ESERCIZI SVOLTI DI MECCANICA QUANTISTICA

ELENCO DEGLI ESERCIZI

1) SISTEMA A DUE LIVELLI (11/01/99)
2) BUCA DI POTENZIALE INFINITA (17/01/97)
3) BUCA DI POTENZIALE A DELTA E GRADINO (26/01/01)
4) BARRIERA DI POTENZIALE A DELTA E COEFFICIENTI R, T (07/06/00)
5) BARRIERA DI POTENZIALE E COEFFICIENTI R, T (13/09/01)
6) PARTICELLA SU UNA CIRCONFERENZA (16/09/02)
7) OSCILLATORE ARMONICO (17/01/97)
8) OSCILLATORE ARMONICO (11/01/99)
9) OSCILLATORE ARMONICO BIDIMENSIONALE E TEORIA DELLE PERTURBAZIONI (05/02/01)
10) PARTICELLA SU UNA CIRCONFERENZA E TEORIA DELLE PERTURBAZIONI (23/09/98)

→ CONTINUA

11) MOMENTO ANGOLARE ORBITALE (30/01/98)

12) MOMENTO ANGOLARE ORBITALE (09/01/07)

13) SPIN (18/02/97)

14) SPIN (07/09/99)

15) COMPOSIZIONE DI MOMENTI ANGOLARI (06/12/04)

16) COMPOSIZIONE DI MOMENTI ANGOLARI (18/06/02)

17) PARTICELLE IDENTICHE (07/07/03)

18) PARTICELLE IDENTICHE (20/07/04)

19) MOTO IN UN CAMPO CENTRALE E PARTICELLE IDENTICHE (23/09/97)

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
11 Gennaio 1999

ESERCIZIO N^O. 1 [SISTEMA A DUE LIVELLI]

L'hamiltoniano di un sistema quantistico a due livelli è descritto dal seguente operatore:

$$H \mid 1\rangle = \mid 1\rangle + e^{i\pi/4} \mid 2\rangle \ , \qquad H \mid 2\rangle = e^{-i\pi/4} \mid 1\rangle$$

dove $\mid 1\rangle$ e $\mid 2\rangle$ sono gli autostati normalizzati di un altro operatore hermitiano $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \mid 1\rangle = \sqrt{2} \mid 1\rangle \ , \qquad \mathcal{A} \mid 2\rangle = -\sqrt{2} \mid 2\rangle$$

All'istante $t = 0$ si esegue una misura dell'osservabile associata all'operatore $\mathcal{A}$ e si trova il valore $-\sqrt{2}$.

a) Immediatamente dopo si esegue una misura di energia. Qual è la probabilità di trovare il sistema nello stato fondamentale?

b) Come cambia questa probabilità eseguendo la misura dopo un intervallo di tempo finito t ?

c) In quali istanti di tempo $t > 0$ (se esistono) il sistema si ritrova nello stesso stato in cui si trovava al tempo $t = 0$?

Esercizio 1

a) Calcoliamo autovalori ed autovettori di H.
La matrice H ha la forma

$$\langle 1|H|1\rangle = 1 \qquad \langle 1|H|2\rangle = \overbrace{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}^{e^{-i\pi/4}}$$

$$\langle 2|H|1\rangle = \underbrace{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}_{e^{i\pi/4}} \qquad \langle 2|H|2\rangle = 0$$

ossia

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione secolare è:

$$0 = \mathrm{Det}(H-\lambda I) = (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

da cui

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Poniamo

$$\begin{cases} H|+\rangle = E_+|+\rangle \\ H|-\rangle = E_-|-\rangle \end{cases} \qquad \boxed{E_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

e calcoliamo i due autovettori:

$$H|\pm\rangle = \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + e^{-i\pi/4} b \\ e^{i\pi/4} a \end{pmatrix} = E_\pm |\pm\rangle =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow e^{i\pi/4} a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} b$$

da cui

$$|\pm\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} e^{-i\pi/4} b_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix}$$

La costante $b_\pm$ è fissata dalla normalizzazione

$$\langle\pm|\pm\rangle = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} e^{+i\pi/4} b_\pm^*\right)\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} e^{-i\pi/4} b_\pm\right) + b_\pm^* b_\pm =$$

$$= \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 |b_\pm|^2 + |b_\pm|^2 = \left(\frac{1+5\pm 2\sqrt{5}}{4} + 1\right)|b_\pm|^2 =$$

$$= \left(\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)|b_\pm|^2 = \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}\right)|b_\pm|^2 = 1$$

da cui

$$|b_\pm|^2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}\pm 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{(\sqrt{5}\mp 1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}\mp 1}{2\sqrt{5}}$$

Allora

$$\boxed{|\pm\rangle = \left(\frac{\sqrt{5}\mp 1}{2\sqrt{5}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} e^{-i\pi/4} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Lo stato del sistema al tempo $t=0$ è:

$$|\psi(0)\rangle = |2\rangle$$

Questo stato può essere decomposto in autostati dell'energia:

$$|\psi(0)\rangle = |2\rangle = c_{2-}|-\rangle + c_{2+}|+\rangle$$

In particolare, il coefficiente c_{2-} vale:

$$c_{2-} = \langle -|2\rangle = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)^{1/2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} e^{i\pi/4}, 1\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)^{1/2}$$

La probabilità di trovare il sistema nello stato fondamentale è allora

$$\boxed{P(E=E_-) = |\langle -|2\rangle|^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}} \qquad (P \simeq 0.72)$$

b) Calcoliamo l'evoluzione dello stato:

$$|\psi(t)\rangle = c_{2-}(t)|-\rangle + c_{2+}(t)|+\rangle =$$

$$= c_{2-}(0)\, e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}|-\rangle + c_{2+}(0)\, e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}}|+\rangle$$

La probabilità di misurare il valore E_- di energia resta dunque invariato nel tempo. Infatti

$$\boxed{P(t) = |c_{2-}(t)|^2 = |c_{2-}(0)|^2 = P(0)}$$

c) Scriviamo lo stato $|\psi(t)\rangle$ nella forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iE_- t}{\hbar}} \left[c_{2-}(0)\,|-\rangle + c_{2+}(0)\, e^{-i\omega t}\,|+\rangle \right]$$

dove

$$\boxed{\omega = \frac{E_+ - E_-}{\hbar} = \frac{\sqrt{5}}{\hbar}}$$

Questo stato coincide con lo stato iniziale (a meno di un irrilevante fattore di fase) quando

$$e^{-i\omega t} = 1$$

ossia

$$\boxed{\omega t = 2M\pi} \qquad M = 1, 2, \ldots$$

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
17 Gennaio 1997

ESERCIZIO N^O. 2 [BUCA DI POTENZIALE INFINITA]

Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta all'azione del potenziale:

$$\begin{cases} V(x) = +\infty & , \quad \text{per } |x| \geq L/2 \\ V(x) = 0 & , \quad \text{per } |x| < L/2 \end{cases}$$

All'istante iniziale la funzione d'onda è:

$$\psi(x, t=0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\cos \frac{\pi x}{L} - \cos \frac{3\pi x}{L} \right) \cdot \theta \left(x + \frac{L}{2} \right) \theta(-x)$$

1) Quali, fra i possibili risultati di una misura dell' energia della particella, hanno probabilità non nulla?

2) Determinare le probabilità dei primi tre autovalori dell' Hamiltoniano.

3) Supponendo che il sistema evolva liberamente, determinare la funzione d'onda del sistema ad un tempo $t > 0$ generico.

4) <u>FACOLTATIVO</u>: Esiste un istante di tempo $t > 0$ tale che in quell'istante la particella *non* possa essere trovata nella metà sinistra del segmento, $x < 0$? In caso affermativo, quando questo si verifica per la prima volta?

Si ricordi che gli autovalori e le autofunzioni della buca di potenziale considerata sono:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \qquad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

e:

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) & , \quad \text{per } n \text{ pari} \\ \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) & , \quad \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Definendo inoltre i seguenti integrali:

$$I_{CS}(m,n) = \int d\alpha \, \cos(m\alpha) \, \text{sen}(n\alpha)$$
$$I_{CC}(m,n) = \int d\alpha \, \cos(m\alpha) \cos(n\alpha)$$

si ha, <u>per $m \neq n$</u>:

$$I_{CS}(m,n) = \frac{1}{m^2 - n^2} \left[n \cos(m\alpha) \cos(n\alpha) + m \, \text{sen}(m\alpha) \, \text{sen}(n\alpha) \right]$$

$$I_{CC}(m,n) = \frac{1}{m^2 - n^2} \left[m \cos(n\alpha) \, \text{sen}(m\alpha) - n \cos(m\alpha) \, \text{sen}(n\alpha) \right]$$

II ESONERO - ESERCIZIO N°2

1) I possibili risultati di una misura dell'energia sono tutti quelli per i quali i coefficienti c_n dello sviluppo in autofunzioni

$$|\psi\rangle = \sum c_n |\psi_n\rangle$$

risultano diversi da zero.

Calcoliamo allora gli c_n considerando separatamente i casi n pari ed n dispari.

$\boxed{n \text{ pari}}$

$$c_n = \langle \psi_n | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_n^*(x)\, \psi(x) =$$

$$= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{0} dx \left(\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{0} d\alpha \left(\cos\alpha - \cos 3\alpha \right) \operatorname{sen}(n\alpha)$$

Utilizzando le formule date, calcoliamo separatamente i due integrali:

- $$\int_{-\pi/2}^{0} d\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}(n\alpha) =$$

$$= \frac{1}{1-n^2} \left[n \cos\alpha \cos(n\alpha) + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(n\alpha) \right]_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{1-n^2} \left[n - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \overset{n \text{ pari}}{=} \frac{n}{1-n^2}$$

- $\int_{-\pi/2}^{0} d\alpha \cos 3\alpha \operatorname{sen} n\alpha =$

$$= \frac{1}{9-n^2}\left[n\cos(3\alpha)\cos(n\alpha) + 3\operatorname{sen}(3\alpha)\operatorname{sen}(n\alpha)\right]_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{9-n^2}\left[n + 3\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \overset{n \text{ pari}}{=} \frac{n}{9-n^2}$$

In conclusione

$$\boxed{c_n \overset{n \text{ pari}}{=} \frac{2n}{\pi}\left(\frac{1}{1-n^2} - \frac{1}{9-n^2}\right) = \frac{16n}{\pi(1-n^2)(9-n^2)}}$$

Consideriamo ora il caso n dispari

$\boxed{n \text{ dispari}}$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{0} dx \left(\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} d\alpha \left(\cos\alpha - \cos 3\alpha\right)\cos(n\alpha)$$

Utilizzando la formula data, calcoliamo in generale, per $m \neq n$, l'integrale

$$\int_{-\pi/2}^{0} dx \cos(m\alpha)\cos(n\alpha) =$$

$$= \frac{1}{m^2-n^2}\left[m\cos(m\alpha)\operatorname{sen}(n\alpha) - n\cos(n\alpha)\operatorname{sen}(m\alpha)\right]_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{m^2-n^2}\left[+m\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] =$$

$$\overset{m,n \text{ dispari}}{=} 0$$

Restano solo da considerare, allora, i casi $n=1,3$.

$$c_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} d\alpha \cos^2\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cos^2\alpha \overset{\alpha=\frac{\pi x}{L}}{=} \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \cos^2\frac{\pi x}{L} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} |\psi_1(x)|^2 = \frac{1}{2}$$

Analogamente:

$$c_3 = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} d\alpha \cos^2 3\alpha = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cos^2 3\alpha \overset{\alpha=\frac{\pi x}{L}}{=} -\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \cos^2\left(\frac{3\pi x}{L}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, |\psi_3(x)|^2 = -\frac{1}{2}$$

In conclusione

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = -\frac{1}{2}, \quad c_n = 0 \quad \text{per } n \text{ dispari } n \neq 1,3}$$

I possibili risultati di una misura di E sono:

$$\boxed{\begin{array}{l} E_1,\ E_3,\ E_n \text{ con } n \text{ pari} \\ E_n = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} n^2 \end{array}}$$

2) I primi tre autovalori dell'Hamiltoniana corrispondono ad $n = 1,2,3$. I relativi coefficienti c_n valgono:

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{32}{\pi(-3)(5)} = -\frac{32}{15\pi}$$

le probabilità cercate sono $P_n = |c_n|^2$, ossia

$$\boxed{P_1 = P_3 = \frac{1}{4}, \quad P_2 = \left(\frac{32}{15\pi}\right)^2}$$

3) La funzione d'onda al tempo $t>0$ generico è:

$$\boxed{\psi(x,t) = c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\psi_1(x) + c_3 e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\psi_3(x) + \sum_{n \text{ pari}} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\psi_n(x)}$$

4) Perchè la probabilità di trovare la particella nella regione $x<0$ sia nulla, la f.d.o. deve essere identicamente nulla in questa regione. Ossia, ad un determinato tempo t^* deve valere:

$$\psi(x,t^*) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t^*}\left[c_1\psi_1(x) + c_3 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_3-E_1)t^*}\psi_3(x) + \sum_{n \text{ pari}} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_1)t^*}\psi_n(x)\right] =$$

$$= 0 \quad \text{per } x<0$$

Invertendo x con $-x$, e ricordando la parità delle autofunzioni, questa condizione può anche essere scritta come

$$c_1\psi_1(x) + c_3 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_3-E_1)t^*}\psi_3(x) - \sum_{n \text{ pari}} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_1)t^*}\psi_n(x) = 0, \quad \underline{\underline{x>0}}$$

Ricordiamo ora che la funzione d'onda al tempo $t=0$

soddisfa:

$$c_1\psi_1(x) + c_3\psi_3(x) + \sum_{n\,pari} c_n\psi_n(x) = 0 \quad , \qquad \underline{\underline{x>0}}$$

Sommando e sottraendo tra loro le ultime due equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} 2c_1\psi_1(x) + c_3\left(1+e^{-\frac{i}{\hbar}(E_3-E_1)t^*}\right)\psi_3(x) + \sum_{n\,pari} c_n\left(1-e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_1)t^*}\right)\psi_n = 0 \\ c_3\left(1-e^{-\frac{i}{\hbar}(E_3-E_1)t^*}\right)\psi_3(x) + \sum_{n\,pari} c_n\left(1+e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_1)t^*}\right)\psi_n(x) = 0 \end{cases}$$

È evidente che queste due equazioni sono soddisfatte per

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(E_3-E_1)t^*} = 1 \quad , \quad e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_1)t^*} = -1$$

In questo caso, infatti la seconda equazione si annulla identicamente e la prima si riduce a $\psi(x,0)=0$ per $x>0$. Si deve pertanto avere

$$\begin{cases} \dfrac{E_3-E_1}{\hbar}t^* = \dfrac{\pi^2\hbar}{2mL^2}\cdot 8t^* = 2k\pi \quad , & k \text{ intero} \\[2ex] \dfrac{E_n-E_1}{\hbar}t^* = \dfrac{\pi^2\hbar}{2mL^2}(n^2-1)t^* = (2k'+1)\pi \quad , & k' \text{ intero} \end{cases}$$

Poniamo $t^* = \dfrac{2mL^2}{\pi\hbar}\hat{t}^*$, con $\hat{t}^*$ adimensionale.
Risulta:

$$8\hat{t}^* = 2k \quad , \quad (n^2-1)\hat{t}^* = (2k'+1)$$

Ora, poiché n^2 è pari, n^2-1 è dispari – le precedenti equazioni sono allora soddisfatte per

$$\hat{t}^* = 2s+1 \qquad s=0,1,\dots$$

(Infatti, nel caso ad esempio $s=0$ si ha:

$$8 = 2k, \quad n^2-1 = 2k'+1$$

entrambe soddisfatte). Pertanto

$$\boxed{t^* = \frac{2mL^2}{\pi\hbar}(2s+1), \qquad s=0,1,\dots}$$

[Osserviamo che, per questi tempi t^*, si ha:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t^*} = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\frac{2mL^2}{\pi\hbar}n^2(2s+1)} = e^{-i\pi n^2(2s+1)} = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

La f.d.o. a tali tempi è pertanto

$$\psi(x,t^*) = -c_1\psi_1(x) - c_3\psi_3(x) + \sum_{n \text{ pari}} c_n\psi_n(x) =$$

$$= -\left[c_1\psi_1(-x) + c_3\psi_3(-x) + \sum_{n \text{ pari}} c_n\psi_n(-x)\right] =$$

$$= -\psi(-x,0) = 0 \quad \text{per } x<0$$

come effettivamente desiderato]

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
26 Gennaio 2001

ESERCIZIO N^O. 1 [BUCA DI POTENZIALE A DELTA E GRADINO]

Una particella di massa m priva di spin si muove in una dimensione soggetta al potenziale:

$$V(x) = -V_0\, a\, \delta(x) - V_0\, \theta(x-b)$$

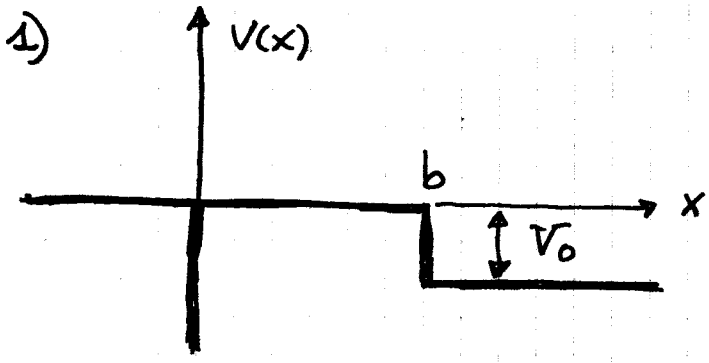
dove V_0, a e b sono costanti positive.

a) Determinare la condizione di esistenza di eventuali stati legati della particella e la corrispondente funzione d'onda. Per semplicità, in quest'ultima si lasci indicata genericamente la costante di normalizzazione moltiplicativa.

b) Si consideri il caso limite in cui $b \to \infty$ ed il potenziale in tutto lo spazio assume pertanto la forma $V(x) = -V_0\, a\, \delta(x)$. Utilizzando i risultati precedentemente ottenuti, determinare l'autovalore dell'energia dell'unico stato legato esistente e la corrispondente autofunzione.

