di spin ed a è una costante.

a) Determinare la rappresentazione matriciale dell'Hamiltoniana nella base degli autostati simultanei di L^2, L_z, S^2, S_z. A tale scopo, si suggerisce di ordinare gli stati di base nel modo seguente:

$$|1 \uparrow\rangle\,,\ |1 \downarrow\rangle\,,\ |0 \uparrow\rangle\,,\ |0 \downarrow\rangle\,,\ |-1 \uparrow\rangle\,,\ |-1 \downarrow\rangle\ ,$$

dove si è indicato ad esempio con $|1 \uparrow\rangle$ l'autostato corrispondente ad $m = 1$ e $s_z = 1/2$ (i numeri quantici $\ell = 1$ e $s = 1/2$ sono sempre sottintesi).

b) Calcolare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana.

All'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova nello stato $|0 \downarrow\rangle$.

c) Determinare lo stato evoluto al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura di L_z e S_z, le rispettive probabilità ed i valori medi.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
20 Giugno 2022

ESERCIZIO N° 1
Una particella di massa m e carica elettrica q è vincolata a muoversi in una dimensione, lungo l'asse x, soggetta ad un potenziale di tipo armonico centrato nell'origine. La particella è inoltre immersa in un campo elettrico costante $\mathcal{E}$ diretto lungo x. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\,\omega^2 x^2 - q\,\mathcal{E}\,x\ .$$

Si consideri il campo elettrico sufficientemente debole da poter trattare il corrispondente termine nell'Hamiltoniana come una perturbazione.

a) Determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana corrispondenti allo stato fondamentale della particella e al primo livello eccitato al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

b) Determinare gli autostati dell'Hamiltoniana corrispondenti allo stato fondamentale e al primo livello eccitato al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Utilizzando quindi questi risultati, calcolare il valore medio della posizione x della particella nello stato fondamentale e nel primo livello eccitato.

c) Determinare l'espressione dell'operatore dp/dt e calcolarne il valore medio nello stato fondamentale. Sapreste dare una spiegazione del risultato ottenuto per questo valore medio?

d) <u>*Facoltativo*</u>: osservando che l'Hamiltoniana H può essere riscritta nella forma di Hamiltoniana di un oscillatore armonico con centro diverso dall'origine, fornire una spiegazione dei risultati ottenuti con la teoria delle perturbazioni per gli autovalori dell'energia e i valori medi della posizione.

ESERCIZIO N° 2
Una particella di spin 1 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = a\left(4S_x^2 - S_z^2\right)$$

con a costante reale.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nell'autostato di S_x corrispondente all'autovalore $+\hbar$.

a) Determinare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana.

b) Determinare lo stato evoluto al tempo $t > 0$ e calcolare, in funzione del tempo, i possibili risultati di una misura di S_z e le rispettive probabilità.

c) Calcolare, in funzione del tempo, il valore medio di S_x.

PROVA DI ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA
18 Luglio 2022

ESERCIZIO N° 1

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} ,$$

dove ε è una costante avente dimensioni di energia.

Siano A e B due osservabili per il sistema rappresentate dalle matrici

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = b \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

con a e b costanti reali.

All'istante iniziale $t = 0$, il sistema si trova in un autostato simultaneo di A e B con autovalori rispettivamente $+a$ e $-b$.

a) Verificare che A e B sono osservabili compatibili.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo $t = 0$.

c) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ e i valori medi dell'energia e delle osservabili A e B in funzione del tempo.

d) Determinare la rappresentazione matriciale dell'operatore dA/dt e calcolarne il valore medio in funzione del tempo.

ESERCIZIO N° 2

Due particelle di spin 1 si trovano nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(|+1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|+1\rangle - |0\rangle|0\rangle \Big) ,$$

dove $|+1\rangle$, $|0\rangle$ e $|-1\rangle$ indicano gli autostati di singola particella di S_{1z} e S_{2z} corrispondenti agli autovalori rispettivamente $+\hbar$, 0 e $-\hbar$.

a) Verificare che lo stato $|\psi\rangle$ è autostato simultaneo degli operatori S^2 e S_z, dove $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ è l'operatore di spin totale delle due particelle, e determinare i corrispondenti autovalori.

b) Esprimere lo stato $|\psi\rangle$ come combinazione lineare di autostati di S_{1x} ed S_{2x} e fornire una spiegazione del risultato ottenuto. Determinare quindi i possibili risultati e le corrispondenti probabilità di una misura di S_{1x}, S_{2x} e S_x.

c) Calcolare la probabilità che una misura dello spin S_{1z} della prima particella e dello spin $S_{2\hat{n}}$ della seconda particella, dove $\hat{n}$ è il versore $\hat{n} = (\operatorname{sen}\theta, 0, \cos\theta)$, fornisca come risultato $S_{1z} = +\hbar$ e $S_{2\hat{n}} = -\hbar$.