Elementi di Fisica Teorica Contemporanea

1. Teoria della Relatività
2. Meccanica quantistica
3. Particelle e campi
4. Gravità quantistica

Teoria della Relatività
Parte I

Sommario

1) Il tempo
2) Tempo e spazio assoluti
3) Tempo e spazio relativi
4) Lo spazio-tempo
5) Quadrivettori: velocità, impulso ed energia relativistiche
6) Lo spazio-tempo curvo

1) Il tempo

Cos'è il tempo?

Cos'è il tempo?

Merriam-Webster

m-w.com

Tempo: un periodo misurato o misurabile durante il quale un'azione, processo o condizione esiste o continua

Cos'è il tempo?

Merriam-Webster

m-w.com

Tempo: un periodo misurato o misurabile durante il quale un'azione, processo o condizione esiste o continua

Periodo: una porzione di tempo determinata da qualche fenomeno ricorsivo

?

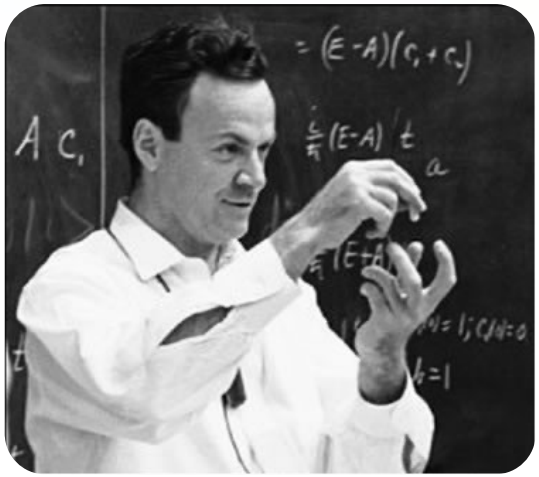
Cos'è il tempo

Agostino (IV-V secolo d.C.):

Cosa è il tempo?

Se nessuno me lo chiede lo so;
ma se lo volessi spiegare
a chi me lo chiede non lo so

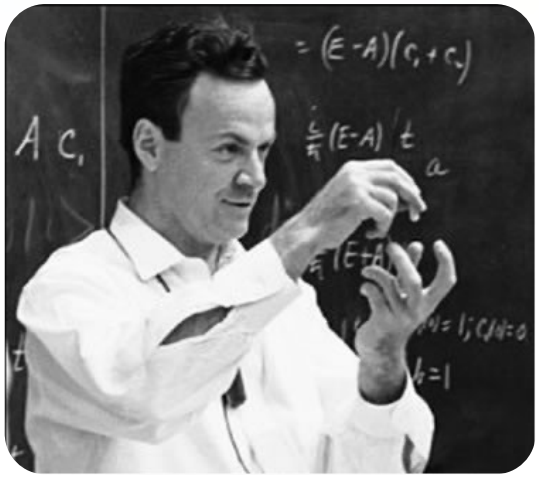
Cos'è il tempo



Richard Feynman: Forse potremmo dire: "Il tempo è ciò che accade quando non accade nient'altro".

Ma questa definizione non ci porta molto lontano...

Cos'è il tempo



Richard Feynman: Forse potremmo dire: "Il tempo è ciò che accade quando non accade nient'altro".

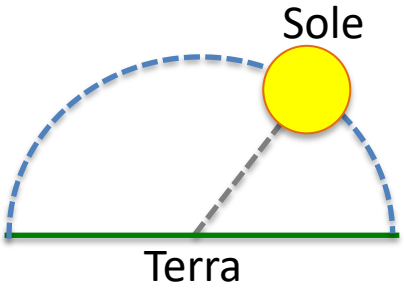
Ma questa definizione non ci porta molto lontano...

Forse è difficile definire il tempo, ma i fisici lo sanno misurare, meglio di qualunque altra cosa…

La misura del tempo

La misura del tempo si basa sul confronto con qualche evento che si ripete in modo regolare, cioè periodico

- Storicamente, l'alternarsi del giorno e della notte



- Poi sono state considerate altre possibilità

La misura del tempo

- Il confronto con fenomeni periodici di durata minore ci consente anche di misurare il tempo più accuratamente

Meridiana

Ore

Clessidra

Minuti

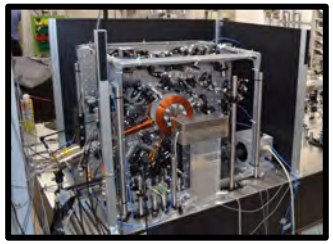
Orologio a pendolo

Secondi

Orologio al quarzo

Millesimi di secondo

Orologio atomico



Miliardesimi di secondo

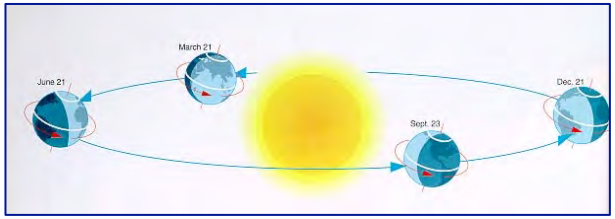
La misura "ufficiale" del tempo

- Storicamente: **Il giorno solare (medio)**

Ma il periodo di rotazione della Terra cresce lievemente nel tempo, a causa delle interazioni gravitazionali della Terra soprattutto con la Luna (l'attrito delle maree)

Oggi il giorno solare medio supera le 24 ore di circa 2 millisecondi (e per compensare questo sfasamento ogni tanto si è aggiunto un "secondo intercalare")

- Dal 1956: L'anno

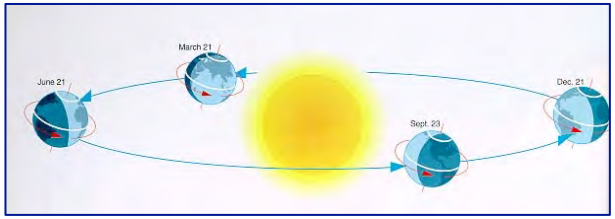


1 anno = 365,2564… giorni solari medi

Ma anche il periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole non è sufficientemente stabile: varia di circa 1.3 milionesimi di secondo l'anno per effetto della variazione di massa del Sole (circa 5 milioni di tonnellate / secondo).