ESERCIZIO

1)



$$\boxed{V(x) = -V_0 a\,\delta(x) - V_0\,\theta(x-b)}$$

$(V_0, a, b > 0)$

Gli stati legati sono descritti da f.d.o. che si annullano all'infinito. In questo caso questi corrispondono pertanto a

$$\boxed{E < -V_0}$$

Assumendo questa condizione scriviamo l'equazione di Schrödinger nelle due regioni, $x<b$ e $x>b$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} - V_0 a\,\delta(x)\psi = E\psi & , \quad x<b \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} - V_0\psi = E\psi & , \quad x>b \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi}{dx^2} = -\dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi - \dfrac{2mV_0 a}{\hbar^2}\delta(x)\psi & , \quad x<b \\ \dfrac{d^2\psi}{dx^2} = -\dfrac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)\psi & , \quad x>b \end{cases}$$

Poniamo:

$$\boxed{k^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}} \quad , \quad \boxed{q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(|E| - V_0\right)}$$

Si ha allora:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi}{dx^2} = k^2\psi + (q^2 - k^2)\, a\, \delta(x)\, \psi & , \quad x < b \\[2ex] \dfrac{d^2\psi}{dx^2} = q^2\psi & , \quad x > b \end{cases}$$

Le soluzioni di questa equazione nelle tre regioni ($x<0$, $0<x<b$, $x>b$) che soddisfano le condizioni al contorno $\psi(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$ sono:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x<0: & \psi(x) = A e^{kx} \\ 0<x<b: & \psi(x) = B e^{kx} + C e^{-kx} \\ x>b: & \psi(x) = D e^{-qx} \end{array}}$$

Le altre condizioni, che determinano i coefficienti A, B, C e D sono: i) continuità della f.d.o nei punti $x=0$ e $x=b$. ii) continuità della derivata prima nel punto $x=b$ (dove il potenziale è finito). iii) discontinuità della derivata prima nel punto $x=0$. Quest'ultima si

ottiene integrando l'eq. di Schrödinger in un intorno infinitesimo di $x=0$:

$$\psi'(0+) - \psi'(0-) = -(k^2-q^2)\, a\, \psi(0)$$

Imponiamo allora queste condizioni:

- $\psi(0^+) = \psi(0^-) \Rightarrow$

  $\Rightarrow B + C = A$

- $\psi'(0+) - \psi'(0-) = -(k^2-q^2)\, a\, \psi(0) \Rightarrow$

  $\Rightarrow k(B-C) - kA = -(k^2-q^2)\, a\, A$

- $\psi(b^-) = \psi(b^+) \Rightarrow$

  $\Rightarrow B e^{kb} + C e^{-kb} = D e^{-qb}$

- $\psi'(b^-) = \psi'(b^+) \Rightarrow$

  $\Rightarrow k(B e^{kb} - C e^{-kb}) = -q D e^{-qb}$

ossia:

$$\begin{cases} B + C = A \\ B - C = A\left[1 - (1 - q^2/k^2)\, ka\right] \\ B e^{kb} + C e^{-kb} = D e^{-qb} \\ B e^{kb} - C e^{-kb} = -q/k\, D e^{-qb} \end{cases}$$

Poniamo ancora, per comodità:

$$\boxed{\rho = \frac{q}{k} = \sqrt{1 - \frac{V_0}{|E|}}}$$

Sommando e sottraendo membro a membro le due coppie di equazioni possiamo riscrivere il sistema nella forma:

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2} A \left[2 - (1-\rho^2) ka \right] \\ C = \frac{1}{2} A (1-\rho^2) ka \\ B = \frac{1}{2} D (1-\rho) e^{-(k+q)b} \\ C = \frac{1}{2} D (1+\rho) e^{(k-q)b} \end{cases}$$

E' evidente che i coefficienti A e D soluzioni di questo sistema devono soddisfare le due equazioni

$$\begin{cases} A \left[2 - (1-\rho^2) ka \right] = D (1-\rho) e^{-(k+q)b} \\ A (1-\rho^2) ka = D \cancel{(1+\rho)} e^{(k-q)b} \end{cases}$$

Dividendo infine le equazioni membro a membro si ottiene un'equazione indipendente dai coefficienti A, B, C e D. Questa condizione, che deve essere soddisfatta affinché

l'eq. di Schrödinger ammette soluzione, ossia esistono stati legati, definisce i possibili livelli di energia per tali stati. Tale condizione ha la forma:

$$\frac{2-(1-\rho^2)ka}{(1-\rho)ka} = (1-\rho)\,e^{-2kb}$$

ossia

$$2-(1-\rho^2)ka = (1-\rho)^2 ka\, e^{-2kb}$$

o infine

$$\boxed{(1-\rho)^2 ka\, e^{-2kb} + (1-\rho^2)ka - 2 = 0} \qquad (\star)$$

Quando questa condizione è soddisfatta, i coefficienti sono così determinati:

$$\boxed{\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2}A\left[2-(1-\rho^2)ka\right] \\ C &= \tfrac{1}{2}A(1-\rho^2)ka \\ D &= A(1-\rho)ka\, e^{-k(1-\rho)b} \end{aligned}} \qquad (\star\star)$$

ed A è determinato dalla normalizzazione complessiva della f.d.o.

La condizione ($\star$) può essere studiata ~~graficamente~~

numericamente e si trova che essa ammette una ed una sola soluzione quando V_0 è maggiore di un certo valore minimo.
Un caso limite particolarmente semplice è quando $\underline{\underline{b \to \infty}}$. In questo limite il potenziale si riduce a

$$\boxed{V(x) = -V_0 a \delta(x)}$$

e la condizione (★) diventa

$$\boxed{(1-\xi^2) K a = 2} \qquad (\cdot)$$

ossia (quadrando entrambi i membri):

$$\left[1 - \left(1 - \frac{V_0}{|E|}\right)\right]^2 \frac{2m|E|}{\hbar^2} a^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{V_0^2}{|E|^2} \frac{2m|E|}{\hbar^2} a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{|E| = \frac{m V_0^2 a^2}{2\hbar^2}}$$

Esiste dunque un solo stato legato con energia definita dalla precedente equazione.
Dalle equazioni (★★) vediamo poi che, nel limite $b \to \infty$, il coefficiente D si annulla e, in virtù della (·) si ha pure $B = 0$ e $C = A$.
La f.d.o. diventa pertanto

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(x) &= A e^{Kx} \quad , \quad x < 0 \\ \psi(x) &= A e^{-Kx} \quad , \quad x > 0 \end{aligned}}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
7 Giugno 2000

ESERCIZIO N^O. 2 [BARRIERA DI POTENZIALE A DELTA E COEFFICIENTI R,T]

Un fascio di particelle, di massa m e spin 0, è vincolato a muoversi in una dimensione soggetto al potenziale $V(x)$ definito da:

$$\begin{cases} V(x) = +\infty & \text{per } x < 0 \\ V(x) = \dfrac{\hbar^2 \lambda}{2m}\,\delta\,(x-a) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

con λ ed a costanti positive.

a) Determinare (a meno di una costante di normalizzazione assoluta) le autofunzioni dell'energia del sistema e trovare per quali valori dell'energia tali autofunzioni sono le stesse che si avrebbero in assenza della barriera di potenziale a delta.

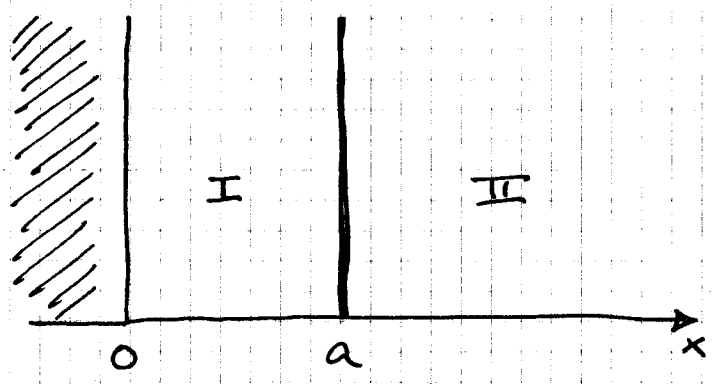
b) Assumendo che il fascio incidente si muova da destra verso sinistra, proveniente da $x = +\infty$, calcolare la densità di corrente j_i dell'onda incidente sulla barriera di potenziale a delta in $x = a$ e la densità di corrente j_r dell'onda riflessa da tale barriera. Mostrare inoltre che per il coefficiente di riflessione:

$$R = \frac{j_r}{|j_i|}$$

si ottiene il valore $R = 1$. Sapreste dare una spiegazione di tale risultato?

c) Calcolare a quale valore tende la probabilità che una particella si trovi nella regione $0 < x < a$ quando l'energia del fascio tende a zero.

ESERCIZIO N° 2



$$\begin{cases} V(x) = +\infty, & x<0 \\ V(x) = \dfrac{\hbar^2\lambda}{2m}\,\delta(x-a), & x>0 \end{cases}$$

a) Studiamo le soluzioni dell'eq. di Schrödinger. Nella regione $x<0$, dove il potenziale è infinito, si ha

$$\psi(x) = 0 \quad , \quad x<0$$

Nella regione $x>0$ l'eq. di Schrödinger si scrive:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2\lambda}{2m}\,\delta(x-a)\psi = E\psi$$

ossia

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi + \lambda\,\delta(x-a)\psi \quad , \quad \boxed{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

In tutta la regione $x>0$, con l'eccezione del punto $x=a$, la f.d.o. soddisfa l'eq. di Schrödinger della particella libera. Nelle regioni I $(0<x<a)$ e II $(x>a)$ le soluzioni possono allora essere scritte nella forma

$$\begin{cases} \psi_I(x) = A\,\mathrm{sen}\,kx + B\cos kx \\ \psi_{II}(x) = C\,\mathrm{sen}\,kx + D\cos kx \end{cases}$$

Una condizione al contorno è la continuità della f.d.o. in $x=0$:

$$\psi_I(0) = B = 0 \Rightarrow \psi_I(x) = A \operatorname{sen} kx$$

Una seconda condizione è la continuità della f.d.o. in $x=a$:

$$\psi_I(a) = \psi_{II}(a) \Rightarrow A \operatorname{sen} ka = C \operatorname{sen} ka + D \cos ka \quad (*)$$

Una terza condizione riguarda la discontinuità della derivata prima della f.d.o. in $x=a$. Integrando entrambi i membri dell'eq. di Schrödinger tra $a-\varepsilon$ ed $a+\varepsilon$, e prendendo il limite $\varepsilon \to 0$, si trova

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} dx \frac{d\psi^2}{dx^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{a+\varepsilon} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{a-\varepsilon} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} dx \left[-k^2\psi + \lambda\delta(x-a)\psi \right] = \lambda\psi(a)$$

da cui

$$k\,(C \cos ka - D \operatorname{sen} ka) - kA \cos ka = \lambda A \operatorname{sen} ka \quad (**)$$

Possiamo raccogliere le eq. (*) e (**) nel sistema

$$\begin{cases} C \operatorname{sen} ka + D \cos ka = A \operatorname{sen} ka \\ C \cos ka - D \operatorname{sen} ka = A \left(\cos ka + \frac{\lambda}{k} \operatorname{sen} ka \right) \end{cases}$$

e risolvere rispetto alle costanti C e D.

Eliminando D dalle due equazioni si ottiene:

$$C \operatorname{sen}^2 ka + C \cos^2 ka = A \left(\operatorname{sen}^2 ka + \cos^2 ka + \frac{\lambda}{k} \operatorname{sen} ka \cos ka \right)$$

ossia

$$C = A \left(1 + \frac{\lambda}{k} \operatorname{sen} ka \cos ka \right)$$

Eliminando C dalle due equazioni si ottiene invece:

$$D \cos^2 ka + D \operatorname{sen}^2 ka = A \left(\operatorname{sen} ka \cos ka - \operatorname{sen} ka \cos ka - \frac{\lambda}{k} \operatorname{sen}^2 ka \right)$$

ossia

$$D = -A \frac{\lambda}{k} \operatorname{sen}^2 ka$$

Riepilogando, le soluzioni dell'eq. di Schrodinger sono:

$$\boxed{\begin{cases} \psi(x) = 0 & , \quad x < 0 \\ \psi(x) = A \operatorname{sen} kx & , \quad 0 < x < a \\ \psi(x) = C \operatorname{sen} kx + D \cos kx & , \quad a < x \end{cases}}$$

con

$$\boxed{\begin{aligned} C &= A \left(1 + \frac{\lambda}{k} \operatorname{sen} ka \cos ka \right) \\ D &= -A \frac{\lambda}{k} \operatorname{sen}^2 ka \end{aligned}}$$

Osserviamo che per $\lambda \to 0$ si ha $C = A$ e $D = 0$, ossia

$$\begin{cases} \psi(x) = 0 & , \quad x < 0 \\ \psi(x) = A \operatorname{sen} kx & , \quad x > 0 \end{cases}$$

che è la soluzione dell'eq. di Schrödinger in assenza della barriera di potenziale a delta. La stessa soluzione si trova anche quando $\operatorname{sen} ka = 0$, ossia

$$\boxed{ka = n\pi \,, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

Questo corrisponde agli autovalori dell'energia

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2}$$

In corrispondenza di questi autovalori le particelle non risentono della presenza della barriera di potenziale a delta. In questa circostanza, infatti, la funzione d'onda si annulla in $x = a$, ed il termine di potenziale

$$\frac{\hbar^2 \lambda}{2m} \delta(x-a)\, \psi(x)$$

nell'equazione di Schrödinger è identicamente nullo.

b) Scomponiamo la f.d.o. nella regione $x > a$ in una componente incidente (da destra) sulla barriera di potenziale a delta ed in una componente riflessa:

$$\psi_{II}(x) = C \operatorname{sen} kx + D \cos kx =$$

$$= \frac{C}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) + \frac{D}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(D - iC)\, e^{ikx} + \frac{1}{2}(D + iC)\, e^{-ikx}$$

le componenti ψ_i e ψ_r, rispettivamente

incidente e riflessa, sono quindi date da

$$\begin{cases} \psi_i = \frac{1}{2}(D+iC)\,e^{-ikx} \\ \psi_2 = \frac{1}{2}(D-iC)\,e^{ikx} \end{cases}$$

Ricordiamo la definizione di densità di corrente:

$$j = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{d\psi^*}{dx} - \psi^*\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{i\hbar}{2m}(-2i)\,\mathrm{Im}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx}\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx}\right)$$

Per un'onda monocromatica della forma $\psi = a e^{ikx}$, con a costante complessa, la densità di corrente vale

$$j = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left(a^* e^{-ikx}\, ik a e^{ikx}\right) = \frac{\hbar k}{m}|a|^2$$

Nel caso in questione possiamo scegliere per convenienza la fase della costante A nulla, dimodo

che risulta A reale e positiva. Si trovano allora, per le varie densità di corrente, le espressioni

$$\begin{cases} j_i = -\frac{1}{4}\frac{\hbar k}{m}(D^2+C^2) \\ j_r = \frac{1}{4}\frac{\hbar k}{m}(D^2+C^2) \end{cases}$$

ossia

$$\boxed{|j_r| = |j_i| = \frac{\hbar k}{m}\frac{A^2}{4}\left(1+2\frac{\lambda}{k}\operatorname{sen}ka\cos ka+\frac{\lambda^2}{k^2}\operatorname{sen}^2 ka\right)}$$

Il coefficiente di riflessione vale

$$\boxed{R = \frac{|j_r|}{|j_i|} = 1}$$

ossia le particelle vengono riflesse con probabilità uno. Questo è evidente: al di là della barriera a delta si trova una barriera di potenziale infinita che non permette il passaggio di particelle. D'altra parte, in una situazione stazionaria, non vi può essere nemmeno accumulo di particelle tra le due barriere (nella regione cioè $0<x<a$). Pertanto il flusso che giunge sulla barriera a delta deve uguagliare il flusso che se ne riallontana.

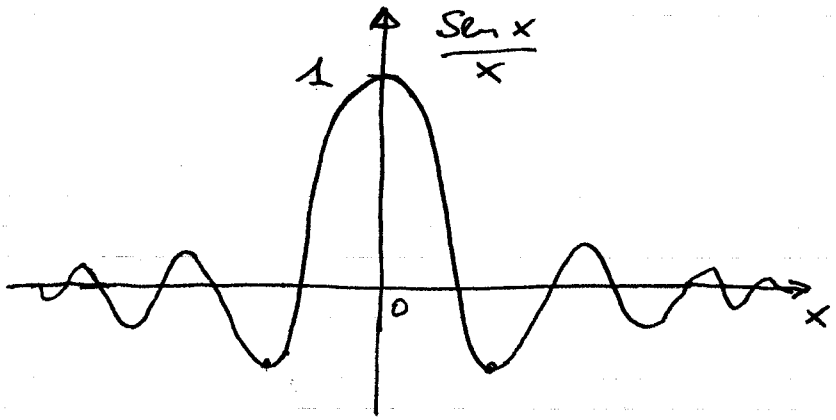
c) Calcoliamo la probabilità di trovare particelle nella regione $0<x<a$:

$$P(0<x<a) = \int_0^a dx\,|\psi_I(x)|^2 = A^2\int_0^a dx\,\operatorname{sen}^2 kx =$$

$$= A^2\int_0^a dx\,\frac{1}{2}(1-\cos 2kx) =$$

$$= \frac{A^2}{2}\left(a - \frac{\operatorname{sen} 2kx}{2k}\Big|_0^a\right) = \frac{A^2}{2}\left(a - \frac{\operatorname{sen} 2ka}{2k}\right)$$

[Tale probabilità è massima quando la funzione $\operatorname{sen} 2ka/2ka$ assume il suo valore minimo. Questa funzione ha il ben noto andamento della forma



ed il suo minimo assoluto è dato dal primo minimo, che si trova nelle vicinanze di $x = \frac{3}{2}\pi$, dove $\operatorname{sen} x = -1$. La probabilità cercata è pertanto minima per

$$\boxed{ka \simeq \frac{3}{4}\pi}$$

[Un calcolo numerico fornisce la soluzione esatta $ka \simeq 2.2467\ldots$ in luogo di $3\pi/4 = 2.356\ldots$]]

Per piccoli valori dell'energia delle particelle incidenti ($ka \ll 1$) si ha

$$\frac{\operatorname{sen} 2ka}{2k} \simeq a$$

e la probabilità di trovare particelle nella regione $0 < x < a$ tende ad annullarsi.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
13 Settembre 2001

ESERCIZIO N^O. 2 [BARRIERA DI POTENZIALE E COEFFICIENTI R,T]

Un fascio di particelle di massa m prive di spin, proveniente dalla regione $x = -\infty$, incide con energia $E = V_0$ sulla barriera di potenziale

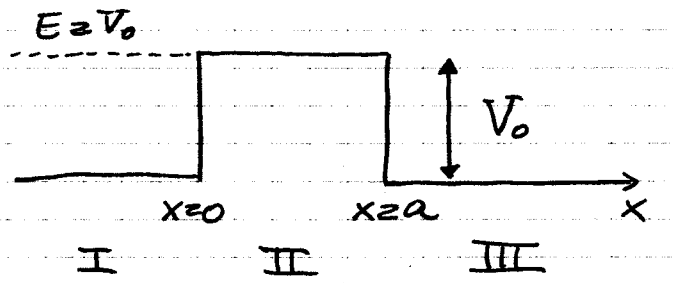
$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0,\ x > a \\ V_0, & \text{per } 0 < x < a \end{cases}$$

a) Determinare la funzione d'onda delle particelle ed i coefficienti di riflessione e trasmissione.

b) Determinare la probabilità relativa che le particelle si trovino rispettivamente nelle regioni $0 < x < a$ ed $a < x < 2a$.

c) Utilizzando i risultati ottenuti al punto a), determinare la funzione d'onda ed i coefficienti di riflessione e trasmissione nel limite in cui la lunghezza a della barriera tende ad infinito (gradino di potenziale).