La misura del tempo

- Dal 1956: **L'anno**



1 anno = 365,2564… giorni solari medi

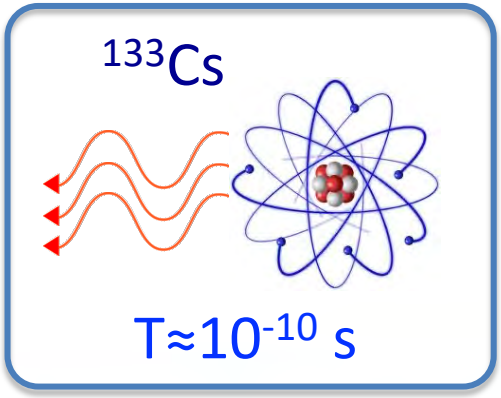
Ma anche il periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole non è sufficientemente stabile: varia di circa 1.3 milionesimi di secondo l'anno per effetto della variazione di massa del Sole (circa 5 milioni di tonnellate / secondo).

- Dal 1972: **Il tempo atomico**

Il secondo è definito in termini di un "pendolo" naturale:

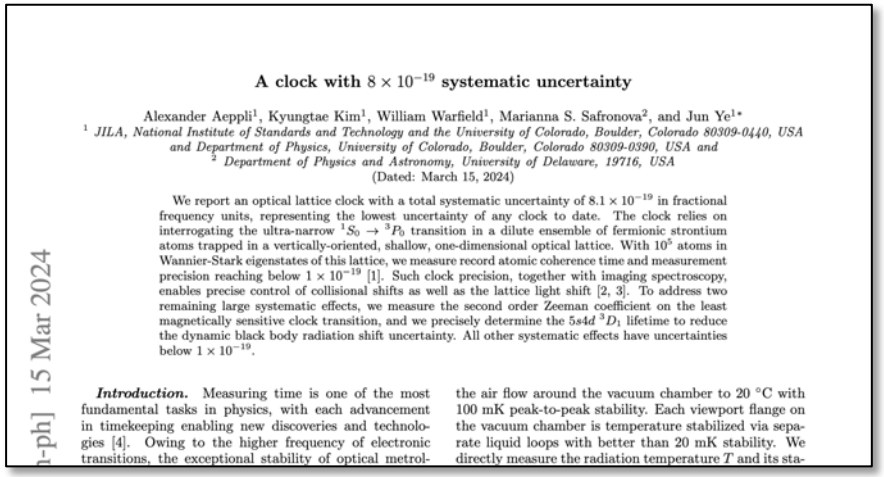
1 secondo = 9 192 631 770 periodi

della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dell'atomo di cesio-133



Record battuto: l'orologio più preciso del mondo

perde un secondo ogni 40 miliardi di anni



A clock with 8×10^{-19} systematic uncertainty

Alexander Aeppli[1], Kyungtae Kim[1], William Warfield[1], Marianna S. Safronova[2], and Jun Ye[1*]
[1] *JILA, National Institute of Standards and Technology and the University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0440, USA and Department of Physics, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0390, USA and*
[2] *Department of Physics and Astronomy, University of Delaware, 19716, USA*

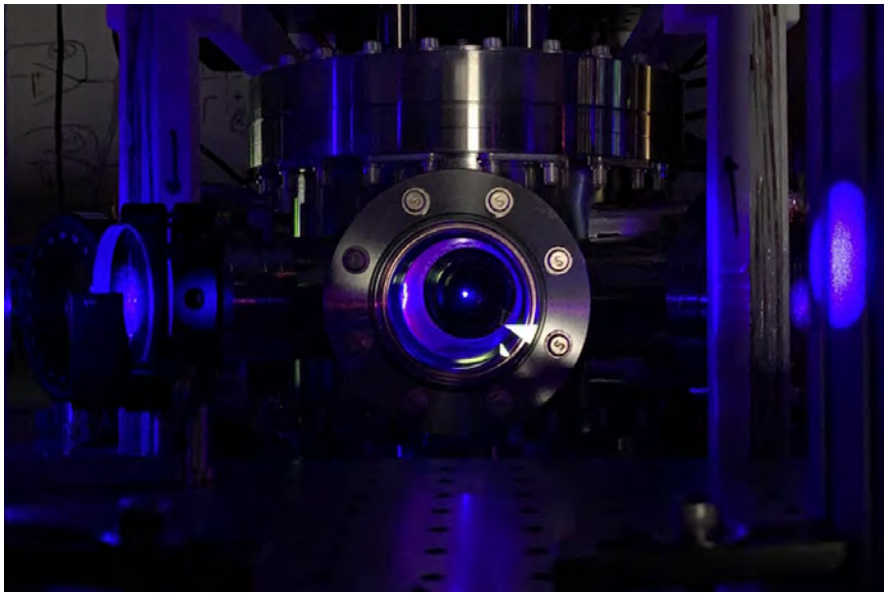
(Dated: March 15, 2024)

We report an optical lattice clock with a total systematic uncertainty of 8.1×10^{-19} in fractional frequency units, representing the lowest uncertainty of any clock to date. The clock relies on interrogating the ultra-narrow $^1S_0 \rightarrow {}^3P_0$ transition in a dilute ensemble of fermionic strontium atoms trapped in a vertically-oriented, shallow, one-dimensional optical lattice. With 10^5 atoms in Wannier-Stark eigenstates of this lattice, we measure record atomic coherence time and measurement precision reaching below 1×10^{-19} [1]. Such clock precision, together with imaging spectroscopy, enables precise control of collisional shifts as well as the lattice light shift [2, 3]. To address two remaining large systematic effects, we measure the second order Zeeman coefficient on the least magnetically sensitive clock transition, and we precisely determine the $5s4d\ ^3D_1$ lifetime to reduce the dynamic black body radiation shift uncertainty. All other systematic effects have uncertainties below 1×10^{-19}.