Esercizio N° 2



$$V(x) = \begin{cases} 0, & x<0,\ x>a \\ V_0, & 0<x<a \end{cases}$$

a) Scriviamo l'equazione di Schrodinger, con $E=V_0$, nelle 3 regioni di spazio. Nelle regioni I e III il potenziale è nullo e si ha:

$$\text{I, III):} \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \xrightarrow{E=V_0} \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi$$

$$\text{II):} \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi \xrightarrow{E=V_0} \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$$

La soluzione dell'equazione di Schrödinger che soddisfa le opportune condizioni al contorno per $x \to \pm\infty$ è:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{I)} \quad \psi(x) = e^{ikx} + A e^{-ikx} \\ &\text{II)} \quad \psi(x) = Bx + C \\ &\text{III)} \quad \psi(x) = D e^{ikx} \end{aligned}}$$

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}}$$

I coefficienti A, B, C, D vengono quindi determinati dalle condizioni di continuità della f.d.o. e della derivata prima nei punti $x=0$ ed $x=a$:

$$\begin{cases} 1+A = C & \psi(0)_+ = \psi(0)_- \\ ik(1-A) = B & \psi'(0)_+ = \psi'(0)_- \\ Ba + C = De^{ika} & \psi(a)_+ = \psi(a)_- \\ B = ikDe^{ika} & \psi'(a)_+ = \psi'(a)_- \end{cases}$$

La 3ª e 4ª equazione possono essere riscritte sostituendo B e C in termini di A:

$$\begin{cases} ika(1-A) + (1+A) = De^{ika} \\ (1-A) = De^{ika} \end{cases}$$

Sottraendo ora la seconda equazione dalla prima:

$$ika(1-A) + 2A = 0 \Rightarrow A(2-ika) = -ika \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{ika}{ika-2}$$

È immediato a questo punto determinare gli altri coefficienti:

$$B = ik(1-A) = ik\left(\frac{ika-2-ika}{ika-2}\right) = \frac{-2ik}{ika-2}$$

$$C = 1+A = \frac{ika-2+ika}{ika-2} = \frac{2(ika-1)}{ika-2}$$

$$D = (1-A)e^{-ika} = \frac{-2e^{-ika}}{ika-2}$$

Ricapitolando:

$$\boxed{A = \frac{ika}{ika-2}, \quad B = \frac{-2ik}{ika-2} \qquad C = \frac{2(ika-1)}{ika-2}, \quad D = \frac{-2e^{-ika}}{ika-2}}$$

Questi coefficienti determinano completamente la f.d.o. del fascio di particelle.
I coefficienti di riflessione e trasmissione sono dati semplicemente da:

$$R = \frac{|j_r|}{|j_i|} = |A|^2 = \left|\frac{ika}{ika-2}\right|^2$$

$$T = \frac{|j_t|}{|j_i|} = |D|^2 = \left|\frac{-2e^{-ika}}{ika-2}\right|^2$$

ossia

$$\boxed{R = \frac{k^2a^2}{k^2a^2+4}, \quad T = \frac{4}{k^2a^2+4}}$$

Osserviamo che, come deve risultare dalla conservazione del flusso, $T+R=1$.

b) Calcoliamo ora la probabilità che la particella si trovi negli intervalli $0<x<a$ e $a<x<2a$ rispettivamente. Poiché la normalizzazione totale della f.d.o. è indeterminata, possiamo solo calcolare le probabilità relative:

$$P(0<x<a) = \overset{\text{costante arbitraria}}{K} \int_0^a dx\, |\psi(x)|^2 = K \int_0^a dx\, |Bx + C|^2 =$$

$$= K \int_0^a dx \left[|B|^2 x^2 + |C|^2 + 2 \operatorname{Re}(BC^*) \right] =$$

$$= K \left[\frac{1}{3} |B|^2 a^3 + |C|^2 a + \operatorname{Re}(BC^*) a^2 \right] =$$

$$= Ka \left[\frac{1}{3} \frac{4k^2a^2}{k^2a^2+4} + \frac{4(k^2a^2+1)}{k^2a^2+4} + \frac{-4k^2a^2}{k^2a^2+4} \right] =$$

$$= Ka \frac{4/3\, k^2a^2 + 4}{k^2a^2+4}$$

$$P(a<x<2a) = K \int_a^{2a} dx\, |\psi(x)|^2 = K \int_a^{2a} dx\, |De^{ikx}|^2 =$$

$$= K|D|^2 a = Ka \frac{4}{k^2a^2+4}$$

La probabilità relativa per le due regioni è pertanto:

$$\boxed{\frac{P(0<x<a)}{P(a<x<2a)} = 1 + \frac{1}{3} k^2 a^2}$$

c) E' immediato determinare i limiti dei vari coefficienti A, B, C, D quando la lunghezza della barriera a tende ad infinito:

$$A = \frac{ika}{ika-2} \xrightarrow{a\to\infty} 1 \quad , \quad B = \frac{-2ik}{ika-2} \xrightarrow{a\to\infty} 0$$

$$C = \frac{2(ika-1)}{ika-2} \xrightarrow{a\to\infty} 2 \quad , \quad D = \frac{-2e^{-ika}}{ika-2} \xrightarrow{a\to\infty} 0$$

In questo limite, allora, la f.d.o. ha espressioni diverse nelle due regioni $x<0$ ed $x>0$ e vale:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(x) &= e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos kx \quad , \quad x<0 \\ \psi(x) &= 2 \quad , \quad x>0 \end{aligned}}$$

I coefficienti di riflessione e trasmissione valgono

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \lim_{a\to\infty} \frac{k^2a^2}{k^2a^2+4} = 1 \\ T &= \lim_{a\to\infty} \frac{4}{k^2a^2+4} = 0 \end{aligned}}$$

come si può verificare anche direttamente a partire dall'espressione della f.d.o. in questo limite.

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA
16 Settembre 2002

ESERCIZIO [PARTICELLA SU UNA CIRCONFERENZA]

Una particella di massa m, priva di spin, è vincolata a muoversi su di una circonferenza di raggio R, posizionata nel piano $x\,y$ e centrata nell'origine. L'Hamiltoniana che descrive la particella è pertanto

$$H = \frac{p_\vartheta^2}{2\,mR^2} = -\frac{\hbar^2}{2\,mR^2}\,\frac{d^2}{d\vartheta^2}$$

dove ϑ rappresenta l'angolo polare che definisce la posizione della particella sulla circonferenza e $p_\vartheta = -i\,\hbar\,d/d\vartheta$ è il suo momento coniugato, coincidente con la componente lungo l'asse z del momento angolare della particella.

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi\,(\vartheta) = N\,(1 + \cos\vartheta)$$

dove N è una costante di normalizzazione.

a) Verificare che le funzioni

$$\varphi_\ell\,(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\ell\vartheta}, \qquad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

sono autofunzioni simultanee del momento p_ϑ e dell'Hamiltoniana H, calcolarne i corrispondenti autovalori ed il relativo livello di degenerazione.

b) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella, le rispettive probabilità ed il valore medio dell'energia.

c) Scegliendo per convenzione l'angolo ϑ compreso nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, calcolare il valore medio di ϑ all'istante $t = 0$ e giustificare il risultato ottenuto studiando il grafico della distribuzione $|\psi\,(\vartheta)|^2$.

d) Calcolare, all'istante iniziale $t = 0$, il valore dell'indeterminazione $\Delta\vartheta = \left(\langle\vartheta^2\rangle - \langle\vartheta\rangle^2\right)^{1/2}$.

e) Verificare che l'operatore velocità angolare $\dot{\vartheta} = \dfrac{d\vartheta}{dt}$ è legato alla componente z del momento angolare dalla relazione classica $p_\vartheta = mR^2\dot{\vartheta}$.

f) <u>FACOLTATIVO</u>: Verificare che, nello stato della particella, la velocità angolare ha valore medio (indipendendente dal tempo) nullo e pertanto il valore medio dell'angolo ϑ risulta costante nel tempo:

$$\left\langle\dot{\vartheta}\right\rangle = \frac{d}{dt}\,\langle\vartheta\rangle_t = 0\,.$$

Verificare questo risultato mediante un calcolo esplicito del valore medio $\langle\vartheta\rangle_t$ al tempo generico t.

ESERCIZIO

ⓐ Applichiamo gli operatori p_θ ed H alle funzioni $\varphi_\ell(\theta)$:

$$p_\theta \varphi_\ell(\theta) = -i\hbar \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\ell\theta}\right) = \hbar \ell \, \varphi_\ell(\theta)$$

$$H \varphi_\ell(\theta) = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\ell\theta}\right) = \frac{\hbar^2 \ell^2}{2mR^2}\varphi_\ell(\theta)$$

Le funzioni $\varphi_\ell(\theta)$ sono pertanto autofunzioni simultanee di p_θ ed H. I corrispondenti autovalori sono:

$$\boxed{p_\theta^{(\ell)} = \hbar \ell} \qquad \boxed{E^{(\ell)} = \frac{\hbar^2 \ell^2}{2mR^2}}, \qquad \underline{\underline{\ell = 0, \pm 1, \pm 2}}$$

Gli autovalori $p_\theta^{(\ell)}$ sono non degeneri, mentre gli autovalori dell'energia sono tutti doppiamente degeneri ($E^{(\ell)} = E^{(-\ell)}$), con l'eccezione del livello fondamentale $E^{(0)}$.

ⓑ Per determinare i possibili risultati di una misura dell'energia della particella occorre esprimere la f.d.o. $\psi(\theta)$ come combinazione lineare di autofunzioni $\varphi_\ell(\theta)$ dell'hamiltoniana. A tale scopo risulta necessario determinare, in primo luogo, la costante di normalizzazione N della f.d.o.

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, |\psi(\theta)|^2 = |N|^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) = 1 \qquad (*)$$

Risulta conveniente calcolare gli integrali

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{il\theta} = \frac{1}{il}\left(e^{il\theta}\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{il}\left(e^{i\pi l} - e^{-i\pi l}\right) =$$

$$= \frac{2}{l}\,\mathrm{sen}\,\pi l = \begin{cases} 0, & l \text{ intero}, l \neq 0 \\ 2\pi, & l = 0 \end{cases}$$

Dall'eq. (*) si ha pertanto:

$$1 = |N|^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(1 + \cancel{e^{i\theta}} + \cancel{e^{-i\theta}} + \cancel{\frac{1}{4}e^{2i\theta}} + \cancel{\frac{1}{4}e^{-2i\theta}} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= |N|^2\, \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi |N|^2$$

Scegliendo N reale e positivo abbiamo quindi:

$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}}$$

Possiamo ora esprimere facilmente la f.d.o $\psi(\theta)$ in termini di autofunzioni dell'hamiltoniano:

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}(1 + \cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{-i\theta}\right)$$

ossia

$$\boxed{\psi(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\varphi_0(\theta) + \sqrt{\frac{1}{6}}\,\varphi_1(\theta) + \sqrt{\frac{1}{6}}\,\varphi_{-1}(\theta)} \qquad (*)$$

I possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità sono pertanto

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_0 = 0, & p_0 = \frac{2}{3} \\ E_1 = \frac{\hbar^2}{2mR^2}, & p_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{array}}$$

Per il valore medio dell'energia otteniamo poi

$$\boxed{\langle E \rangle = p_0 E_0 + p_1 E_1 = \frac{\hbar^2}{6 m R^2}}$$

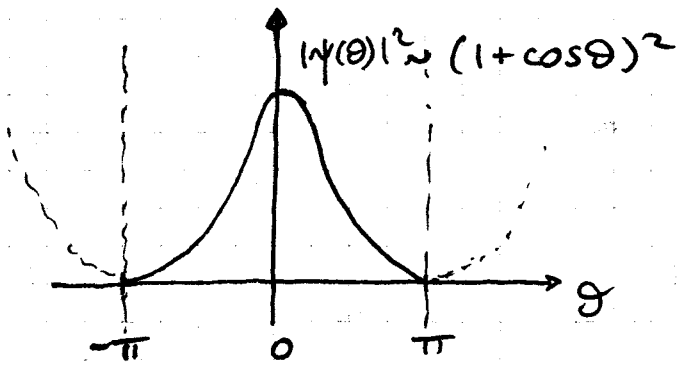
(c) Calcoliamo il valore medio di θ all'istante $t=0$.

$$\langle \theta \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta\, |\psi(\theta)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta \frac{1}{3\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)$$

Poichè questo è l'integrale di una funzione antisimmetrica su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\boxed{\langle \theta \rangle = 0}$$

Questo risultato è in accordo con il fatto che la distribuzione $|\psi(\theta)|^2$ è simmetrica rispetto rispetto all'origine $\theta = 0$:



(d) Calcoliamo l'indeterminazione $\Delta\theta = (\langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2)^{1/2}$. Già sappiamo che $\langle \theta \rangle = 0$. Per il valore medio $\langle \theta^2 \rangle$ si ha:

$$\langle \theta^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta^2 |\psi(\theta)|^2 = \frac{1}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta^2 (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)$$

Calcoliamo gli integrali

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta^2 e^{il\theta} = \frac{1}{il}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta^2 \frac{d}{d\theta} e^{il\theta} =$$

$$= \frac{1}{il}\left[\theta^2 e^{il\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta\, e^{il\theta}\right] =$$

$$= \frac{1}{il}\left[\pi^2\left(e^{il\pi} - e^{-il\pi}\right) - \frac{2}{il}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta \frac{d}{d\theta} e^{il\theta}\right] =$$

$$= \frac{2\pi^2}{l}\operatorname{sen}\pi l + \frac{2}{l^2}\left[\theta e^{il\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{il\theta}\right] =$$

$$= \frac{2\pi^2}{l}\operatorname{sen}\pi l + \frac{4\pi}{l^2}\underbrace{\cos\pi l}_{(-1)^l} - \frac{4}{l^3}\operatorname{sen}\pi l$$

ossia

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta^2 e^{il\theta} = \begin{cases} \frac{4\pi}{l^2}(-1)^l, & l \text{ intero}, l \neq 0 \\ \frac{2}{3}\pi^3, & l = 0 \end{cases}$$

Allora

$$\langle\theta^2\rangle = \frac{1}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta^2\left(1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} + \frac{1}{4}e^{2i\theta} + \frac{1}{4}e^{-2i\theta} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3\pi}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi^3 - 4\pi - 4\pi + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi\right)$$

e dunque $\boxed{\langle\theta^2\rangle = \frac{1}{3}\left(\pi^2 - \frac{15}{2}\right)}$

Si ha pertanto

$$\boxed{\Delta\theta = \left(\langle\theta^2\rangle - \langle\theta\rangle^2\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2}\right)^{1/2}}$$

(e) L'operatore $\dot{\theta}$ è definito dall'equazione

$$\boxed{\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,\theta]} \quad , \quad H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} \qquad (**)$$

Calcoliamo il commutatore tra H, ossia p_θ^2, e θ:

$$[p_\theta^2, \theta] = p_\theta^2\theta - \theta p_\theta^2 = p_\theta(p_\theta\theta - \theta p_\theta) - (\theta p_\theta - p_\theta\theta)p_\theta$$
$$= p_\theta[p_\theta,\theta] + [p_\theta,\theta]p_\theta$$

D'altra parte

$$[p_\theta,\theta] = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}\theta + i\hbar\theta\frac{\partial}{\partial\theta} = -i\hbar$$

Si ha pertanto

$$[p_\theta^2,\theta] = -2i\hbar p_\theta \rightarrow [H,\theta] = -i\hbar\frac{p_\theta}{mR^2}$$

L'eq. (**) fornisce allora

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \rightarrow \boxed{p_\theta = mR^2\dot{\theta}} \qquad (\star\star)$$

che è quanto volevamo dimostrare.

(f) Lo sviluppo (*) della f.d.o. $\psi(\theta)$ in autofunzioni del momento p_θ mostra che, nello stato iniziale, il valore medio di p_θ è

$$\langle p_\theta \rangle = \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot\hbar + \frac{1}{6}\cdot(-\hbar) = 0$$

Poiché $[H, p_\theta] = 0$, p_θ è una quantità conservata ed il suo valore medio è costante nel tempo. Si ha pertanto

$$\boxed{\langle p_\theta \rangle_t = 0}$$

da cui anche, in virtù dell'eq. (★★):

$$\boxed{\langle \dot{\theta} \rangle_t = \frac{d}{dt} \langle \theta \rangle_t = 0}$$

Nello stato in questione, dunque, il valore medio di θ resta costante nel tempo.

Per verificare esplicitamente questo risultato, determiniamo la f.d.o. al tempo generico t. Dall'eq. (★) si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(\theta)_t &= \sqrt{\frac{2}{3}}\, \varphi_0(\theta)\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} + \sqrt{\frac{1}{6}} \left(\varphi_1(\theta) + \varphi_{-1}(\theta)\right) e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \left(1 + e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} \cos\theta\right) \qquad (E_0 = 0) \end{aligned}}$$

Il valore medio di θ al tempo t vale dunque

$$\langle \theta \rangle_t = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta\, |\psi(\theta)_t|^2 = \frac{1}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \theta \left(1 + 2\cos\left(\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\cos\theta + \cos^2\theta\right) \Rightarrow \boxed{\langle \theta \rangle_t = 0}$$ <u>indipendente da t</u>

essendo l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto allo zero.

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
17 Gennaio 1997

ESERCIZIO N^O. 1 [OSCILLATORE ARMONICO]

Un oscillatore armonico lineare di massa m e pulsazione ω si trova al tempo $t = 0$ in uno stato tale che a) misurando l'osservabile $aa^\dagger$ si trovano solo i valori 1 e 3; b) il valore medio di $a^\dagger a$ è 1/2 e quello di $aa + a^\dagger a^\dagger$ è zero.

1) Determinare lo stato più generale che obbedisce a queste condizioni.

2) Calcolare in funzione del tempo il valore medio dell'energia potenziale.

3) Se un tale oscillatore si trova ad un dato istante nello stato la cui funzione d'onda è quella dello stato fondamentale di un oscillatore di uguale massa e pulsazione 2ω, qual è la probabilità che misurando l'energia a tale istante si trovi $\frac{1}{2}\hbar\omega$, cioè quella del suo stato fondamentale?