-ph] 15 Mar 2024

Introduction. Measuring time is one of the most fundamental tasks in physics, with each advancement in timekeeping enabling new discoveries and technologies [4]. Owing to the higher frequency of electronic transitions, the exceptional stability of optical metrol-

the air flow around the vacuum chamber to 20 °C with 100 mK peak-to-peak stability. Each viewport flange on the vacuum chamber is temperature stabilized via separate liquid loops with better than 20 mK stability. We directly measure the radiation temperature T and its sta-

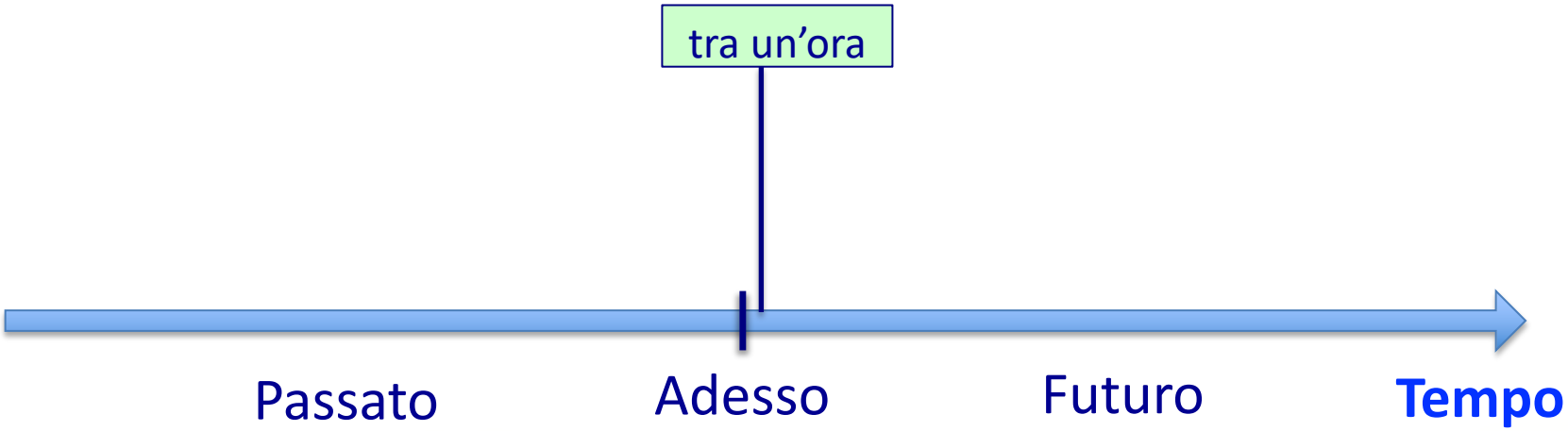


Marzo 2024

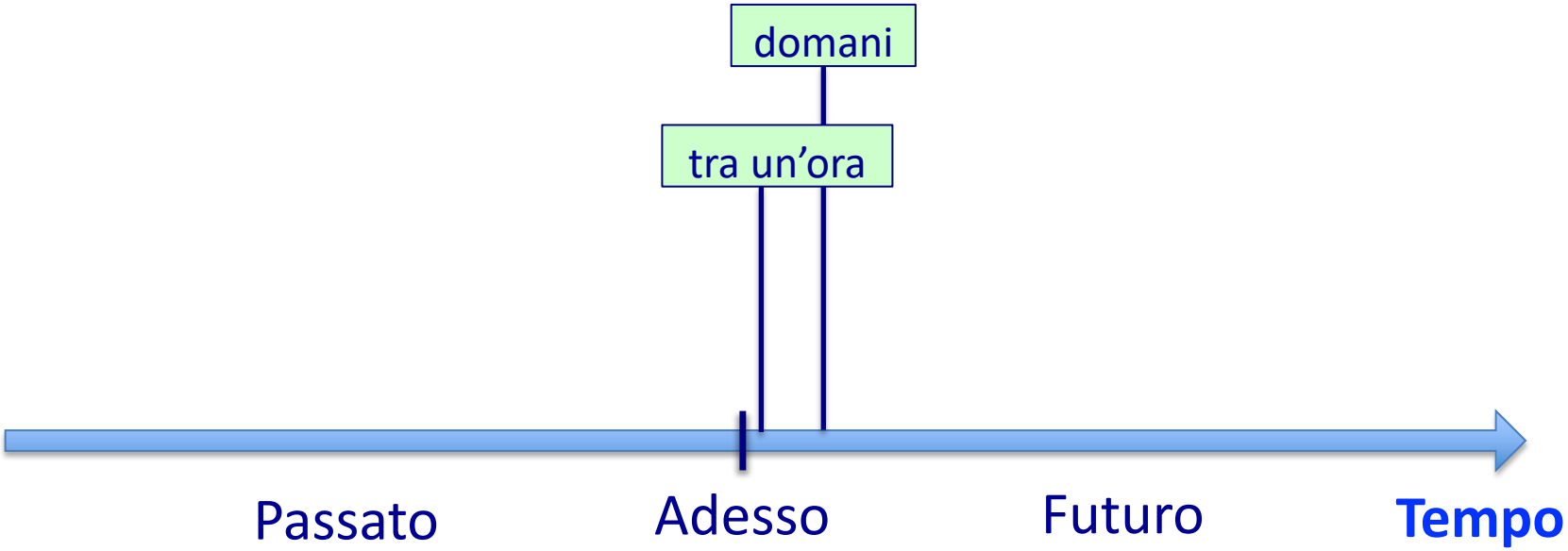
2) Tempo e spazio assoluti

La linea del tempo

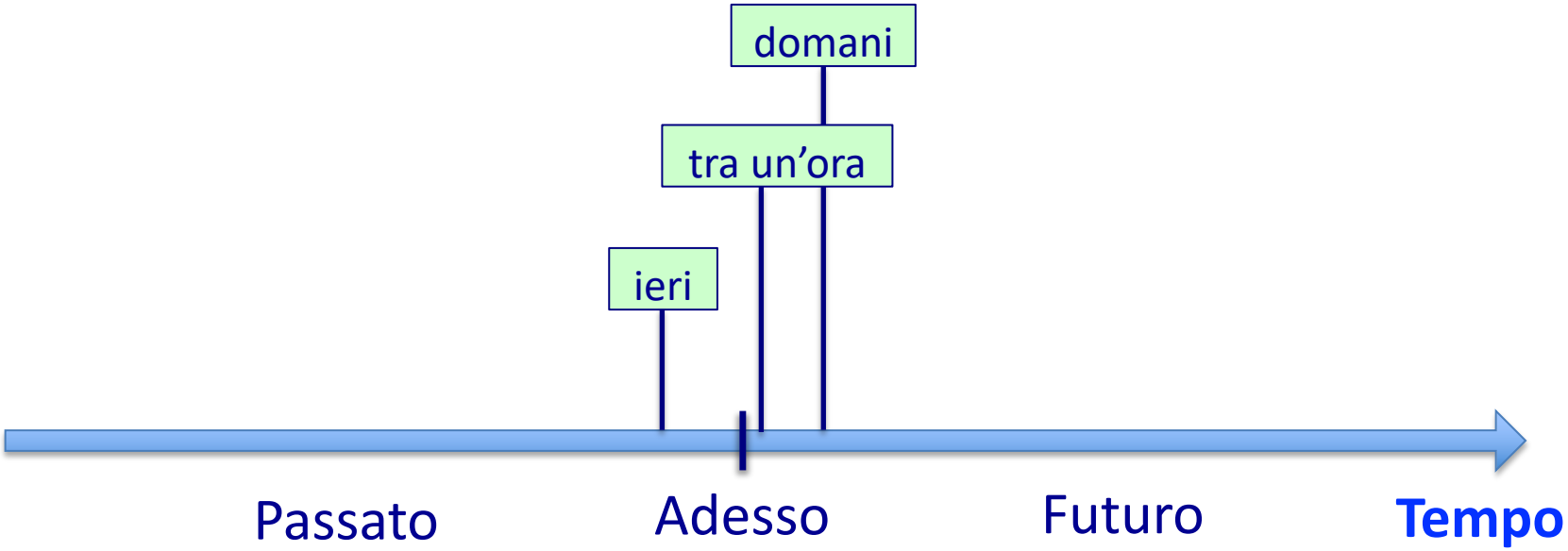
La linea del tempo



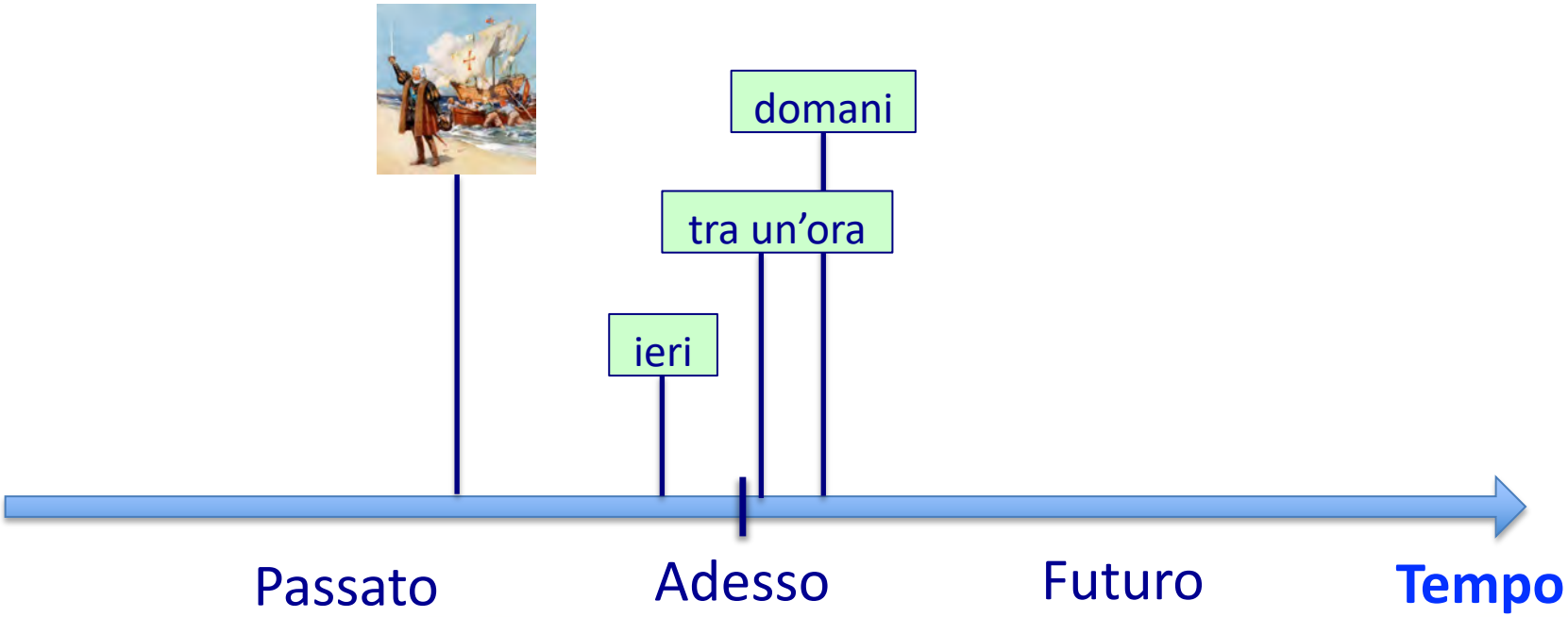
La linea del tempo



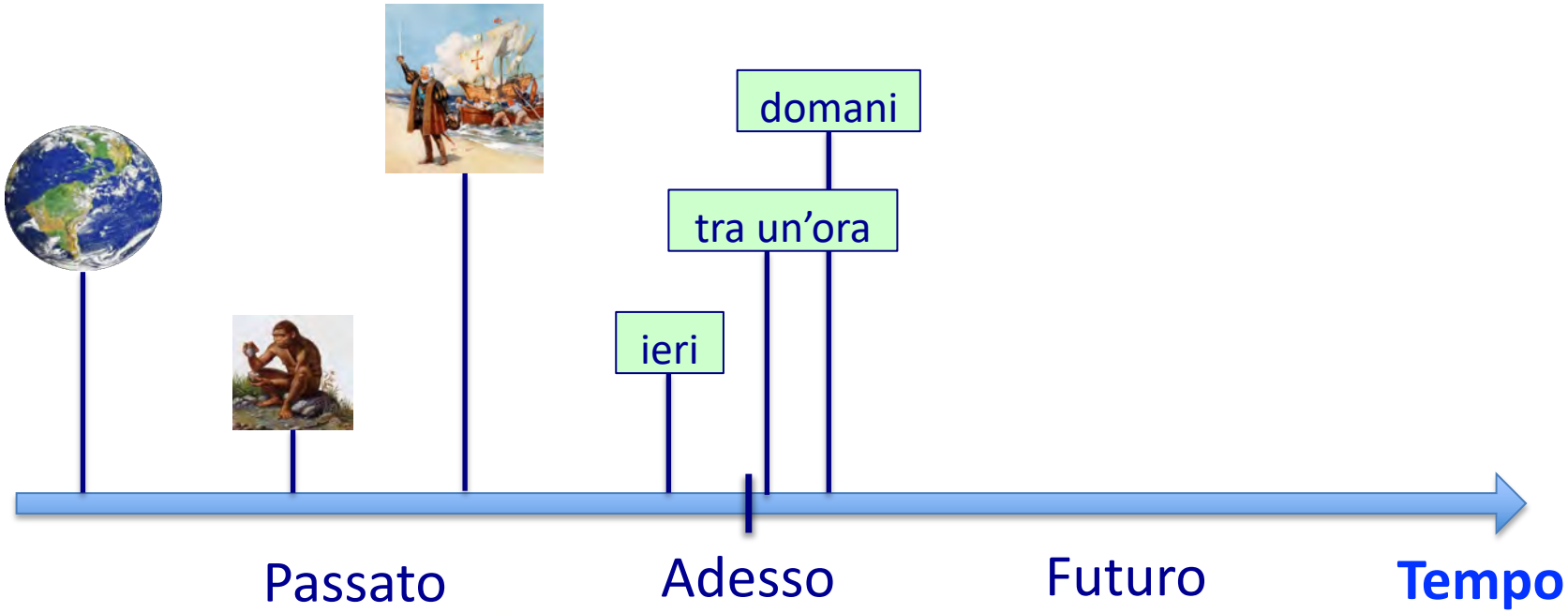
La linea del tempo



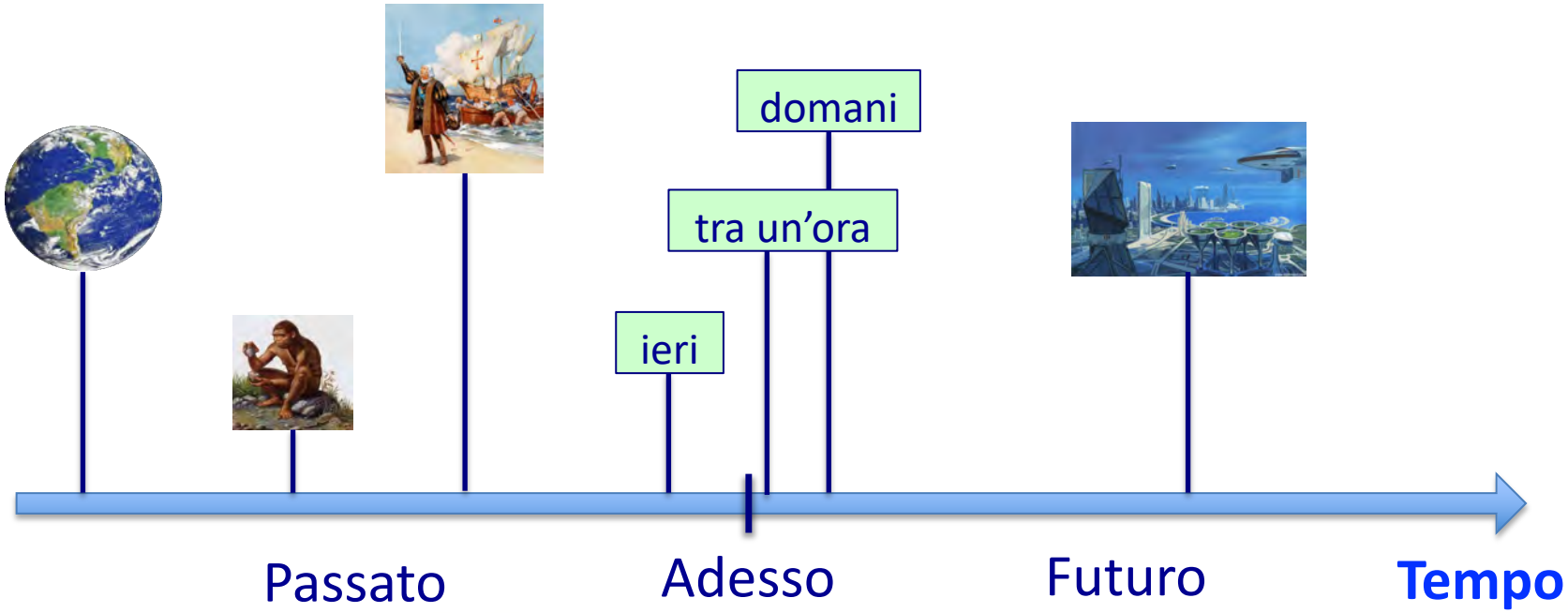
La linea del tempo

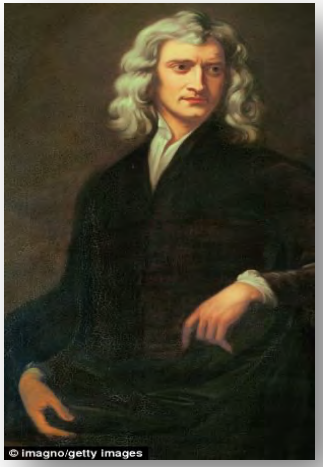


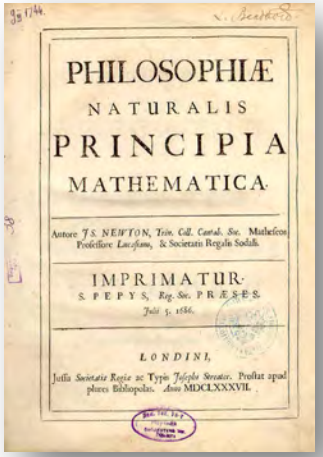
La linea del tempo



La linea del tempo






PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Mathefeos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Il tempo assoluto di Newton

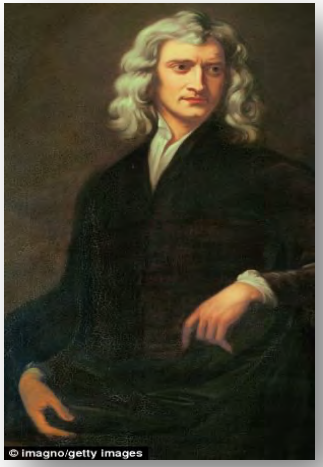
Le leggi della meccanica richiedono una definizione di spazio e di tempo

Esempio:
La legge di inerzia
(1ª Legge del moto)

"Ciascun corpo permane nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché una forza non agisce su di esso"

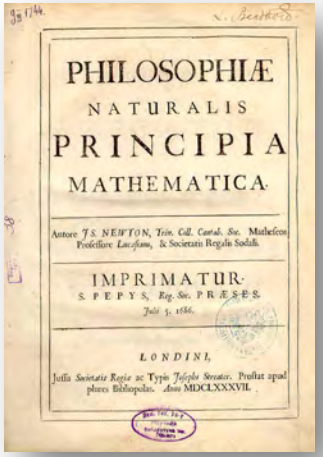
Il moto uniforme è definito rispetto ad uno scorrere del tempo.
Quale tempo?