Si ricordi che la funzione d'onda dello stato fondamentale di un oscillatore armonico di massa m e pulsazione ω è:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\, x^2\right)$$

II ESONERO - ESERCIZIO N° 1

1) Dalla regola di commutazione $[a, a^+] = 1$ segue che l'operatore aa^+ è:

$$aa^+ = a^+a + 1 = N + 1$$

Poichè una misura di aa^+ può dare come risultato 1 o 3 lo stato del sistema al tempo $t=0$ deve essere della forma:

$$\boxed{|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|2\rangle}$$

La condizione $\langle a^+a\rangle = \frac{1}{2}$ implica

- $\langle\psi|a^+a|\psi\rangle = \langle\psi|a^+a\,(\alpha|0\rangle + \beta|2\rangle) = 2\beta\langle\psi|2\rangle = 2|\beta|^2 = \frac{1}{2}$

Mentre la condizione $\langle aa^+ + a^+a^+\rangle = 0$ comporta

- $\langle\psi|aa^+ + a^+a^+|\psi\rangle = \langle\psi|(aa^+ + a^+a^+)(\alpha|0\rangle + \beta|2\rangle) =$

$$= \langle\psi|(\sqrt{2}\beta|0\rangle + \sqrt{2}\alpha|2\rangle) = \sqrt{2}(\alpha^*\beta + \alpha\beta^*) =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\alpha^*\beta) = 0$$

Infine la condizione di normalizzazione dello stato dà:

- $\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Per i coefficienti α e β valgono dunque tre condizioni

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\beta^2| = 1/4 \\ \mathrm{Re}(\alpha^*\beta) = 0 \end{cases}$$

Scegliamo la fase arbitraria della f.d.o. richiedendo che

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0$$

La terza condizione fornisce allora $Re(\beta) = 0$, ossia β è immaginario puro e le prime due condizioni implicano

$$|\alpha|^2 = \frac{3}{4}, \quad |\beta|^2 = \frac{1}{4}$$

Troviamo allora per i coefficienti

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta = \pm \frac{i}{2}}$$

e lo stato al tempo $t=0$ è pertanto:

$$\boxed{|\psi(t=0)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle \pm \frac{i}{2}|2\rangle}$$

2) La f.d.o. al tempo generico t è

$$|\psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|0\rangle \pm \frac{i}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|2\rangle$$

con $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$.

Per calcolare il valore medio dell'energia potenziale esprimiamo l'operatore V in termini degli operatori a ed a^+

$$\hat{p} = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}, \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$\begin{cases} a = (\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2} \\ a^+ = (\hat{x} - i\hat{p})/\sqrt{2} \end{cases}$$

Si ha dunque:

$$V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \hat{x}^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega \hat{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega \left(\frac{a^+ + a}{\sqrt{2}}\right)^2 = +\frac{1}{4}\hbar\omega \left(a^+a^+ + aa + a^+a + aa^+\right) =$$

$$= +\frac{1}{4}\hbar\omega \left(a^+a^+ + aa + 2a^+a + 1\right)$$

Il valore medio di V è allora:

$$\langle V \rangle = +\frac{1}{4}\hbar\omega \langle \psi(t) | \left(a^+a^+ + aa + 2a^+a + 1\right) | \psi(t) \rangle$$

Tutti i termini sono stati già calcolati in precedenza per α e β arbitrari:

- $\langle \psi | (a^+a^+ + aa) | \psi \rangle = 2\sqrt{2}\, \mathrm{Re}(\alpha^* \beta) =$

$$= \pm 2\sqrt{2}\, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\, \mathrm{Re}\left(e^{\frac{i}{\hbar}E_0 t}\, i\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{Re}\left(i\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_0)t}\right) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{sen}\left(\frac{E_2 - E_0}{\hbar}\right)t =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{sen}(2\omega t)$$

- $\langle \psi | a^+a | \psi \rangle = 2|\beta|^2 = \frac{1}{2}$

- $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

Allora

$$\boxed{\langle \psi(t) | V | \psi(t) \rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega \left[2 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{sen}(2\omega t)\right]}$$

3) Al tempo dato lo stato dell'oscillatore è lo stato fondamentale di un oscillatore di uguale massa e pulsazione 2ω, ossia

$$\varphi(x) = \left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)$$

L'ampiezza di probabilità che in questo stato una misura di energia fornisca il valore $\frac{1}{2}\hbar\omega$ è

$$c_0 = \langle\psi_0|\varphi\rangle = 2^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} =$$

$$= 2^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{3m\omega}{2\hbar}x^2} =$$

$$= 2^{1/4}\left(\frac{\cancel{m\omega}}{\cancel{\pi\hbar}}\right)^{1/2}\left(\frac{2\cancel{\hbar}}{3\cancel{m\omega}}\right)^{1/2}\cancel{\pi}^{1/2} = 2^{1/4}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

La probabilità cercata è allora

$$\boxed{P = |c_0|^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

II ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
11 Gennaio 1999

ESERCIZIO N^O. 2 [OSCILLATORE ARMONICO]

Un oscillatore armonico di massa m e frequenza ω si trova, all'istante iniziale $t = 0$, in uno stato che non contiene stati più eccitati del secondo:

$$| \psi_0\rangle = \alpha \mid 0\rangle + \beta \mid 1\rangle + \gamma \mid 2\rangle$$

Si sa inoltre che il valore medio dell'energia è $\langle E\rangle = 3/4\ \hbar\omega$ e che il valore medio della posizione, ad un qualunque istante di tempo t successivo, è nullo ed indipendente dal tempo: $\langle x\rangle_t = \langle \psi_t \mid x \mid \psi_t\rangle = 0$.

a) Mostrare che le suddette condizioni non sono sufficienti a determinare univocamente lo stato iniziale $| \psi_0\rangle$ e derivare l'espressione più generale risultante per tale stato.

b) Individuare una possibile misura di un'osservabile fisica che consenta di determinare completamente lo stato $| \psi_0\rangle$, dimostrandone l'efficacia in tal senso.

c) <u>FACOLTATIVO:</u> l'indipendenza dal tempo del valore medio di x sullo stato $| \psi_t\rangle$ implica:

$$\frac{d}{dt}\langle \psi_t \mid x \mid \psi_t\rangle \equiv \langle \psi_t \mid \frac{dx}{dt} \mid \psi_t\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle \psi_t \mid [H, x] \mid \psi_t\rangle = 0$$

Esprimendo l'operatore dx/dt in termini degli operatori di creazione e distruzione, a ed $a^\dagger$, dimostrare che vale l'equazione del moto:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

dove p è l'operatore impulso, e che il valore medio di tale operatore sullo stato $| \psi_t\rangle$ è effettivamente nullo.

Esercizio 2

a) Lo stato del sistema, al tempo $t=0$ ed al tempo t generico hanno la forma

$$|\psi(0)\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle + \gamma(t)|2\rangle =$$
$$= \alpha e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}|0\rangle + \beta e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}|1\rangle + \gamma e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}|2\rangle$$

La condizione di normalizzazione dello stato è:

$$1 = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle \Rightarrow \boxed{1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2} \qquad (*)$$

mentre la condizione sul valore medio dell'energia fornisce

$$\langle E\rangle = \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle =$$
$$= |\alpha|^2 E_0 + |\beta|^2 E_1 + |\gamma|^2 E_2 =$$
$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{3}{2}|\beta|^2 + \frac{5}{2}|\gamma|^2\right) = \frac{3}{4}\hbar\omega$$

ossia

$$\boxed{|\alpha|^2 + 3|\beta|^2 + 5|\gamma|^2 = \frac{3}{2}} \qquad (**)$$

Per calcolare il valore medio di x, introduciamo gli operatori a ed a^+:

$$\begin{cases} a = \hat{x} + i\hat{p} \\ a^+ = \hat{x} - i\hat{p} \end{cases} \qquad \hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x \qquad \hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, p$$

Si ha allora

$$\langle x \rangle_t = \langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \langle \psi(t) | \hat{x} | \psi(t) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \langle \psi(t) | (a + a^+) | \psi(t) \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\, \mathrm{Re}\left(\langle \psi(t) | a | \psi(t) \rangle \right)$$

Utilizzando le relazioni

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle \\ a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle \end{cases}$$

si ottiene:

$$\langle x \rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\, \mathrm{Re}\left[\langle \psi(t) | a \left(\alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle + \gamma(t)|2\rangle \right) \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\, \mathrm{Re}\left[\langle \psi(t) | \left(\beta(t)|0\rangle + \sqrt{2}\, \gamma(t)|1\rangle \right) \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\, \mathrm{Re}\left[\alpha^*(t)\beta(t) + \sqrt{2}\, \beta^*(t)\gamma(t) \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\, |\beta| \left[|\alpha| \cos(\phi_\beta(t) - \phi_\alpha(t)) + \sqrt{2}\, |\gamma| \cos(\phi_\gamma(t) - \phi_\beta(t)) \right]$$

dove si sono introdotte le fasi dei coefficienti:

$$\begin{cases} \phi_\alpha(t) = \phi_\alpha + \dfrac{E_0 t}{\hbar} \\ \phi_\beta(t) = \phi_\beta + \dfrac{E_1 t}{\hbar} \\ \phi_\gamma(t) = \phi_\gamma + \dfrac{E_2 t}{\hbar} \end{cases}$$

Dunque

$$\boxed{\langle x \rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\, |\beta| \left[|\alpha| \cos(\phi_\beta - \phi_\alpha + \omega t) + \right. \\ \left. + \sqrt{2}\, |\gamma| \cos(\phi_\gamma - \phi_\beta + \omega t) \right]}$$

La richiesta $\langle x \rangle_t = 0$, a qualunque tempo t, ammette due possibili soluzioni:

1) $|\beta| = 0$

2) $|\alpha| = |\gamma| = 0$

La seconda di queste due soluzioni è tuttavia in contraddizione con le condizioni (*) e (**) e deve dunque essere scartata. La prima delle due soluzioni, invece, unitamente alle condizioni (*) e (**) fornisce

$$\begin{cases} |\beta| = 0 \\ |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \\ |\alpha|^2 + 5|\gamma|^2 = 3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\beta| = 0 \\ 4|\alpha|^2 = 7/2 \\ 4|\gamma|^2 = 1/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad |\alpha| = \sqrt{7/8}, \quad |\beta| = 0, \quad |\gamma| = \sqrt{1/8}$

Una fase arbitraria nella f.d.o. può essere fissata richiedendo α reale e positivo. Lo stato più generale che soddisfa alle condizioni suddette è allora:

$$\boxed{|\psi\rangle = \sqrt{\frac{7}{8}}\,|0\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{8}}\,|2\rangle}$$

La fase ϕ resta indeterminata.

b) Una possibile misura che consente di determinare ϕ, e dunque lo stato $|\psi\rangle$ è, ad esempio, il valore medio di x^2 al tempo $t=0$. Si ha infatti

$$x^2 = \left(\frac{2\hbar}{m\omega}\right)\hat{x}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2\hbar}{m\omega}\right)(a+a^+)^2 =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)(a^2 + a^{+2} + aa^+ + a^+a) =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)(a^2 + a^{+2} + 2a^+a + 1)$$

Per il calcolo del valor medio si può utilizzare:

- $\langle\psi|a^2|\psi\rangle = \langle\psi|a^2(\alpha|0\rangle + \gamma|2\rangle) = \sqrt{2}\,\gamma\,\langle\psi|0\rangle =$
$= \sqrt{2}\,\alpha^*\gamma$

- $\langle\psi|a^{+2}|\psi\rangle = (\langle\psi|a^2|\psi\rangle)^* = \sqrt{2}\,\alpha\gamma^*$
- $\langle\psi|(2a^+a+1)|\psi\rangle = \langle\psi|(2a^+a+1)(\alpha|0\rangle+\gamma|2\rangle) =$

$$= \langle\psi|(\alpha|0\rangle + 5\gamma|2\rangle) = |\alpha|^2 + 5|\gamma|^2$$

e dunque

$$\langle\psi|x^2|\psi\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left[\sqrt{2}(\alpha^*\gamma+\alpha\gamma^*) + |\alpha|^2 + 5|\gamma|^2\right] =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left[|\alpha|^2 + 5|\gamma|^2 + 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\alpha^*\gamma)\right] =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left[\frac{3}{2} + 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{7}}{8}\cos\phi\right]$$

Una misura di x^2 equivale pertanto ad una misura di ϕ.

c) Calcoliamo l'operatore dx/dt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,x] = \frac{i}{\hbar}\hbar\omega\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,[\hat{H},\hat{x}] =$$

$$= i\sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}}\left[a^+a+\frac{1}{2},\ \frac{a+a^+}{2}\right] =$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}}\left([a^+a,a] + [a^+a,a^+]\right)$$

Utilizzando la regola di commutazione

$$[a,a^+] = aa^+ - a^+a = 1$$

calcoliamo i due commutatori:

$$[a^+a, a] = a^+aa - aa^+a = a^+aa - (a^+a+1)a = -a$$

$$[a^+a, a^+] = a^+aa^+ - a^+a^+a = a^+aa^+ - a^+(aa^+-1) = a^+$$

dunque

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}}(-a+a^+) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}}(a-a^+)$$

ossia

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}}\left(\frac{a-a^+}{2i}\right) = \frac{p}{m}}$$

A qualunque istante di tempo t si ha

$$\langle\psi(t)|\frac{dx}{dt}|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}}\langle\psi(t)|\frac{a-a^+}{2i}|\psi(t)\rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}}\,\mathrm{Im}\left(\langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}}\,\mathrm{Im}\left[\left(\langle 0|\alpha(t)^* + \langle 2|\gamma(t)^*\right) a \left(\alpha(t)|0\rangle + \gamma(t)|2\rangle\right)\right]$$

$$= 0$$

ossia

$$\boxed{\langle\psi(t)|\frac{dx}{dt}|\psi(t)\rangle = 0}$$

come richiesto

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
5 Febbraio 2001

ESERCIZIO N^O. 2
[OSCILLATORE ARMONICO BIDIMENSIONALE E TEORIA DELLE PERTURBAZIONI]

Una particella di massa m e priva di spin è vincolata a muoversi in due dimensioni soggetta ad un potenziale centrale di tipo armonico. L'hamiltoniana che descrive la particella è pertanto:

$$H = \frac{p_x^2}{2\,m} + \frac{p_y^2}{2\,m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2\,(x^2 + y^2)$$

La particella si trova in uno stato tale che: 1) una misura dell'energia fornisce con certezza il risultato $E = 2\,\hbar\,\omega$; 2) il valore medio dell'operatore $\widehat{A} = x\,y$ è uguale ad $\hbar/(2\,m\,\omega)$; 3) il valore medio dell'operatore $\widehat{B} = x^2 - y^2$ è nullo.

a) Determinare lo stato della particella.

b) Si supponga di aggiungere all'hamiltoniana una perturbazione della forma $V = \lambda\,\widehat{B}$. Calcolare le correzioni al primo ordine in λ agli autovalori dell'energia dello stato fondamentale e del primo livello eccitato, discutendo l'eventuale rimozione della degenerazione.

c) Calcolare le espressioni esatte dei suddetti autovalori e confrontare i risultati con quelli ottenuti in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO N° 2

a) Cerchiamo lo stato iniziale come combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniana. Poiché questa può essere scomposta nella somma di di due termini indipendenti

$$\boxed{H = H_x + H_y}, \qquad H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 z_i^2$$

ciascuno dei quali rappresenta l'hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale, i corrispondenti autostati di H possono essere scritti come prodotto di autostati di H_x ed H_y:

$$\boxed{|n_x, n_y\rangle = |n_x\rangle |n_y\rangle}$$

dove

$$H_x|n_x\rangle = (n_x + \tfrac{1}{2})\hbar\omega, \qquad H_y|n_y\rangle = (n_y + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Gli autovalori corrispondenti a questi stati sono la somma degli autovalori di H_x ed H_y:

$$\boxed{E_{n_x, n_y} = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega}$$

Lo stato iniziale è autostato dell'hamiltoniana con autovalore $2\hbar\omega$. Questo implica $n_x + n_y = 1$, che ammette due soluzioni:

1) $n_x = 1,\ n_y = 0$, 2) $n_x = 0,\ n_y = 1$

Lo stato iniziale $|\psi\rangle$ è pertanto combinazione lineare di due autostati (degeneri) di H:

$$\boxed{|\psi\rangle = \alpha|1,0\rangle + \beta|0,1\rangle}$$

Richiediamo che il valore medio dell'operatore $\hat{A}$ su questo stato sia pari ad $\hbar/2m\omega$:

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \left(\alpha^*\langle 1,0| + \beta^*\langle 0,1|\right) xy \left(\alpha|1,0\rangle + \beta|0,1\rangle\right) =$$

$$= |\alpha|^2\langle 1,0|xy|1,0\rangle + |\beta|^2\langle 0,1|xy|0,1\rangle +$$

$$+ \alpha^*\beta\langle 1,0|xy|0,1\rangle + \alpha\beta^*\langle 0,1|xy|1,0\rangle =$$

$$= |\alpha|^2\langle 1|x|1\rangle\langle 0|y|0\rangle + |\beta|^2\langle 0|x|0\rangle\langle 1|y|1\rangle +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\left[\alpha\beta^*\langle 0|x|1\rangle\langle 1|y|0\rangle\right]$$

Calcoliamo gli elementi di matrice che compaiono in questa espressione utilizzando gli operatori a ed a^+. Nel caso di "x" si ha:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \\ a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}) \end{cases} \qquad \hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \qquad \hat{p} = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}$$

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^+|n-1\rangle = \sqrt{n}\,|n\rangle \end{cases}$$

Valgono allora le seguenti relazioni:

- $\langle 0|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\langle 0|\hat{x}|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 0|(a+a^+)|0\rangle = 0$
- $\langle 1|x|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 1|(a+a^+)|1\rangle = 0$
- $\langle 0|x|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 0|(a+a^+)|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$
- $\langle 1|x|0\rangle = (\langle 0|x|1\rangle)^* = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$

Analoghe relazioni valgono evidentemente per l'oscillatore in y. Quindi

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = 2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta^*)\cdot\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\hbar}{m\omega}\,\mathrm{Re}(\alpha\beta^*)$$

La condizione $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \hbar/2m\omega$ implica allora

$$\boxed{\mathrm{Re}(\alpha\beta^*) = \frac{1}{2}}$$

Calcoliamo poi il valore medio dell'operatore $\hat{B}$:

$$\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle = (\alpha^*\langle 1,0| + \beta^*\langle 0,1|)(x^2-y^2)(\alpha|1,0\rangle + \beta|0,1\rangle) =$$

$$= |\alpha|^2\langle 1,0|(x^2-y^2)|1,0\rangle + |\beta|^2\langle 0,1|(x^2-y^2)|0,1\rangle +$$

$$+ \alpha^*\beta\,\langle 1,0|x^2-y^2|0,1\rangle + \alpha\beta^*\langle 0,1|(x^2-y^2)|1,0\rangle =$$

$$= |\alpha|^2\left(\langle 1|x^2|1\rangle - \langle 0|y^2|0\rangle\right) +$$

$$+ |\beta|^2\left(\langle 0|x^2|0\rangle - \langle 1|y^2|1\rangle\right) =$$

$$= \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)\left(\langle 1|x^2|1\rangle - \langle 0|y^2|0\rangle\right) \qquad (\star)$$

Calcoliamo gli elementi di matrice:

- $\langle 0|x^2|0\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|(a+a^+)^2|0\rangle =$

$= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|(a^2+a^{+2}+aa^+ + a^+a)|0\rangle =$ $\qquad (aa^+ - a^+a = 1)$

$= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|(a^2+a^{+2}+2a^+a+1)|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$

- $\langle 1|x^2|1\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 1|(a^2+a^{+2}+2a^+a+1)|1\rangle = \frac{3\hbar}{2m\omega}$

Si ottiene allora

$$\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \qquad (\star\star)$$

La condizione $\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle = 0$ implica quindi

$$\boxed{|\alpha|^2 = |\beta|^2}$$

Infine c'è la condizione di normalizzazione $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ che implica

$$\boxed{|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1}$$

Raccogliendo tutte le condizioni abbiamo:

$$\begin{cases} |\alpha|^2 = |\beta|^2 \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ \mathrm{Re}(\alpha\beta^*) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{Re}(\alpha\beta^*) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Scegliendo per convenzione α reale e positivo (ossia $\alpha = 1/\sqrt{2}$) troviamo che $Re(\beta) = 1/\sqrt{2} = |\beta|$ ossia anche β è reale e positivo. Quindi

$$\boxed{\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

e lo stato della particella è

$$\boxed{|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,1\rangle\right)}$$

b) Aggiungiamo la perturbazione $V = \lambda \hat{B}$. Lo stato fondamentale del sistema, $|0,0\rangle$, è non degenere e la correzione all'autovalore di energia, al primo ordine in λ, è data da:

$$\Delta E_{00} = \langle 0,0|V|0,0\rangle = \lambda \langle 0,0|(x^2 - y^2)|0,0\rangle =$$

$$= \lambda\left(\langle 0|x^2|0\rangle - \langle 0|y^2|0\rangle\right) = 0$$

Pertanto, in presenza della perturbazione,

$$\boxed{E_{00} = \hbar\omega + O(\lambda^2)}$$

ossia la correzione al primo ordine risulta nulla.

Il primo livello eccitato del sistema, E_{10},

in assenza della perturbazione è due volte degenere ed una possibile scelta di autostati ortogonale è quella degli stati $|1,0\rangle$ e $|0,1\rangle$. In questa base dobbiamo calcolare gli elementi della matrice

$$V = \lambda \begin{pmatrix} \langle 1,0|\hat{B}|1,0\rangle & \langle 1,0|B|0,1\rangle \\ \langle 0,1|\hat{B}|1,0\rangle & \langle 0,1|B|0,1\rangle \end{pmatrix}$$

Questi sono stati già calcolati in precedenza (vedi eq. (✪) e (✪✪)). Si ha:

$$V = \frac{\lambda \hbar}{m\omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nella base scelta la matrice V è diagonale. Pertanto gli elementi di matrice diagonali coincidono con gli autovalori e rappresentano le correzioni, al primo ordine in λ, al livello imperturbato.

$$\boxed{\begin{aligned} E_{10} &= 2\hbar\omega \left(1 + \frac{\lambda}{2m\omega^2} + O(\lambda^2)\right) \\ E_{01} &= 2\hbar\omega \left(1 - \frac{\lambda}{2m\omega^2} + O(\lambda^2)\right) \end{aligned}}$$

c) Calcoliamo infine gli autovalori esatti. Questo è estremamente semplice, giacché l'hamiltoniana totale $H+V$ è ancora la somma di

due hamiltoniane di oscillatore armonico unidimensionale:

$$H+V = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \lambda(x^2-y^2) =$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(1+\frac{2\lambda}{m\omega^2}\right)x^2 +$$

$$+ \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(1-\frac{2\lambda}{m\omega^2}\right)y^2$$

I due oscillatori hanno frequenze

$$\boxed{\omega_x = \omega\sqrt{1+\frac{2\lambda}{m\omega^2}}}, \quad \boxed{\omega_y = \omega\sqrt{1-\frac{2\lambda}{m\omega^2}}}$$

le energie esatte dei livelli $|0,0\rangle$, $|1,0\rangle$ e $|0,1\rangle$ sono:

$$\boxed{\begin{aligned} E_{00} &= \frac{1}{2}\hbar\omega_x + \frac{1}{2}\hbar\omega_y = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\sqrt{1+\frac{2\lambda}{m\omega^2}} + \sqrt{1-\frac{2\lambda}{m\omega^2}}\right) \\ E_{10} &= \frac{3}{2}\hbar\omega_x + \frac{1}{2}\hbar\omega_y = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(3\sqrt{1+\frac{2\lambda}{m\omega^2}} + \sqrt{1-\frac{2\lambda}{m\omega^2}}\right) \\ E_{01} &= \frac{1}{2}\hbar\omega_x + \frac{3}{2}\hbar\omega_y = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\sqrt{1+\frac{2\lambda}{m\omega^2}} + 3\sqrt{1-\frac{2\lambda}{m\omega^2}}\right) \end{aligned}}$$

Sviluppando queste espressioni al primo ordine in λ e ricordando che $\sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{1}{2}x$ per piccoli x si ottiene:

$$\boxed{\begin{aligned} E_{00} &\simeq \frac{1}{2}\hbar\omega\left(2 + O(\lambda^2)\right) \\ E_{10} &\simeq \frac{1}{2}\hbar\omega\left(4 + \frac{2\lambda}{m\omega^2} + O(\lambda^2)\right) \\ E_{01} &\simeq \frac{1}{2}\hbar\omega\left(4 - \frac{2\lambda}{m\omega^2} + O(\lambda^2)\right) \end{aligned}}$$

che coincidono con i risultati ottenuti dalla teoria delle perturbazioni.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
23 Settembre 1998

ESERCIZIO N^O. 2
[PARTICELLA SU UNA CIRCONFERENZA E TEORIA DELLE PERTURBAZIONI]

Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi in una circonferenza di centro nell'origine e raggio a. L'unica coordinata del sistema è quindi l'angolo φ compreso tra il raggio vettore della particella e l'asse delle x.

L'Hamiltoniana del sistema è:

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2\,ma^2} = -\frac{\hbar^2}{2\,ma^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}$$

a) Determinare autovalori ed autofunzioni di questa Hamiltoniana ed il relativo grado di degenerazione.

b) Si suppone che la particella abbia una carica q e sia sottoposta ad un campo elettrico $\mathcal{E}$ uniforme e parallelo all'asse x. All'Hamiltoniana H si aggiunge quindi la perturbazione

$$V = -q\,\mathcal{E}a\cos\varphi$$

Calcolare, al primo ordine in $\mathcal{E}$, l'energia dello stato fondamentale del sistema.

c) Si supponga nullo il campo elettrico e che all'istante $t = 0$ lo stato sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\varphi) = N\cos^2\varphi$$

dove N è una costante di normalizzazione. Determinare la funzione d'onda all'istante t generico.

ESERCIZIO N° 2

a) Consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$H\psi(\varphi) = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = E\psi(\varphi)$$

le soluzioni di questa equazione sono onde piane della forma

$$\psi_\ell(\varphi) = A_\ell\, e^{i\ell\varphi}$$

con

$$\boxed{E_\ell = \frac{\hbar^2\ell^2}{2ma^2}}$$

La richiesta di univocità della f.d.o. comporta che $\psi_\ell(\varphi) = \psi_\ell(\varphi+2\pi)$, ossia

$$\boxed{\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

Gli autovalori dell'energia sono pertanto due volte degeneri, $E_\ell = E_{-\ell}$, con l'eccezione del livello fondamentale E_0. La normalizzazione della f.d.o.:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, |\psi_\ell(\varphi)|^2 = 1$$

implica infine $A_\ell = 1/\sqrt{2\pi}$. Dunque

$$\boxed{\psi_l(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi}}$$

b) Lo spostamento del livello fondamentale E_0, al primo ordine nel campo elettrico E, è dato da

$$\Delta E_0 = \langle \psi_0 | V | \psi_0 \rangle = -qEa \langle \psi_0 | \cos\varphi | \psi_0 \rangle =$$

$$= -qEa \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi = 0$$

ossia

$$\boxed{\Delta E_0 = 0}$$

c) La f.d.o. al tempo $t=0$ può essere scritta come:

$$\psi(0) = N \cos^2\varphi = N \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} N \left(e^{2i\varphi} + 2 + e^{-2i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} N \sqrt{2\pi} \left(\psi_2(\varphi) + 2\psi_0(\varphi) + \psi_{-2}(\varphi)\right)$$

ossia è una combinazione lineare di autostati dell'energia con $l = 0, \pm 2$

La f.d.o. al tempo t è allora:

$$\boxed{\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\psi_2 + 2e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}\psi_0 + e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\psi_{-2}\right)}$$

III ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
30 Gennaio 1998

ESERCIZIO N^O. 1 [MOMENTO ANGOLARE ORBITALE]

Un rotatore quantistico con momento di inerzia I è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{L^2}{2I} + gBL_z$$

dove $\vec{B}$ è il modulo di un campo magnetico diretto lungo l'asse z e $g\vec{L}$ il momento magnetico del rotatore.

All'istante $t = 0$ il rotatore si trova in un autostato di L^2 con autovalore $2\hbar^2$ ed in un autostato di $(L_x + L_z)/\sqrt{2}$ con autovalore $+\hbar$.

a) Determinare lo stato del rotatore al tempo generico $t > 0$.

b) Calcolare il valore medio dell'energia ed il valore medio di L_x in funzione del tempo.

Esercizio n° 1

a) Poiché il rotatore si trova al tempo iniziale in uno stato con $l = 1$, esprimiamo tale stato come combinazione lineare dei tre autostati di L^2 ed L_z, con $l_z = 0, \pm 1$:

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = \alpha|1,1\rangle + \beta|1,0\rangle + \gamma|1,-1\rangle}$$

Per imporre la condizione che $|\psi(0)\rangle$ sia anche autostato dell'operatore $O_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x + L_z)$ con autovalore $+\hbar$ utilizziamo gli operatori $L_\pm$:

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \qquad \hat{L}_+|l,m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,|l,m+1\rangle$$

$$(L = \hbar\hat{L}) \qquad \hat{L}_-|l,m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\,|l,m-1\rangle$$

Si ha allora: $O_{xz}|\psi(0)\rangle = \hbar|\psi(0)\rangle$ ossia:

$$O_{xz}|\psi(0)\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\hat{L}_x + \hat{L}_z)|\psi(0)\rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}(\hat{L}_+ + \hat{L}_- + 2\hat{L}_z)|\psi(0)\rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\Big[\alpha\left(\sqrt{2}|1,0\rangle + 2|1,1\rangle\right) + \beta\left(\sqrt{2}|1,1\rangle + \sqrt{2}|1,-1\rangle\right) +$$

$$+ \gamma\left(\sqrt{2}|1,0\rangle - 2|1,-1\rangle\right)\Big] =$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\Big[\left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)|1,1\rangle + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)|1,0\rangle +$$

$$+ \left(-\gamma + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)|1,-1\rangle\Big] =$$

$$= \hbar|\psi(0)\rangle = \hbar\left(\alpha|1,1\rangle + \beta|1,0\rangle + \gamma|1,-1\rangle\right)$$

Otteniamo dunque il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{2} = \alpha \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \beta \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{2} = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\,\alpha + \beta = 2\alpha \\ \alpha + \gamma = 2\beta \\ -\sqrt{2}\,\gamma + \beta = 2\gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2-\sqrt{2})\alpha - \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ (2+\sqrt{2})\gamma - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2-\sqrt{2}} \\ \gamma = \frac{\beta}{2+\sqrt{2}} \end{cases}$$

[Il sistema è compatibile: si ha infatti

$$\alpha + \gamma = \frac{\beta}{2-\sqrt{2}} + \frac{\beta}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}\beta = \frac{4}{4-2}\beta = 2\beta]$$

Il valore di β è determinato dalla condizione di normalizzazione:

$$1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = |\beta|^2\left(\frac{1}{(2-\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2} + 1\right) =$$

$$= \frac{(2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2 + (2+\sqrt{2})^2(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})^2(2+\sqrt{2})^2}\,|\beta|^2 =$$

$$= \frac{4+2+\cancel{4\sqrt{2}}+4+2-\cancel{4\sqrt{2}}+(4-2)^2}{(4-2)^2}\,|\beta|^2 = \frac{16}{4}|\beta|^2 = 4|\beta|^2$$

ossia

$$|\beta| = \frac{1}{2}$$

Scegliendo β reale e positivo si ha che lo stato al tempo $t=0$ è dunque:

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2(2-\sqrt{2})}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle + \frac{1}{2(2+\sqrt{2})}|1,-1\rangle}$$

L'autovalore dell'energia corrispondente al generico autostato $|l, l_z\rangle$ è:

$$H|l, l_z\rangle = \left(\frac{L^2}{2I} + gBL_z\right)|l, l_z\rangle =$$

$$= \left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} + gB\hbar l_z\right)|l, l_z\rangle$$

In particolare si ha dunque

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{I} + gB\hbar \,, \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{I} \,, \quad E_{-1} = \frac{\hbar^2}{I} - gB\hbar$$

e lo stato del sistema al tempo t risulta:

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hbar t}{I}}\left(\frac{e^{-igBt}}{2(2-\sqrt{2})}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle + \frac{e^{igBt}}{2(2+\sqrt{2})}|1,-1\rangle\right)}$$

Il fattore di fase moltiplicativo $e^{-i\hbar t/I}$ è irrilevante e, a ciascun istante di tempo dato, può essere rimosso via.

b) Il valore medio dell'Hamiltoniana è indipendente dal tempo e può essere calcolato semplicemente come:

$$\langle H\rangle = \sum_k |c_k|^2 E_k = |c_1|^2 E_1 + |c_0|^2 E_0 + |c_{-1}|^2 E_{-1} =$$

$$= \frac{1}{4(2-\sqrt{2})^2}\left(\frac{\hbar^2}{I} + gB\hbar\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\hbar^2}{I}\right) + \frac{1}{4(2+\sqrt{2})^2}\left(\frac{\hbar^2}{I} - gB\hbar\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{I} + \frac{gB\hbar}{4}\left(\frac{1}{(2-\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{I} + \frac{gB\hbar}{4}\left(\frac{(2+\sqrt{2})^2 - (2-\sqrt{2})^2}{((2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}))^2}\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{I} + \frac{1}{4}gB\hbar\left(\frac{4+2+4\sqrt{2}-4-2+4\sqrt{2}}{(4-2)^2}\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{I} + \frac{gB\hbar}{4}\frac{8\sqrt{2}}{4} = \frac{\hbar^2}{I} + \frac{1}{\sqrt{2}}gB\hbar$$

ossia

$$\boxed{\langle H\rangle = \frac{\hbar^2}{I} + \frac{1}{\sqrt{2}}gB\hbar}$$

Calcoliamo ora il valore medio di L_x:

$$\langle L_x\rangle = \langle\psi(t)|L_x|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\langle\psi(t)|(\hat{L}_+ + \hat{L}_-)|\psi(t)\rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\langle\psi(t)|(\hat{L}_+ + \hat{L}_-)\left(\frac{e^{-igBt}}{2(2-\sqrt{2})}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle + \frac{e^{igBt}}{2(2+\sqrt{2})}|1,-1\rangle\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{4}\langle\psi(t)|\left(\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}e^{-igBt}|1,0\rangle + \sqrt{2}|1,1\rangle + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2}|1,-1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}e^{igBt}|1,0\rangle\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\langle\psi(t)|\left[|1,1\rangle + \left(\frac{e^{igBt}}{2+\sqrt{2}} + \frac{e^{-igBt}}{2-\sqrt{2}}\right)|1,0\rangle + \right.$$

$$\left. + |1,-1\rangle\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(\frac{e^{igBt}}{2(2-\sqrt{2})} + \frac{e^{igBt}}{2(2+\sqrt{2})} + \frac{e^{-igBt}}{2(2-\sqrt{2})} + \frac{e^{-igBt}}{2(2+\sqrt{2})} \right) =$$

$$= \frac{\hbar}{4\sqrt{2}} \left(e^{igBt} + e^{-igBt} \right) \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \cos(gBt) \left(\frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{4-2} \right) = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} 2 \cos(gBt)$$

ossia

$$\boxed{\langle L_x \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \cos(gBt)}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
9 Gennaio 2007

ESERCIZIO N^O. 2 [MOMENTO ANGOLARE ORBITALE]

Un rotatore quantistico è descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_1 \left(\frac{L^2}{\hbar^2}\right) + \hbar\omega_2 \left(\frac{L_z}{\hbar}\right)$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore di momento angolare orbitale.

a) Determinare lo spettro degli autovalori dell'energia e le corrispondenti autofunzioni. Assumendo quindi $\omega_2 \ll \omega_1$, indicare quali sono i primi 9 livelli energetici del sistema.

All' istante iniziale $t = 0$ la particella si trova in un autostato del momento angolare orbitale corrispondente ad $l = 1$ e descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(\theta, \varphi; t = 0) = A \,\mathrm{sen}\theta \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

dove A è una costante di normalizzazione.

b) Determinare a quale istante di tempo $t^* > 0$ la funzione d'onda del rotatore diventa proporzionale, a meno di un fattore di fase irrilevante, alla funzione

$$\psi(\theta, \varphi; t^*) = A \,\mathrm{sen}\theta \,\cos\varphi$$

c) Mostrare che le funzioni d'onda $\psi(\theta, \varphi; 0)$ e $\psi(\theta, \varphi; t^*)$ sono autofunzioni rispettivamente degli operatori L_y ed L_x e determinarne i corrispondenti autovalori.

d) Determinare, in funzione del tempo generico $t > 0$, la probabilità che una misura di L_x fornisca come risultato $m_x = 0$ ed il valore medio di L_x.