Ad esempio il tempo definito dal moto di rotazione della Terra, oppure dal suo moto di rivoluzione attorno al Sole, o il tempo atomico ...



Il tempo assoluto di Newton

Le leggi della meccanica richiedono una definizione di spazio e di tempo


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

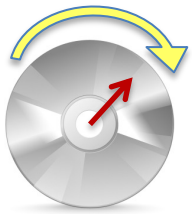
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

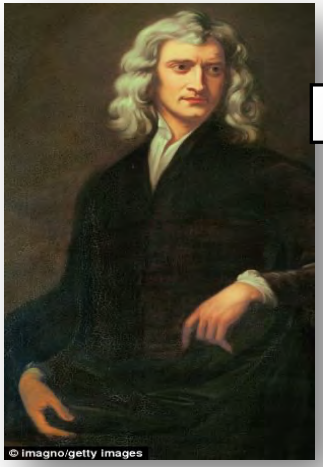
Esempio:
La legge di inerzia
(1ª Legge del moto)

"Ciascun corpo permane nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché una forza non agisce su di esso"

Analogamente: rispetto a quale spazio (sistema di riferimento) è definito lo stato di quiete o di moto? E rispetto a quale spazio è definito il moto lungo una linea retta?

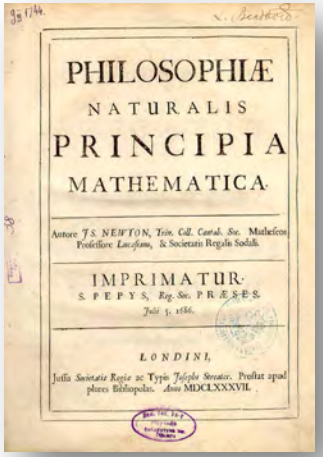


Il tempo assoluto



Newton perviene alla conclusione che esiste un tempo assoluto

"Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

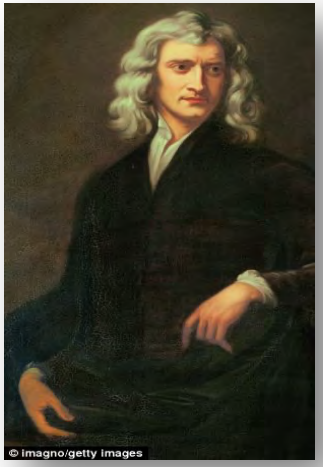
Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

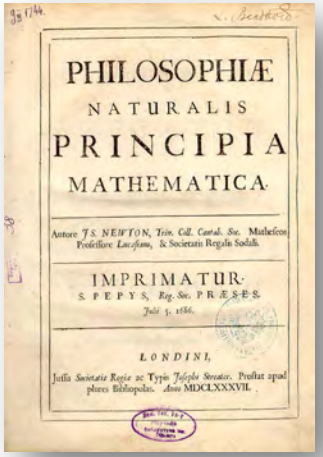
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

"Il tempo relativo, apparente e volgare, è una misura (esatta o inesatta) sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del vero tempo: tali sono l'ora, il giorno, il mese, l'anno…

È possibile che non vi sia movimento talmente uniforme per mezzo del quale si possa misurare accuratamente il tempo. Tutti i movimenti possono essere accelerati o ritardati, ma il flusso del tempo assoluto non può essere mutato."




PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Mathefeos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

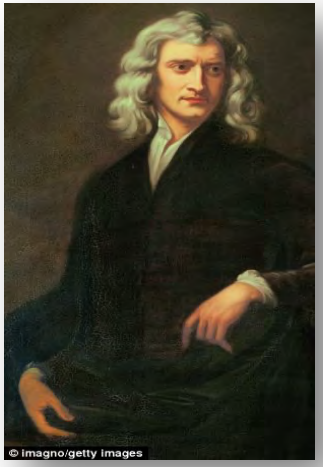
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Lo spazio assoluto di Newton

"Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché d'esterno, rimane sempre uguale e immobile."

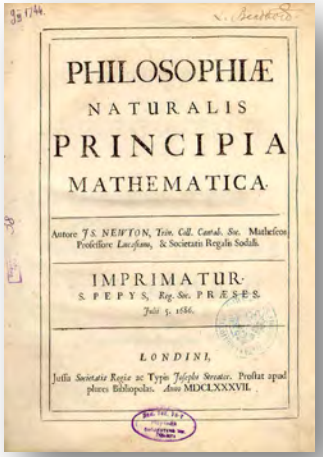
"Lo spazio relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso al posto dello spazio immobile…

Potrebbe anche darsi che non vi sia alcun corpo in quiete al quale possano venire riferiti sia i luoghi che i moti..."



Lo spazio assoluto di Newton

"Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché d'esterno, rimane sempre uguale e immobile."


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

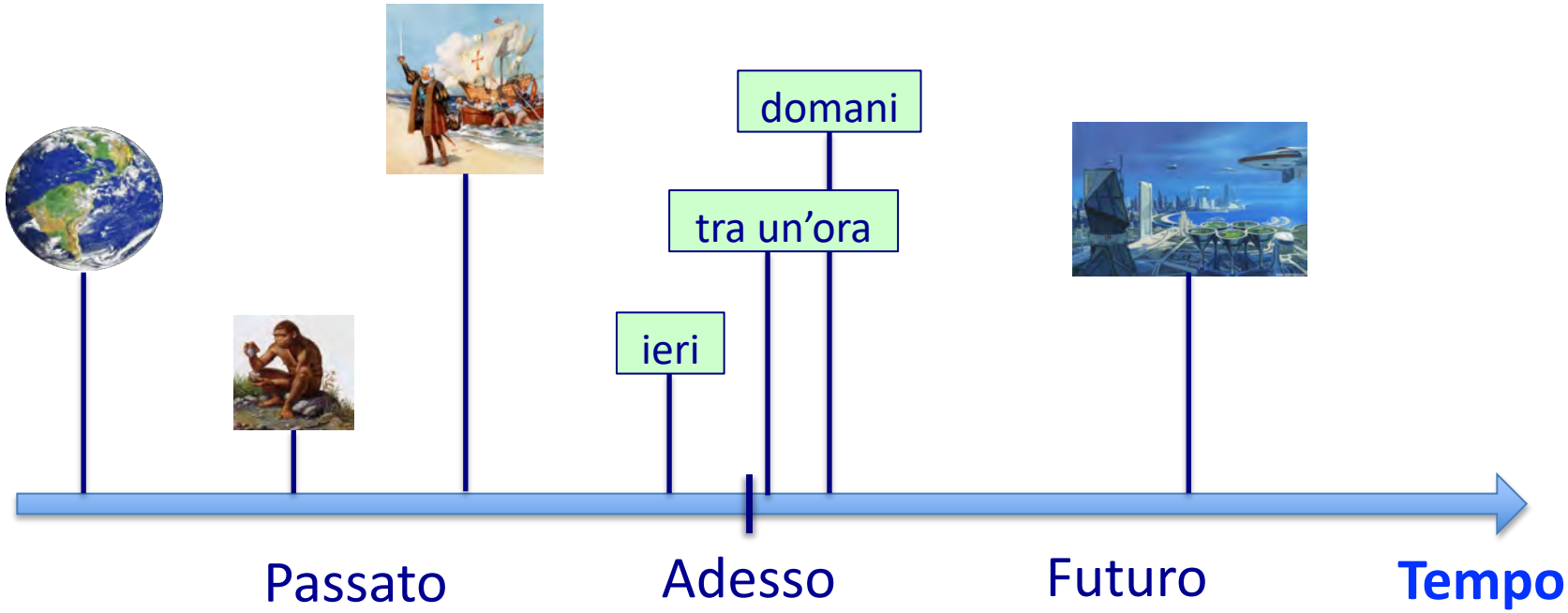
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Questa definizione, "*senza relazione ad alcunché d'esterno*", in parte stupisce. Newton spesso afferma di voler indagare soltanto su ciò che è reale, ossia su ciò che può essere cioè rivelato dall'osservazione. Un suo famoso motto è:

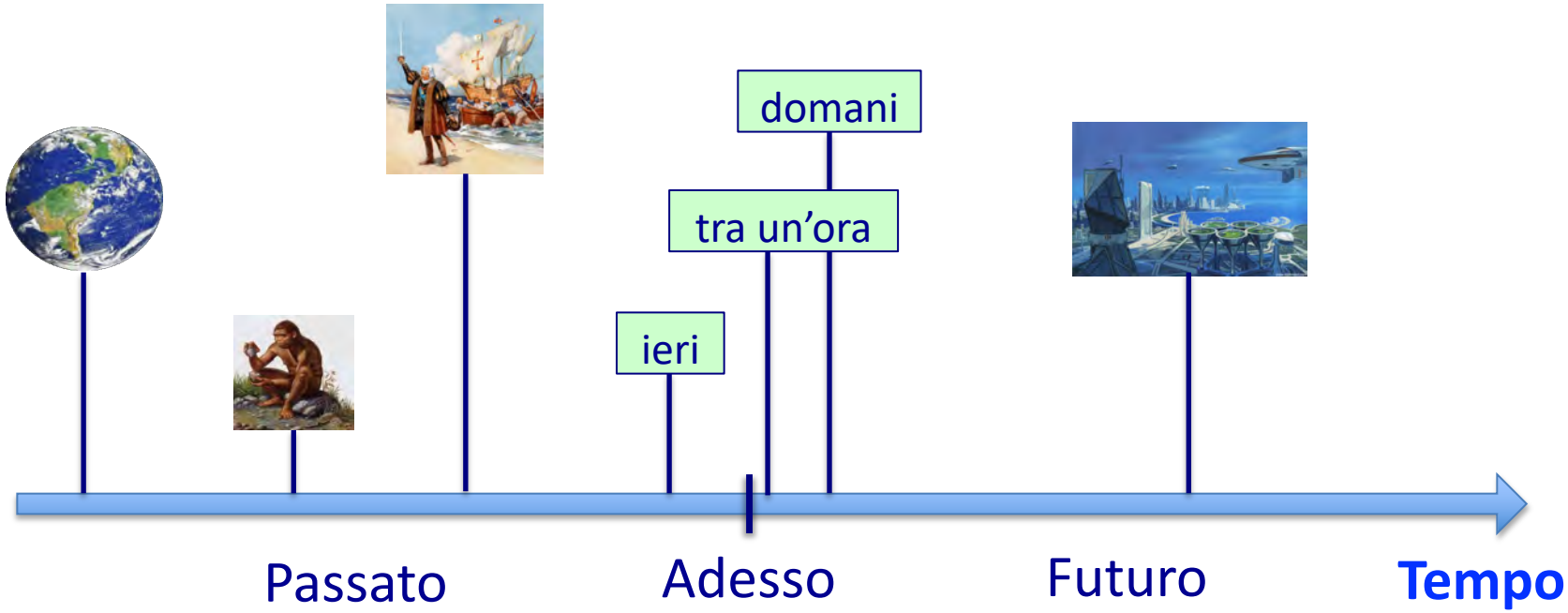
"hypotheses non fingo" (non formulo ipotesi)

Tuttavia, ciò che esiste *senza relazione ad alcunché d'esterno* non è osservabile e non costituisce dunque un fatto reale.