Si ricorda che le armoniche sferiche $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ corrispondenti all'autovalore $l = 1$ sono:

$$Y_{1,\pm1}(\theta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\, e^{\pm i\varphi} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta$$

Esercizio N° 2

a) Poiché l'Hamiltoniana commuta con gli operatori L^2 ed L_z, le sue autofunzioni coincidono con le armoniche sferiche $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$. I corrispondenti autovalori sono determinati dall'equazione agli autovalori

$$H Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \left[\frac{1}{2}\hbar\omega_1 \left(\frac{L^2}{\hbar^2}\right) + \hbar\omega_2 \left(\frac{L_z}{\hbar}\right)\right] Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\hbar\omega_1 \ell(\ell+1) + \hbar\omega_2 m\right] Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

Dunque gli autovalori di H sono:

$$\boxed{E(\ell,m) = \frac{1}{2}\ell(\ell+1)\hbar\omega_1 + m\hbar\omega_2}$$

È evidente che per $\omega_2 \ll \omega_1$ l'ordine dei livelli è determinato dai valori crescenti di ℓ. Si hanno dunque i seguenti livelli più bassi:

$$E(0,0) = 0 \qquad 1$$

$$E(1,m) = \hbar\omega_1 + m\hbar\omega_2 = \begin{cases} \hbar(\omega_1-\omega_2) & 2 \\ \hbar\omega_1 & 3 \\ \hbar(\omega_1+\omega_2) & 4 \end{cases}$$

$$E(2,m) = 3\hbar\omega_1 + m\hbar\omega_2 = \begin{cases} 3\hbar\omega_1 - 2\hbar\omega_2 & 5 \\ 3\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 & 6 \\ 3\hbar\omega_1 & 7 \\ 3\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 & 8 \\ 3\hbar\omega_1 + 2\hbar\omega_2 & 9 \end{cases}$$

. . . . . .

b) Per determinare l'evoluzione temporale dello stato dobbiamo scomporre la f.d.o. iniziale come combinazione lineare di autofunzioni dell'Hamiltoniana, ossia di armoniche sferiche. Si ha

$$\psi(\theta,\varphi;t=0) = A \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi = \frac{A}{2i} \operatorname{sen}\theta \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{A}{2i}\left(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\, Y_{1,1}(\theta,\varphi) - \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\, Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right) =$$

$$= iA\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_{1,1}(\theta,\varphi) + Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right) \qquad (\bullet)$$

Questo risultato determina tra l'altro il valore della costante di normalizzazione A, giacchè si deve avere

$$\left|iA\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\right|^2 \cdot 2 = |A|^2 \frac{4\pi}{3} = 1 \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

ossia, scegliendo A reale e positivo:

$$A = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

La f.d.o. al tempo $t=0$ è dunque

$$\psi(\theta,\varphi;t=0) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(Y_{1,1}(\theta,\varphi) + Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right)$$

Applichiamo ora l'operatore di evoluzione temporale per determinare la f.d.o. al tempo generico $t>0$:

$$\psi(\theta,\varphi;t) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}E(1,1)t}\, Y_{1,1}(\theta,\varphi) + e^{-\frac{i}{\hbar}E(1,-1)t}\, Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right] =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\, Y_{1,1}(\theta,\varphi) + e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\, Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right) =$$

$$= \frac{i\, e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}}{\sqrt{2}}\left[Y_{1,1}(\theta,\varphi) + e^{2i\omega_2 t}\, Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right] \quad (\bullet\bullet)$$

Per determinare il tempo t^*, esplicitiamo nella f.d.o. la dipendenza dagli angoli θ e φ:

$$\psi(\theta,\varphi;t) = \frac{-i\, e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\left(e^{i\varphi} - e^{2i\omega_2 t}\, e^{-i\varphi}\right)$$

$$= -e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\, i\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\left[\left(1 - e^{2i\omega_2 t}\right)\cos\varphi + \right.$$

$$\left. + i\left(1 + e^{2i\omega_2 t}\right)\mathrm{sen}\,\varphi\right] =$$

$$= e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\, A\,\mathrm{sen}\,\theta\left[\frac{\left(1 - e^{2i\omega_2 t}\right)}{2i}\cos\varphi + \frac{\left(1 + e^{2i\omega_2 t}\right)}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right]$$

Vediamo dunque che il tempo cercato t^* è quello per il quale il coefficiente del termine in $\mathrm{sen}\,\varphi$ della f.d.o. si annulla, ossia

$$e^{2i\omega_2 t^*} = -1 \Rightarrow 2\omega_2 t^* = \pi$$

e dunque

$$\boxed{t^* = \frac{\pi}{2\omega_2}}$$

Al tempo t^* infatti la f.d.o. si riduce a

$$\psi(\theta,\varphi;t^*) = -i\, e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\, A \sin\theta \cos\varphi$$

che coincide, a meno di un fattore di fase, con la f.d.o. richiesta.

c) Verifichiamo che la f.d.o. al tempo $t=0$ è autostato dell'operatore L_y. Applicando L_y alla $\psi(\theta,\varphi;t=0)$ si trova (vedi eq. (•)):

$$L_y \psi(\theta,\varphi;t=0) = \frac{(L_+ - L_-)}{2i} \frac{i}{\sqrt{2}} (Y_{11} + Y_{1,-1}) =$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(-\sqrt{2}\, Y_{10} + \sqrt{2}\, Y_{1,0}\right) = 0$$

$\psi(\theta,\varphi;t=0)$ è pertanto un autostato di L_y con autovalore

$$\boxed{m_y = 0}$$

Verifichiamo ora che la f.d.o. al tempo t^* è autostato dell'operatore L_x (vedi eq. (••)):

$$L_x \psi(\theta,\varphi;t^*) = \frac{(L_+ + L_-)}{2} \frac{i}{\sqrt{2}} (Y_{11} - Y_{1,-1}) =$$

$$= \frac{i\hbar}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\, Y_{10} - \sqrt{2}\, Y_{10}\right) = 0$$

$\psi(\theta,\varphi;t^*)$ è pertanto un autostato di L_x con autovalore

$$\boxed{m_x = 0}$$

d) Il calcolo precedente ci ha mostrato che l'autofunzione di L_x corrispondente ad $l=1$ ed $m_x=0$ si esprime, in termini di armoniche sferiche come

$$\psi_{l=1,m_x=0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{1,1}(\theta,\varphi) - Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right)$$

Utilizzando quindi l'espressione (••) per la f.d.o. del sistema al tempo $t>0$, possiamo calcolare direttamente l'ampiezza di probabilità che una misura di L_x dia come risultato $m_x=0$. Omettendo un fattore di fase irrilevante si ha:

$$A(m_x=0) = \int d\Omega\, \psi^*_{l=1,m_x=0}(\theta,\varphi)\, \psi(\theta,\varphi;t) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\Omega \left(Y^*_{1,1} - Y^*_{1,-1}\right)\left(Y_{1,1} + e^{2i\omega_2 t} Y_{1,-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{2i\omega_2 t}\right) = -\frac{e^{i\omega_2 t}}{2}\left(e^{i\omega_2 t} - e^{-i\omega_2 t}\right) =$$

$$= -i\, e^{i\omega_2 t} \operatorname{sen}\omega_2 t$$

La corrispondente probabilità è dunque

$$\boxed{P(m_x=0) = (\operatorname{sen}\omega_2 t)^2}$$

(Osserviamo che, come doveva risultare, al tempo $t^* = \pi/(2\omega_2)$ tale probabilità vale 1).

Calcoliamo infine il valore medio di L_x in funzione del tempo:

$$\langle L_x \rangle_t = \int d\Omega\, \psi(\theta,\varphi;t)^* L_x\, \psi(\theta,\varphi;t) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\Omega \left(Y_{1,1}^* + e^{-2i\omega_2 t} Y_{1,-1}^*\right)\left(\frac{L_+ + L_-}{2}\right)\left(Y_{1,1} + e^{2i\omega_2 t} Y_{1,-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int d\Omega \left(Y_{1,1}^* + e^{-2i\omega_2 t} Y_{1,-1}^*\right)\left(\sqrt{2}\, Y_{1,0} + e^{2i\omega_2 t}\sqrt{2}\, Y_{1,0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + e^{2i\omega_2 t}\right)\int d\Omega \left(Y_{1,1}^* + e^{-2i\omega_2 t} Y_{1,-1}^*\right) Y_{1,0}$$

e dunque

$$\boxed{\langle L_x \rangle_t = 0}$$

[Notiamo come la conoscenza del valore medio di L_x e della probabilità di uno dei tre possibili valori, ossia $m_x = 0$, consente di determinare anche le probabilità degli altri due valori. Si ha infatti:

$$\begin{cases} P(m_x = 1) + P(m_x = -1) + P(m_x = 0) = 1 & \text{[Normalizzazione]} \\ P(m_x = 1) - P(m_x = -1) = 0 & \text{[Valore medio]} \\ P(m_x = 0) = (\operatorname{sen}^2 \omega_2 t) \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene facilmente

$$P(m_x = 1) = P(m_x = -1) = \frac{1}{2}(\cos\omega_2 t)^2 \quad]$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
18 Febbario 1997

ESERCIZIO N^O. 2 [SPIN]

Si consideri un sistema di spin 1/2 e momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{S}$ la cui evoluzione temporale, in presenza di un campo magnetico $\vec{B}$, è definita dall' Hamiltoniana:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Il sistema si trova inizialmente (al tempo $t = 0$) nell'autostato corrispondente ad $S_x = +\hbar/2$.

Nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq T$ il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z; all'istante $t = T$ il campo $\vec{B}$ viene ruotato lungo la direzione dell'asse y.

Determinare la probabilità che una misura di S_x all'istante $t = 2T$ fornisca il valore $+\hbar/2$.

ESERCIZIO N° 2

Nella base di S_z valgono le seguenti rappresentazioni:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Autovettori } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Autovettori } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

Lo stato del sistema al tempo $t=0$ è dunque

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

dove $|+\rangle$ e $|-\rangle$ rappresentano gli autostati di S_z con autovalori $\pm \hbar/2$.

Con l'accensione del campo magnetico al tempo $t=0$, gli autovalori dell'Hamiltoniana sono dati da

$$H|+\rangle = E_+|+\rangle \Rightarrow E_+ = -gB\frac{\hbar}{2}$$

$$H|-\rangle = E_-|-\rangle \Rightarrow E_- = +gB\frac{\hbar}{2}$$

La funzione d'onda al tempo T è allora

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\frac{gBT}{2}}|+\rangle + e^{-i\frac{gBT}{2}}|-\rangle\right)$$

Al tempo T il campo magnetico viene ruotato e autostati dell'Hamiltoniana diventano gli autostati di S_y:

$$\begin{cases} |+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + i|-\rangle\right) \\ |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - i|-\rangle\right) \end{cases}$$

In termini di questi stati la f.d.o. al tempo T si scrive

$$|\psi(T)\rangle = \frac{e^{i\frac{gBT}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e^{-i\frac{gBT}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}\, i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{gBT}{2}} - i e^{-i\frac{gBT}{2}}\right)|+\rangle_y + \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{gBT}{2}} + i e^{-i\frac{gBT}{2}}\right)|-\rangle_y$$

Lo stato $|+\rangle_y$ corrisponde ora all'autovalore $E_+ = -gB\hbar/2$ e lo stato $|-\rangle_y$ all'autovalore $E_- = +gB\hbar/2$. Dopo un ulteriore periodo di tempo T si ha pertanto:

$$|\psi(2T)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{gBT}{2}} - i e^{-i\frac{gBt}{2}}\right) e^{i\frac{gBT}{2}}|+\rangle_y +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{gBT}{2}} + i e^{-i\frac{gBT}{2}}\right) e^{-i\frac{gBT}{2}}|-\rangle_y =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{igBT} - i\right)|+\rangle_y + \frac{1}{2}\left(1 + i e^{-igBT}\right)|-\rangle_y$$

Dobbiamo infine calcolare la probabilità che una misura di S_x dia a questo punto il risultato $+\hbar/2$. La corrispondente ampiezza è

$$a = {}_x\langle + | \psi(2T)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{igBT} - i\right){}_x\langle + | + \rangle_y + \frac{1}{2}\left(1 + i e^{-igBT}\right){}_x\langle + | - \rangle_y$$

Considerando che

$${}_x\langle + | + \rangle_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+i)$$

$${}_x\langle + | - \rangle_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-i)$$

troviamo

$$a = \frac{1}{4}\left[(e^{i\gamma BT} - i)(1+i) + (1 + i e^{-i\gamma BT})(1-i) \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{i\gamma BT}(1+i) + e^{-i\gamma BT}(1+i) + (1-i) + (1-i) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(\gamma BT)(1+i) + (1-i) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+\cos(\gamma BT)) - i(1-\cos(\gamma BT)) \right]$$

la probabilità cercata è ora il modulo quadro di questa ampiezza:

$$P = \frac{1}{4}\left[(1+\cos(\gamma BT))^2 + (1-\cos(\gamma BT))^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + 2\cos^2(\gamma BT) \right)$$

ossia

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\left[1 + \cos^2(\gamma BT) \right]}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
7 Settembre 1999

ESERCIZIO N^O. 2 [SPIN]

Una particella di spin 1/2, momento magnetico $\vec{\mu} = g\,\vec{S}$ e massa infinita è immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$. Il campo giace sul piano $x\,z$ e la sua direzione forma con gli assi x e z un angolo di 45°. L'Hamiltoniana che descrive la particella è:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

All'istante iniziale $t = 0$ viene misurata la componte z dello spin della particella e si ottiene come risultato il valore $S_z = \hbar/2$.

a) Determinare, a questo istante, i possibili risultati di una misura dell' energia della particella e le corrispondenti probabilità.

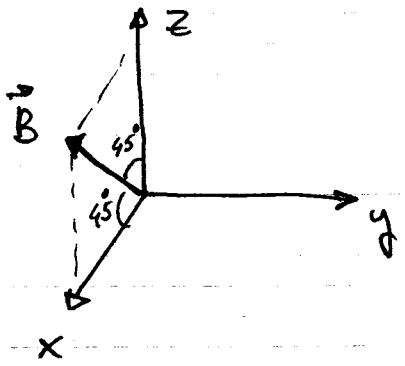
b) Determinare per quale valore del tempo successivo t^* la particella viene a trovarsi nello stesso stato in cui si trovava al tempo iniziale $t = 0$.

c) Si supponga invece di effettuare al tempo $t = t^*/2$ una misura di S_z, ottenendo nuovamente come risultato il valore $\hbar/2$. In questo caso, in quale stato verrà a trovarsi la particella al tempo t^*?

ESERCIZIO N° 2

a) Calcoliamo in primo luogo autovalori ed autovettori dell'hamiltoniana.

Il campo magnetico giace sul piano xz ed ha componenti B_x e B_z uguali tra loro:



$$\vec{B} = \frac{B}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

L'hamiltoniana che descrive la particella è allora:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\frac{gB}{\sqrt{2}}(S_x+S_z) = -\frac{gB\hbar}{2\sqrt{2}}(\sigma_x+\sigma_z)$$

ossia

$$\boxed{H = -\frac{A}{\sqrt{2}}(\sigma_x+\sigma_z)}, \qquad \boxed{A = \frac{gB\hbar}{2}}$$

In rappresentazione matriciale l'hamiltoniana ha la forma

$$H = -\frac{A}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice sono le soluzioni dell'equazione secolare:

$$0 = \det(H-\lambda I) = \left(-\frac{A}{\sqrt{2}}-\lambda\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2}}-\lambda\right)-\frac{A^2}{2} =$$

$$= -\left(\frac{A^2}{2}-\lambda^2\right)-\frac{A^2}{2} = \lambda^2 - A^2 \Rightarrow \lambda = \pm A$$

I possibili risultati di una misura dell'energia sono dunque $\pm A$. Indichiamo con $|\psi_\pm\rangle$ i corrispondenti autovettori:

$$\boxed{\begin{cases} H|\psi_+\rangle = A|\psi_+\rangle \\ H|\psi_-\rangle = -A|\psi_-\rangle \end{cases}}$$

Abbiamo:

$$H|\psi_+\rangle = -\frac{A}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = -\sqrt{2}\,a \\ a-b = -\sqrt{2}\,b \end{cases} \xRightarrow{1^a\,eq.} b = -(1+\sqrt{2})a$$

Imponendo anche la condizione di normalizzazione:

$$a^2+b^2 = a^2+(1+2+2\sqrt{2})a^2 = a^2(4+2\sqrt{2}) = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$b = -(1+\sqrt{2})a = -\frac{(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Lo stato $|\psi_-\rangle$ è ortogonale a $|\psi_+\rangle$. Allora:

$$\boxed{|\psi_+\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ -\sqrt{2+\sqrt{2}}\end{pmatrix}}, \quad \boxed{|\psi_-\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\end{pmatrix}}$$

Lo stato della particella al tempo $t=0$ è l'autostato $|\uparrow\rangle$ di S_z:

$$|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esprimiamo questo stato in termini degli autostati dell'hamiltoniana:

$$|\psi(0)\rangle = \alpha_+ |\psi_+\rangle + \alpha_- |\psi_-\rangle$$

$$\begin{cases} \alpha_+ = \langle\psi_+|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \alpha_- = \langle\psi_-|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases}$$

La probabilità che una misura dell'energia fornisca il risultato $+A = gB\hbar/2$ è allora:

$$\boxed{P(E = gB\hbar/2) = |\alpha_+|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

Analogamente:

$$\boxed{P(E = -gB\hbar/2) = |\alpha_-|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

b) Determiniamo lo stato del sistema al tempo t generico:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = \alpha_+ e^{-\frac{iAt}{\hbar}} |\psi_+\rangle + \alpha_- e^{\frac{iAt}{\hbar}} |\psi_-\rangle =$$

$$= e^{-\frac{iAt}{\hbar}} \left(\alpha_+ |\psi_+\rangle + \alpha_- e^{\frac{2iAt}{\hbar}} |\psi_-\rangle \right)$$

Questo stato coincide con lo stato iniziale (a meno di un fattore di fase irrilevante) al tempo t^* per il quale

$$\frac{2At^*}{\hbar} = 2\pi \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{\pi\hbar}{A} = \frac{2\pi}{gB}}$$

c) Se, invece, al tempo $t^*/2$ viene effettuata una misura di S_z, ottenendo come risultato $\hbar/2$, a questo istante lo s.d.o è nuovamente

$$|\psi(t^*/2)\rangle = |A\rangle = \alpha_+ |\psi_+\rangle + \alpha_- |\psi_-\rangle$$

lo stato al tempo t successivo è:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t^*/2)} |\psi(t^*/2)\rangle =$$
$$= \alpha_+ e^{-\frac{iA}{\hbar}(t-t^*/2)} |\psi_+\rangle + \alpha_- e^{\frac{iA}{\hbar}(t-t^*/2)} |\psi_-\rangle$$

e, per $t = t^*$ si ottiene:

$$|\psi(t^*)\rangle = \alpha_+ e^{-\frac{iAt^*}{2\hbar}} |\psi_+\rangle + \alpha_- e^{\frac{iAt^*}{2\hbar}} |\psi_-\rangle =$$
$$= \alpha_+ e^{-\frac{i\pi}{2}} |\psi_+\rangle + \alpha_- e^{\frac{i\pi}{2}} |\psi_-\rangle =$$
$$= e^{-\frac{i\pi}{2}} \left(\alpha_+ |\psi_+\rangle - \alpha_- |\psi_-\rangle\right)$$

ossia (a meno di un fattore di fase):

$$\boxed{|\psi(t^*)\rangle = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} |\psi_+\rangle - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} |\psi_-\rangle}$$

Esplicitamente, il vettore di stato è:

$$|\psi(t^*)\rangle = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ossia

$$\boxed{|\psi(t^*)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
6 Dicembre 2004

ESERCIZIO N^O. 2 [COMPOSIZIONE DI MOMENTI ANGOLARI]

L' Hamiltoniana di una particella di spin 1/2 ha la forma

$$H = c\, J^2$$

dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è l'operatore momento angolare totale della particella e c una costante data.

All'istante $t = 0$ la particella si trova in uno stato tale che una misura di L^2, L_z ed S_z fornisce con certezza i valori $2\hbar^2$, $-\hbar$ e $+\hbar/2$ rispettivamente.

Determinare:

a) I possibili risultati di una misura dell' energia e le rispettive probabilità.

b) Il valore medio, in funzione del tempo, dell'operatore S_y.

c) La probabilità, in funzione del tempo, che una misura della componente S_y dello spin dia come risultato il valore $+\hbar/2$.

ESERCIZIO N° 2

a) Indichiamo con $Y_{lm}\chi_\pm$ le autofunzioni di L^2, L_z, S_z con autovalori $l, m, \pm\hbar/2$. Lo stato del sistema al tempo $t=0$ è:

$$\psi(0) = Y_{1-1}\chi_+$$

Per determinare i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità dobbiamo esprimere tale stato come combinazione lineare di autostati di H, ossia di autostati $\mathcal{Y}_{j,j_z}$ degli operatori J^2 e J_z. Dalla combinazione di $l=1$ ed $s=1/2$ si possono produrre i seguenti valori di j:

$$j = 1/2,\ 3/2$$

Lo stato iniziale, che è uno stato con $j_z=-1/2$, deve essere dunque una combinazione lineare della forma

$$\psi(0) = C_{3/2}\,\mathcal{Y}_{3/2,-1/2} + C_{1/2}\,\mathcal{Y}_{1/2,-1/2}$$

Per determinare i coefficienti di Clebsch-Gordan $C_{1/2}$ e $C_{3/2}$ consideriamo lo stato corrispondente al minimo valore possibile di j_z, ossia $j_z=-3/2$ (dovendo raggiungere $j_z=-1/2$ risulta conveniente partire dal basso).

• $y_{3/2,-3/2} = Y_{1,-1}\chi_-$

Applichiamo ad entrambi i membri di questa equazione l'operatore J_+, la cui azione è definita da

$$J_+ y_{j,j_z} = \hbar\sqrt{j(j+1) - j_z(j_z+1)}\; y_{j,j_z+1}$$

Si ha:

$$J_+ y_{3/2,-3/2} = \hbar\sqrt{3/2(3/2+1) + 3/2(-3/2+1)}\; y_{3/2,-1/2} =$$

$$= \hbar\sqrt{3}\; y_{3/2,-1/2} = (L_+ + S_+) Y_{1,-1}\chi_- =$$

$$= \hbar\sqrt{1(1+1) + 1(-1+1)}\; Y_{1,0}\chi_- + \hbar\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}+1)}\; Y_{1,-1}\chi_+$$

$$= \hbar\sqrt{2}\, Y_{10}\chi_- + \hbar Y_{1,-1}\chi_+$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} \bullet\; y_{3/2,-1/2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\, Y_{1,-1}\chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y_{10}\chi_- \\ \bullet\; y_{1/2,-1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y_{1,-1}\chi_+ - \sqrt{\frac{1}{3}}\, Y_{1,0}\chi_- \end{cases} \qquad (*)$$

(lo stato $y_{1/2,-1/2}$ è determinato dalla condizione di ortogonalità con lo stato $y_{3/2,-1/2}$).
Invertendo questo sistema otteniamo la combinazione lineare che esprime lo stato al tempo $t=0$:

$$\psi(0) = Y_{1,-1}\chi_+ = \sqrt{\frac{1}{3}}\, y_{3/2,-1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, y_{1/2,-1/2}$$

Gli autovalori dell'energia corrispondenti agli autostati di J^2 sono $E_j = c\hbar\, j(j+1)$. Si ha dunque

$$\boxed{E_{1/2} = \frac{3}{4} c\hbar^2, \quad E_{3/2} = \frac{15}{4} c\hbar^2}$$

L'espressione ottenuta per la f.d.o. dello stato al tempo $t=0$ mostra poi che le corrispondenti probabilità sono

$$\boxed{P_{1/2} = \frac{2}{3}, \quad P_{3/2} = \frac{1}{3}}$$

b) Determiniamo lo stato del sistema al tempo $t>0$.

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(0) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-i\frac{15}{4}c\hbar t}\, y_{3/2,-1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-i\frac{3}{4}c\hbar t}\, y_{1/2,-1/2} =$$

$$= e^{-i\frac{3}{4}c\hbar t}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-3ic\hbar t}\, y_{3/2,-1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, y_{1/2,-1/2}\right]$$

Per calcolare il valore medio di S_y riscriviamo questo stato come combinazione lineare di autostati di L^2, L_z, S^2, S_z. Dalle espressioni (*), omettendo

la fase moltiplicativa irrilevante, otteniamo:

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-3i\omega_0 t}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\, Y_{1,-1}\chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y_{1,0}\chi_-\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, Y_{1,1}\chi_+ - \sqrt{\frac{1}{3}}\, Y_{1,0}\chi_-\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3i\omega_0 t}\right) Y_{1,-1}\chi_+ + \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-3i\omega_0 t}\right) Y_{1,0}\chi_- \equiv$$

$$\equiv c_+(t)\, Y_{1,-1}\chi_+ + c_-(t)\, Y_{1,0}\chi_-$$

Possiamo ora calcolare facilmente il valore medio di S_y esprimendo questo operatore come combinazione degli operatori a scala $S_\pm$:

$$S_\pm = S_x \pm i S_y \quad \Rightarrow \quad S_y = -\frac{i}{2}(S_+ - S_-)$$

Si ha:

$$\langle S_y\rangle_t = \langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle =$$

$$= \left(c_+^*(t)\langle Y_{1,-1}|\langle\chi_+| + c_-^*(t)\langle Y_{10}|\langle\chi_-|\right)\cdot S_y \cdot$$

$$\cdot \left(c_+(t)|Y_{1,-1}\rangle|\chi_+\rangle + c_-(t)|Y_{10}\rangle|\chi_-\rangle\right) =$$

$$= |c_+(t)|^2\langle\chi_+|S_y|\chi_+\rangle + |c_-(t)|^2\langle\chi_-|S_y|\chi_-\rangle =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[|c_+(t)|^2\langle\chi_+|(S_+ - S_-)|\chi_+\rangle + |c_-(t)|^2\langle\chi_-|(S_+ - S_-)|\chi_-\rangle\right]$$

da cui

$$\boxed{\langle S_y\rangle_t = 0}$$

c) Calcoliamo infine la probabilità, in funzione del tempo, che una misura della componente S_y dello spin dia come risultato il valore $+\hbar/2$.

A tale scopo dobbiamo esprimere in primo luogo la f.d.o. $\psi(t)$ come combinazione lineare di autostati $\chi_\pm^{(y)}$ di S_y. Nella base di S_z la matrice rappresentativa di S_y è

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autostati sono

$$\begin{cases} \chi_+^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+ + i\chi_-) \\ \chi_-^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+ - i\chi_-) \end{cases}$$

Queste espressioni possono essere facilmente invertite:

$$\begin{cases} \chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(y)} + \chi_-^{(y)}\right) \\ \chi_- = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(y)} - \chi_-^{(y)}\right) \end{cases}$$

In termini degli autostati di S_y, lo stato $|\psi(t)\rangle$ si scrive allora:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} c_+(t) Y_{1,-1} \left(\chi_+^{(y)} + \chi_-^{(y)}\right) +$$
$$- \frac{i}{\sqrt{2}} c_-(t) Y_{1,0} \left(\chi_+^{(y)} - \chi_-^{(y)}\right)$$

ossia:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(c_+(t) Y_{1,-1} - i c_-(t) Y_{1,0}\right) \chi_+^{(y)} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(c_+(t) Y_{1,-1} + i c_-(t) Y_{1,0}\right) \chi_-^{(y)}$$

La probabilità di misurare $S_y = +\hbar/2$ è pertanto

$$\boxed{P_+(t) = \frac{1}{2}\left(|c_+(t)|^2 + |c_-(t)|^2\right) = \frac{1}{2}}$$

(essendo $|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$ per la normalizzazione dello stato).
Notiamo che essendo ovviamente $P_-(t) = 1 - P_+(t) = 1/2$ si ha pure

$$\langle S_y \rangle_t = \frac{1}{2}\left(+\frac{\hbar}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = 0$$

come già trovato.

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA
18 Giugno 2002

ESERCIZIO N^O. 2 [COMPOSIZIONE DI MOMENTI ANGOLARI]

Sia dato un sistema composto di due particelle distinguibili di spin 1/2.

a) Calcolare la probabilità che una misura dello spin totale $S^2 = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2$ dia come risultato il valore $2\,\hbar^2$ se:

1. gli spin di entrambe le particelle puntano nella direzione $+\,z$;

2. lo spin della particella 1 punta nella direzione $+\,z$ e quello della particella 2 nella direzione $-\,z$;

3. lo spin della particella 1 punta nella direzione $+\,x$ e quello della particella 2 nella direzione $+\,z$.

Si assuma come Hamiltoniana del sistema

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

(N.B.: $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)$). All'istante iniziale $t = 0$, le particelle si trovano nello stato in cui lo spin della particella 1 punta nella direzione $+\,z$ mentre quello della particella 2 nella direzione $-\,z$.

b) Determinare lo stato del sistema ad un tempo generico $t > 0$.

c) Calcolare il valore medio $\langle S_{1z} \rangle$ della componente z dello spin della particella 1 ad un tempo generico $t > 0$.

ESERCIZIO N° 2

(a) Per calcolare le probabilità richieste esprimiamo gli autostati di S^2 ed S_z totali in termini degli autostati di $S_1^2, S_{1z}, S_2^2, S_{2z}$. Valgono le ben note rappresentazioni degli stati di tripletto e singletto:

$$\begin{cases} \overset{S\ S_z}{|1,1\rangle} = \overset{S_{z1}}{|+\rangle}\overset{S_{z2}}{|+\rangle} \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle\right); \quad \left\{ |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\right) \right. \\ |1,-1\rangle = |-\rangle|-\rangle \end{cases}$$

L'autovalore di S^2, $s(s+1)\hbar^2$, vale $2\hbar^2$ quando $s=1$. Si trovano pertanto le seguenti probabilità:

(1.) Gli spin di entrambe le particelle puntano nella direzione $+z$:

$$|\psi\rangle = |+\rangle|+\rangle = |1,1\rangle \Rightarrow \boxed{P(s=1) = 1}$$

(2.) Lo spin della particella 1 punta nella direzione $+z$ e quello della particella 2 nella direzione $-z$:

$$|\psi\rangle = |+\rangle|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,0\rangle\right) \Rightarrow \boxed{P(s=1) = \frac{1}{2}}$$

(3.) Lo spin della particella 1 punta nella direzione $+x$ e quello della particella 2 nella direzione $+z$:

l'autostato di S_x con autovalore $+\hbar/2$ è rappresentato, nella base di S_z, dall'autovettore di σ_x corrispondente all'autovalore $+1$. Si ha pertanto:

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

Lo stato delle due particelle è allora

$$|\psi\rangle = |+\rangle_x |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)|+\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|+\rangle + |-\rangle|+\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|0,0\rangle$$

La probabilità di misurare $S=1$ vale dunque

$$\boxed{P(S=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}}$$

(b) Lo stato della particella al tempo $t=0$ è

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle|-\rangle$$

che, espresso come combinazione lineare di autostati dell'Hamiltoniana (S^2) si scrive

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,0\rangle\right)}$$

Poiché l'Hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)$$

i suoi autovalori sono

$$\boxed{E_S = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(S(S+1) - \frac{3}{2}\right)} \rightarrow \boxed{\begin{cases} E_0 = -\frac{3}{4}\hbar\omega \\ E_1 = \frac{1}{4}\hbar\omega \end{cases}}$$

indipendenti da S_z. Lo stato del sistema al tempo t è pertanto

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1,0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|0,0\rangle\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-E_1)t}|0,0\rangle\right)$$

Pertanto, a meno di un fattore di fase irrilevante,

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + e^{i\omega t}|0,0\rangle\right)}$$

(c) Per calcolare il valore medio di S_{1z} al tempo t riesprimiamo lo stato $|\psi(t)\rangle$ in termini degli autostati di S_{1z} ed S_{2z}:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle\right) + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1+e^{i\omega t}\right)|+\rangle|-\rangle + \left(1-e^{i\omega t}\right)|-\rangle|+\rangle\right] \equiv$$

$$\equiv C_+(t)\,|+\rangle|-\rangle + C_-(t)\,|-\rangle|+\rangle$$

I moduli quadri $|c_+(t)|^2$ e $|c_-(t)|^2$ rappresentano le probabilità che una misura di S_{1z} dia come risultato rispettivamente $+\frac{\hbar}{2}$ e $-\frac{\hbar}{2}$. Si ha pertanto, per il valore medio

$$\langle S_{1z}\rangle_t = \frac{\hbar}{2}\left[|c_+(t)|^2 - |c_-(t)|^2\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[\left|\frac{1+e^{i\omega t}}{2}\right|^2 - \left|\frac{1-e^{i\omega t}}{2}\right|^2\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{8}\left[(1+1+2\cos\omega t)-(1+1-2\cos\omega t)\right]$$

ossia

$$\boxed{\langle S_{1z}\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t)}$$

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA
7 Luglio 2003

ESERCIZIO N^O. 1 [PARTICELLE IDENTICHE]

Due particelle identiche di spin 1 e massa m sono vincolate a muoversi in un segmento di lunghezza L. L'Hamiltoniano del sistema è pertanto

$$H = \frac{p_1^2}{2\,m} + \frac{p_2^2}{2\,m} + U(x_1) + U(x_2) \ ,$$

dove

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < L \\ \infty & \text{per } x < 0 \text{ e } x > L \ . \end{cases}$$

a) Determinare gli autovalori e le autofunzioni corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato dell'energia ed il relativo grado di degenerazione.

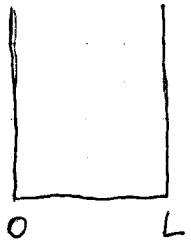
All'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trova in un autostato dello spin totale corrispondente ad $S = 0$. Una misura dell'energia può fornire inoltre come possibili risultati solo gli autovalori corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato. Infine, il valore medio dell'energia è $\langle E \rangle = 2\hbar^2\pi^2/mL^2$.

b) Determinare l'espressione più generale dello stato delle due particelle al tempo $t = 0$ e la sua evoluzione temporale.

c) Calcolare la probabilità in funzione del tempo che effettuando una misura di posizione delle due particelle queste vengano trovate entrambe nel segmento di coordinate $0 < x < L/2$.

Nella risoluzione del punto c) si osservi che il calcolo esplicito della maggior parte degli integrali può essere evitato semplicemento tenendo in conto della normalizzazione delle funzioni d'onda e delle loro proprietà di simmetria rispetto al punto di coordinata $x = L/2$.

ESERCIZIO N° 1



$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\,k_n x \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}\,, \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

(a) Poiché l'hamiltoniano si scrive come somma di due termini indipendenti,

$$H = H_1 + H_2$$

le corrispondenti autofunzioni possono essere scritte come prodotto di autofunzioni di singola particella

$$\psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2) = \varphi_{n_1}(x_1)\,\varphi_{n_2}(x_2)$$

ed i corrispondenti autovalori sono la somma degli autovalori di singola particella

$$E_{n_1, n_2} = E_{n_1} + E_{n_2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2\right)$$

Per quanto concerne la parte di spin della f.d.o, lo spin totale può assumere i valori $S = 0, 1, 2$. Indicando con $\chi(S, \sigma)$ le corrispondenti autofunzioni si ha allora

$\chi(2, \sigma)$, $\sigma = -2, -1, 0, 1, 2$ SIMM.

$\chi(1, \sigma)$, $\sigma = -1, 0, 1$ ANTISIMM.

$\chi(0, \sigma)$, $\sigma = 0$ SIMM.

dove abbiamo indicato anche la proprietà di simmetria delle f.d.o. rispetto allo scambio delle due particelle: l'autostato di spin massimo è simmetrico, quello successivo antisimmetrico, e così via.

Poiché le due particelle sono bosoni identici, la f.d.o. complessiva (parte spaziale e parte di spin) deve essere simmetrica rispetto allo scambio delle due particelle. Per il <u>livello fondamentale</u>, $(n_1, n_2) = (1,1)$, si hanno pertanto le seguenti possibilità

$$\boxed{\begin{array}{ll} - \ \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\chi(2,\sigma) \ , & \sigma = -2,-1,0,1,2 \\ - \ \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\chi(0,\sigma) \ , & \sigma = 0 \\ \mathcal{E}_0 = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{mL^2} \quad (n_1 = n_2 = 1) & \underline{\text{Degenerazione: } 6} \end{array}}$$

giacché la parte spaziale della f.d.o. è necessariamente simmetrica.

Per il <u>primo livello eccitato</u>, $(n_1, n_2) = (2,1)$, si può costruire una parte spaziale sia simmetrica che antisimmetrica. Le possibili f.d.o. in questo caso sono allora:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)+\varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\right)\chi(2,\sigma)\ ,\ \sigma=-2,-1,0,1,2$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)+\varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\right)\chi(0,\sigma),\ \sigma=0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)-\varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\right)\chi(1,\sigma),\ \sigma=-1,0,1$$

$$\mathcal{E}_1=\frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\quad (n_1,n_2=1,2)\qquad \underline{\text{Degenerazione: 9}}$$

(b) Lo stato delle particelle al tempo $t=0$ è un autostato dello spin totale con $S=0$. Inoltre una misura dell'energia può fornire come unici risultati $\mathcal{E}_0$ od $\mathcal{E}_1$. Per quanto trovato al punto a), allora, lo stato iniziale deve essere una combinazione lineare della forma

$$\psi(0)=c_0\psi_0+c_1\psi_1$$

dove abbiamo posto

$$\psi_0(\xi_1,\xi_2)\equiv\varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\chi(0,0)$$

$$\psi_1(\xi_1,\xi_2)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)+\varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\right)\chi(0,0)$$

I coefficienti c_0 e c_1 soddisfano la condizione di normalizzazione

$$|c_0|^2+|c_1|^2=1 \qquad (\circ)$$

La condizione sul valore medio dell'energia implica

$$\langle E \rangle = |c_0|^2 \mathcal{E}_0 + |c_1|^2 \mathcal{E}_1 =$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left(2|c_0|^2 + 5|c_1|^2 \right) = 2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2}$$

ossia

$$2|c_0|^2 + 5|c_1|^2 = 4 \qquad (\bullet\bullet)$$

Risolviamo il sistema costituito dalle eq. $(\bullet)$ e $(\bullet\bullet)$:

$$\begin{cases} |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \\ 2|c_0|^2 + 5|c_1|^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3|c_0|^2 = 1 \\ 3|c_1|^2 = 2 \end{cases}$$

da cui

$$|c_0| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad |c_1| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Possiamo fissare la fase arbitraria della f.d.o. scegliendo c_0 reale e positivo. La fase di c_1 resta invece indeterminata dalla condizione data. La f.d.o. più generale che descrive lo stato delle 2 particelle è pertanto

$$\boxed{\psi(t=0) = \sqrt{\frac{1}{3}}\, \psi_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{i\varphi} \psi_1}$$

Avendo già calcolato gli autovalori dell'energia $\mathcal{E}_0$ ed $\mathcal{E}_1$, corrispondenti alle autofunzioni ψ_0 e ψ_1, possiamo scrivere direttamente la f.d.o. al tempo $t>0$

$$\boxed{\psi(t) = \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_0 t} \psi_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_1 t + i\varphi} \psi_1}$$

(c) Calcoliamo la probabilità che una misura di posizione rivelli entrambe le particelle nel segmento $0 \le x \le L/2$. Si ha:

$$P = \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \, |\psi(t)|^2 =$$

$$= \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \, |c_0(t)\psi_0 + c_1(t)\psi_1|^2 =$$

$$= \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \left[|c_0|^2 |\psi_0|^2 + |c_1|^2 |\psi_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(c_0 c_1^* \psi_0 \psi_1^*) \right] =$$

$$\equiv I_{00} + I_{11} + I_{01}$$

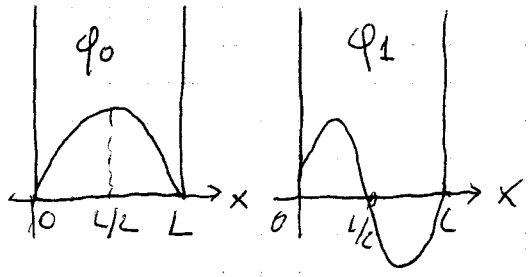
Calcoliamo i tre integrali. Poichè la parte di spin delle f.d.o. ψ_0 e ψ_1 è la stessa ($\chi(0,0)$) ed è normalizzata, il suo modulo è pari ad 1 e non dà contributo agli integrali. Si ha poi

$$I_{00} = \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \, |c_0|^2 |\psi_0|^2 =$$

$$= |c_0|^2 \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \, |\varphi_1(x_1)|^2 |\varphi_1(x_2)|^2$$

Poichè le autofunzioni della buca infinita sono normalizzate e simmetriche o antisimmetriche rispetto al centro della buca, $x = L/2$, si ha

$$\int_0^{L/2} dx \, |\varphi_n(x)|^2 = \frac{1}{2}$$



Allora

$$I_{00} = \frac{1}{4}|C_0|^2 \qquad (*)$$

Calcoliamo I_{11}:

$$I_{11} = |C_1|^2 \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \, |\psi_1|^2 =$$

$$= \frac{|C_1|^2}{2} \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \Big[|\varphi_1(x_1)|^2 |\varphi_2(x_2)|^2 + |\varphi_2(x_1)|^2 |\varphi_1(x_2)|^2 +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\left(\varphi_1(x_1)\varphi_2^*(x_1)\,\varphi_2(x_2)\varphi_1^*(x_2)\right)\Big] =$$

$$= \frac{1}{4}|C_1|^2 + |C_1|^2 \, |K_{12}|^2$$

dove si è posto

$$K_{12} = \int_0^{L/2} dx \, \varphi_1(x)\varphi_2^*(x)$$

Calcoliamo questo integrale

$$K_{12} = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} dx \, \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) =$$

$$= \frac{2}{\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\alpha \, \mathrm{sen}\,\alpha \, \mathrm{sen}\,2\alpha =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\alpha \, \mathrm{sen}^2\alpha \cos\alpha \overset{s=\mathrm{sen}\,\alpha}{=} \frac{4}{\pi}\int_0^1 ds \, s^2 = \frac{4}{3\pi}$$

Abbiamo allora

$$I_{11} = \left(\frac{1}{4} + \frac{16}{9\pi^2}\right)|C_1|^2 \qquad (**)$$

Resta infine da calcolare il termine di interferenza I_{01}

$$I_{01} = 2\,\mathrm{Re}\left[c_0 c_1^* \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2\, \psi_0 \psi_1^*\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Re}\left[c_0 c_1^* \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \left(|\varphi_1(x_1)|^2 \varphi_1(x_2)\varphi_2^*(x_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_1(x_1)\varphi_2^*(x_1)\,|\varphi_1(x_2)|^2\right) =$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[c_0 c_1^* \left(\frac{1}{2}K_{12} + \frac{1}{2}K_{12}\right)\right] =$$

$$\Rightarrow I_{01} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,\mathrm{Re}\left(c_0 c_1^*\right) \qquad (\star\star\star)$$

Raccogliendo i tre contributi, $(\star)$, $(\star\star)$ e $(\star\star\star)$, troviamo la probabilità cercata:

$$P = I_{00} + I_{11} + I_{01} =$$

$$= \frac{1}{4}|c_0|^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{16}{9\pi^2}\right)|c_1|^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,\mathrm{Re}\left(c_0 c_1^*\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{16}{9\pi^2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{Re}\left(e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_0)t-\varphi}\right)$$

ossia

$$\boxed{P = \frac{1}{4} + \frac{32}{27\pi^2} + \frac{8}{9\pi}\cos(\omega t - \varphi)}$$

dove si è posto

$$\boxed{\omega = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{\hbar} = \frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}}$$

PROVA DI ESAME DI FISICA QUANTISTICA
20 Luglio 2004

ESERCIZIO N^O. 2 [PARTICELLE IDENTICHE]

Un sistema è costituito da due particelle la cui interazione reciproca è descritta da un potenziale di oscillatore armonico unidimensionale nella coordinata relativa $x = x_1 - x_2$, avente pulsazione dipendente dagli spin $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$ delle particelle. Nel sistema del centro di massa, l' Hamiltoniana che descrive le particelle è:

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 \left(1 + \frac{2\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\hbar^2}\right)^2 x^2.$$

a) Determinare autostati ed autovalori dell' Hamiltoniana nei casi in cui le particelle sono:

- due bosoni *distinguibili* di spin 0;
- due bosoni *indistinguibili* di spin 0;
- due fermioni *indistinguibili* di spin 1/2;
- due bosoni *indistinguibili* di spin 1.

Si assuma che le particelle siano fermioni indistinguibili di spin 1/2. All' istante iniziale $t = 0$ le particelle si trovano in uno stato tale che: i) una misura dell' energia produce con certezza il risultato $E = (9/4)\,\hbar\omega$; ii) una misura della componente z dello spin totale produce con certezza il risultato $S_z = 0$; iii) il valore medio dello spin totale S^2 è pari ad $\hbar^2$; iv) il valore medio dell' operatore $(a^3 + a^{\dagger\,3})\,S_{1z}$ è pari a $-\sqrt{6}\hbar$.

b) Determinare lo stato del sistema al tempo generico $t > 0$.

ESERCIZIO N° 2

a) La parte dipendente dallo spin della frequenza può essere scritta in termini dell'operatore di spin totale:

$$\frac{2\vec{S}_1\cdot\vec{S}}{\hbar^2} = \frac{1}{\hbar^2}\left[(\vec{S}_1+\vec{S}_2)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\left[\vec{S}^2 - 2\vec{S}_1^2\right] \qquad (\vec{S}_1^2 = \vec{S}_2^2)$$

Gli autostati dell'hamiltoniana sono dunque autostati dello spin totale $\vec{S}$ e i corrispondenti autovalori sono della forma

$$\boxed{\begin{aligned} &E(n,S) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega(S) \\ &\text{con} \quad \omega(S) = \left|1 + S(S+1) - 2S_1(S_1+1)\right|\omega \end{aligned}}$$

Gli autostanti si costruiscono in termini degli autostati dell'oscillatore armonico, dello spin totale e della sua componente z:

$$\boxed{\begin{aligned} &H|n;S,S_z\rangle = E(n,S)\,|n;S,S_z\rangle \\ &|n,S,S_z\rangle = |n\rangle|S,S_z\rangle \end{aligned}}$$

Poiché l'energia non dipende da S_z, ciascun autostato è $(2S+1)$ volte degenere (a meno

di ulteriori possibili degenerazioni accidentali)

lo scambio delle due particelle induce un'inversione della coordinata relativa:

$$x = x_1 - x_2 \xrightarrow{P_{12}} x_2 - x_1 = -x$$

Rispetto a questa inversione, le autofunzioni $\psi_n(x)$ dell'oscillatore armonico sono pari per n pari e dispari per n dispari. Pertanto, la componente spaziale degli autostati dell'hamiltoniana sotto lo scambio delle due particelle si comporta come:

$$P_{12}|n\rangle = (-1)^n |n\rangle$$

Per quanto riguarda la parte di spin sappiamo che gli autostati corrispondenti a $S = S_{MAX} = S_1 + S_2$ sono pari, quelli con $S = S_{MAX} - 1$ dispari, e così via alternati.

$$P_{12}|S_{MAX}, S_z\rangle = +|S_{MAX}, S_z\rangle$$

$$P_{12}|S_{MAX}-1, S_z\rangle = -|S_{MAX}-1, S_z\rangle$$

$$P_{12}|S_{MAX}-2, S_z\rangle = +|S_{MAX}-2, S_z\rangle$$

$$\dots$$

con $S_{MAX} = S_1 + S_2$

Siamo ora in grado di discutere i vari casi.

Bosoni distinguibili di spin 0

Essendo le particelle distinguibili la parità delle f.d.o. rispetto allo scambio delle particelle è irrilevante. Le particelle sono prive di spin. Gli autostati ed autovalori dell'hamiltoniana sono pertanto

$$|n\rangle \quad , \quad E(n) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Bosoni indistinguibili di spin 0

Le funzioni d'onda devono essere pari rispetto allo scambio delle particelle. Per quanto discusso in precedenza questo implica

$$|n\rangle \quad , \quad E(n) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n \text{ pari}$$

Fermioni indistinguibili di spin 1/2

Le f.d.o. devono essere dispari rispetto allo scambio delle particelle. Lo spin totale può assumere 2 valori, $S=1$ ed $S=0$, con frequenze corrispondenti

$$\omega(S=1) = \left(\frac{3}{2}\right)\omega \quad , \quad \omega(S=0) = \left(\frac{1}{2}\right)\omega$$

Gli autostati ed autovalori dell'hamiltoniana sono pertanto

$|n\rangle|\overset{s}{1}, s_z\rangle$, $E(n,s) = (n+\frac{1}{2})\frac{3}{2}\hbar\omega$ <u>n dispari</u>

$|n\rangle|0,0\rangle$, $E(n,s) = (n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\hbar\omega$ <u>n pari</u>

Gli autostati $|n\rangle|1, s_z\rangle$ corrispondenti ai valori $s_z = -1, 0, 1$ sono degeneri.

⊙ Bosoni indistinguibili di spin 1

Le f.d.o. devono essere pari rispetto allo scambio delle particelle. Lo spin totale può assumere 3 valori, $s = 2, 1, 0$, con frequenze corrispondenti

$$\omega(s=2) = \sqrt{3}\,\omega, \quad \omega(s=1) = \omega, \quad \omega(s=0) = \sqrt{3}\,\omega$$

Gli autostati ed autovalori dell'hamiltoniana sono pertanto:

$|n\rangle|\overset{s}{2}, s_z\rangle$, $E(n,s) = (n+\frac{1}{2})3\hbar\omega$ <u>n pari</u>

$|n\rangle|1, s_z\rangle$, $E(n,s) = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ <u>n dispari</u>

$|n\rangle|0,0\rangle$, $E(n,s) = (n+\frac{1}{2})3\hbar\omega$ <u>n pari</u>

b) Studiamo gli autovalori dell'energia corrispondenti ai livelli più bassi.

$|0\rangle|0,0\rangle \to \left(\frac{1}{4}\right)\hbar\omega$ $\qquad$ $|1\rangle|1,S_z\rangle \to \left(\frac{9}{4}\right)\hbar\omega$

$|2\rangle|0,0\rangle \to \left(\frac{5}{4}\right)\hbar\omega$ $\qquad$ $|3\rangle|1,S_z\rangle \to \left(\frac{21}{4}\right)\hbar\omega$

$|4\rangle|0,0\rangle \to \left(\frac{9}{4}\right)\hbar\omega$ $\qquad$ ...

...

La condizioni che una misura dell'energia produce con certezza il risultato $E=\frac{9}{4}\hbar\omega$ ed una misura di S_z il risultato $S_z=0$ implicano pertanto che lo stato al tempo $t=0$ è della forma

$$|\psi(0)\rangle = c_1|1\rangle|1,0\rangle + c_4|4\rangle|0,0\rangle$$

Calcoliamo su questo stato il valore medio di S^2:

$$\langle\psi(0)|S^2|\psi(0)\rangle =$$

$$= \left(c_1^*\langle 1|\langle 1,0| + c_4^*\langle 4|\langle 0,0|\right) S^2 \left(c_1|1\rangle|1,0\rangle + c_4|4\rangle|0,0\rangle\right) =$$

$$= |c_1|^2\, 2\hbar^2$$

Ponendo questo valore medio uguale ad $\hbar^2$ si trova $|c_1|^2 = 1/2$ e dunque, per normalizzazione, $|c_4|^2 = 1/2$. Lo stato al tempo $t=0$ è dunque della forma

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|1,0\rangle + e^{i\varphi}|4\rangle|0,0\rangle\right)$$

Calcoliamo infine il valore medio dell'operatore $(a^3 S_z^{(1)} + h.c.)$:

$$\langle\psi(0)|\left(a^3 S_z^{(1)} + h.c\right)|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|a^3 S_z^{(1)}|\psi(0)\rangle + c.c. =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[\langle\psi(0)|a^3 S_z^{(1)}|\psi(0)\rangle\right] =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\,\mathrm{Re}\left[\left(\langle 1|\langle 1,0| + e^{-i\varphi}\langle 4|\langle 0,0|\right) a^3 S_z^{(1)}\left(|1\rangle|1,0\rangle + \right.\right.$$
$$\left.\left. + e^{i\varphi}|4\rangle|0,0\rangle\right)\right] =$$

$$= \sqrt{4\cdot 3\cdot 2}\;\mathrm{Re}\left[\langle 1,0|S_z^{(1)}|0,0\rangle e^{i\varphi}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{24}}{2}\,\mathrm{Re}\left[\left(\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|\right) S_z^{(1)}\left(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|\right) e^{i\varphi}\right] =$$

$$= \sqrt{6}\,\frac{\hbar}{2}\,\mathrm{Re}\left[\left(\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|\right)\left(\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|\right) e^{i\varphi}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\cancel{2}}\hbar\,\mathrm{Re}\left[\cancel{2}e^{i\varphi}\right] = \sqrt{6}\,\hbar\cos\varphi$$

Imponendo che questo valore medio sia uguale a $(-\sqrt{6}\hbar)$ troviamo $\varphi = \pi$. Lo stato al tempo $t=0$ è allora

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|1,0\rangle - |4\rangle|0,0\rangle\right)}$$

Poiché questo stato è autostato di H con autovalore $E = \frac{9}{4}\hbar\omega$, si ha

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\frac{9}{4}\omega t}}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|1,0\rangle - |4\rangle|0,0\rangle\right)}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
23 Settembre 1997

ESERCIZIO N^O. 2 [MOTO IN UN CAMPO CENTRALE E PARTICELLE IDENTICHE]

Determinare la funzione d'onda e l'energia nello stato fondamentale di una particella di massa m vincolata a muoversi all'interno di una sfera di raggio R.

Si abbiano ora due particelle identiche non interagenti immerse in questo potenziale; si determini la loro funzione d'onda complessiva quando entrambe le particelle si trovano nello stato fondamentale. Discutere i due casi: a) bosoni di spin 0; b) fermioni di spin 1/2.

ESERCIZIO 2

In coordinate polari, l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo si scrive

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\hat{L}^2}{r^2}\right]\psi+U(\vec{r})\psi=E\psi$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore di momento angolare (in unità $\hbar$) ed $U(r)$ il potenziale. Nel caso in questione il potenziale ha simmetria sferica ed è dato da

$$\begin{cases} U(r)=0 \ , & r<R \\ U(r)=+\infty \ , & r>R \end{cases}$$

La condizione $U(r)=+\infty$ per $r>R$ determina l'annullarsi della f.d.o in questa regione:

$$\boxed{\psi(\vec{r})=0 \ , \quad r>R}$$

Nella regione $r<R$, invece, l'eq. di Schrödinger si riduce all'equazione per la particella libera (le cui soluzioni, come è noto sono le onde sferiche $e^{\pm ikr}/r$). Dimostriamolo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\hat{L}^2}{r^2}\right]\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r})$$

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$\psi(\vec{r})=R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

dove $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ sono le armoniche sferiche autostati di $\hat{L}^2$ ed $\hat{L}_z$. Utilizzando

$$\hat{L}^2 Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

otteniamo un'equazione per la f.d.o. radiale:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR_{n\ell}}{dr}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{n\ell} = -\frac{2m}{\hbar^2} E R_{n\ell}$$

Questa si semplifica con la ben nota sostituzione

$$R_{n\ell}(r) = \frac{1}{r}\chi_{n\ell}(r)$$

Si ha infatti

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} R = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \left(\frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{r^2}\chi\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\chi}{dr} - \chi\right) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\chi}{dr} + r\frac{d^2\chi}{dr^2} - \frac{d\chi}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2\chi}{dr^2}$$

L'equazione per χ risulta dunque

$$\frac{d^2\chi_{n\ell}}{dr^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]\chi_{n\ell} = 0$$

che coincide con l'eq. d'onda per una particella in moto unidimensionale nel potenziale

$$V(r) = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}$$

Poiché questo potenziale è sempre positivo, o nullo per $\ell = 0$, lo stato fondamentale

corrisponde al caso $l=0$, ossia particella in onda s. In questo caso, inoltre, l'equazione d'onda per χ si riduce a

$$\frac{d^2\chi_{m0}}{dr^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\chi_{m0} = 0$$

le cui soluzioni sono della forma

$$\chi(r) = e^{\pm ikr} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

La generica soluzione corrispondente allo stato fondamentale della particella, nella regione $r<R$ è dunque

$$\psi_0(\vec{r}) = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r}$$

Dobbiamo ora imporre due condizioni: 1) che la f.d.o. non diverga per $r \to 0$ e 2) che si annulli per $r=R$, in modo da risultare continua sul bordo della sfera. La prima condizione fornisce

$$\lim_{r\to 0} \psi(r) = \lim_{r\to 0} \frac{C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{(C_1+C_2) + (C_1-C_2)ikr}{r}$$

che risulta finito per $C_2 = -C_1$. Si ha dunque

$$\psi_0(\vec{r}) = C\,\frac{\operatorname{sen}(kr)}{r}$$

La seconda condizione implica

$$\psi_0(R) = C\,\frac{\operatorname{sen}(kR)}{R} = 0 \Rightarrow kR = n\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{R^2} \Rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mR^2}$$

Lo stato fondamentale corrisponde dunque ad $n=1$.
Infine la costante C determina la normalizzazione della f.d.o.:

$$1 = \int d^3r\,|\psi(\vec{r})|^2 = \int_0^R 4\pi r^2 dr\, C^2\,\frac{\operatorname{sen}^2(kr)}{r^2} =$$

$$= 4\pi C^2 \int_0^R \operatorname{sen}^2(kr)\,dr = 4\pi C^2\,\frac{1}{4k}\left[2kr - \operatorname{sen}(2kr)\right]_0^R =$$

$$= \frac{\pi C^2}{k}\left[2kR - \operatorname{sen}(2kR)\right] =$$

$$\overset{kR=n\pi}{=} \frac{\pi C^2}{k}\,2kR = 2\pi R C^2 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$$

In conclusione, la f.d.o. dello stato fondamentale è

$$\boxed{\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\,\frac{\operatorname{sen}(kr)}{r}\,, \quad k = \frac{\pi}{R}} \quad \boxed{r<R}$$

corrispondente all'energia

$$\boxed{E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2}}$$

Consideriamo ora due particelle identiche nello stato fondamentale ψ_0. Se le particelle sono bosoni di spin 0 la loro f.d.o. è

semplicemente

$$\boxed{\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_0(\vec{r}_1)\psi_0(\vec{r}_2)}$$

Bosoni di spin 0

e risulta simmetrica rispetto allo scambio delle particelle. Se le due particelle sono fermioni di spin 1/2, poiché la f.d.o. spaziale è simmetrica, la f.d.o. di spin deve risultare antisimmetrica, ossia le due particelle devono trovarsi in uno stato di singoletto:

$$\chi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_1^+\chi_2^- - \chi_1^-\chi_2^+\right)$$

Pertanto:

$$\boxed{\Psi(\vec{r}_1, \chi_1; \vec{r}_2, \chi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(\vec{r}_1)\psi_0(\vec{r}_2)\left(\chi_1^+\chi_2^- - \chi_1^-\chi_2^+\right)}$$

Fermioni di spin 1/2