La linea del tempo

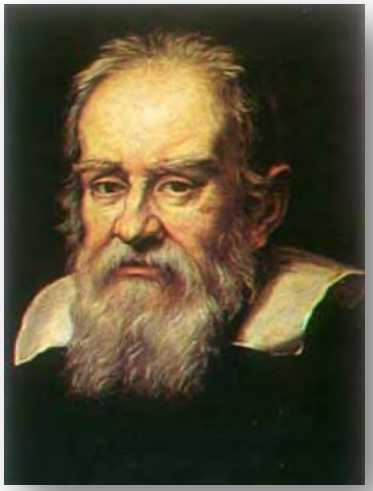


La linea del tempo

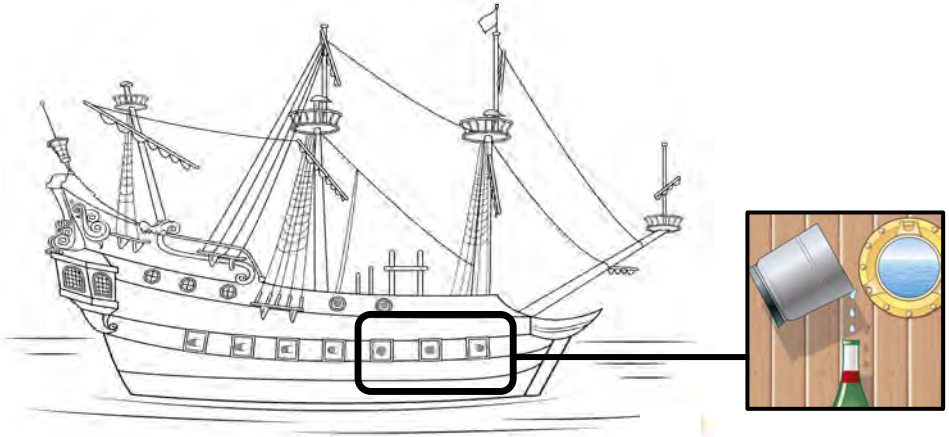


Ma questa rappresentazione del tempo è sbagliata

3) Tempo e spazio relativi



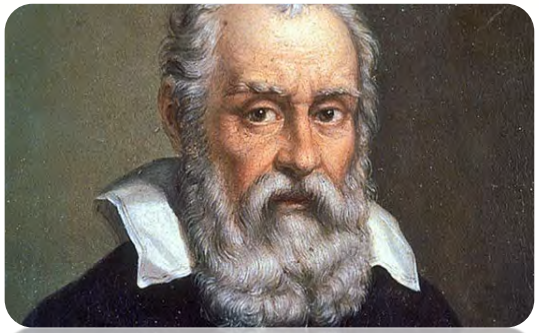
Il principio di relatività - Galileo 1632



DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STVDIO DI PISA.
E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO
GR. DVCA DI TOSCANA.
Doue ne i congressi di quattro giornate si discorre sopra i due
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO,
Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali tanto per l'vna, quanto per l'altra parte.
CON PRI VILEGI.
IN FIORENZA, Per Gio: Batista Landini MDCXXXII.
CON LICENZA DE' SVPERIORI.

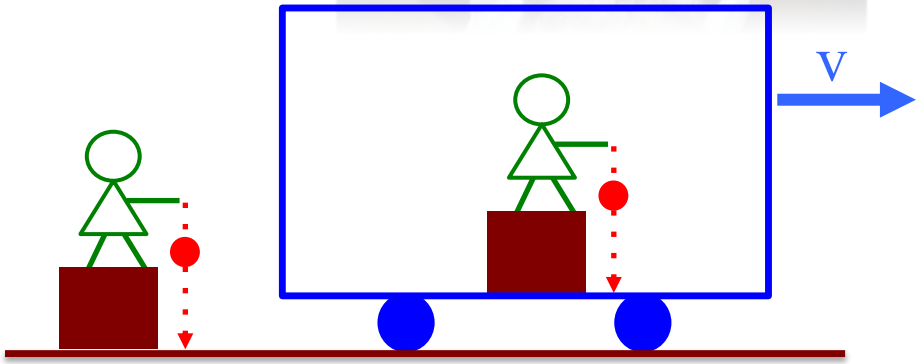
... fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma.”

Il principio di relatività



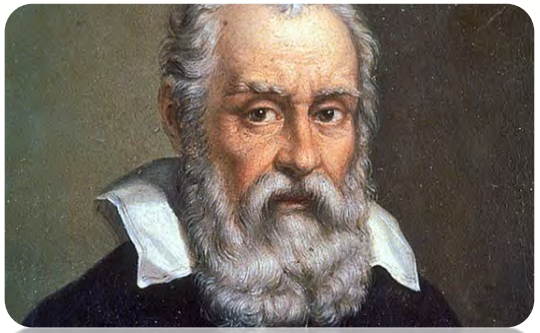
Le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Non è possibile rilevare con un esperimento, effettuato all'interno del sistema di riferimento, il moto rettilineo uniforme del sistema stesso



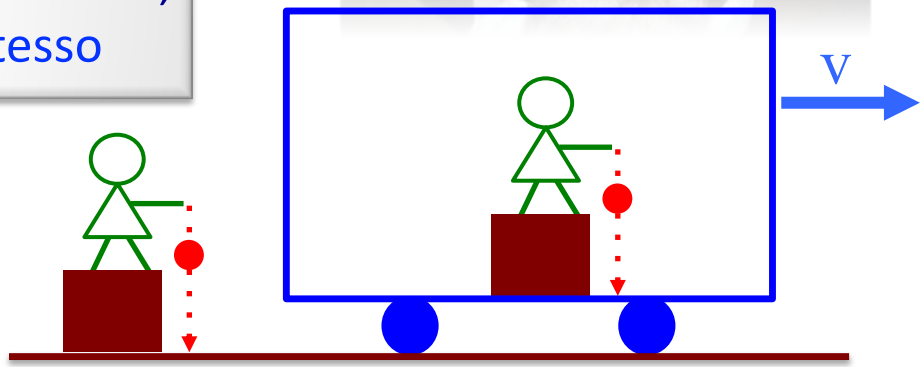
La velocità non è una proprietà assoluta, ma dipende dal sistema di riferimento. Ma allora le leggi fisiche non possono contenere velocità assolute

Il principio di relatività



Altre conseguenze:

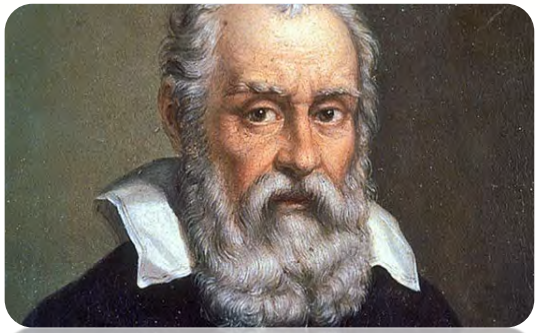
Non è possibile rilevare con un esperimento, effettuato all'interno del sistema di riferimento, il moto rettilineo uniforme del sistema stesso



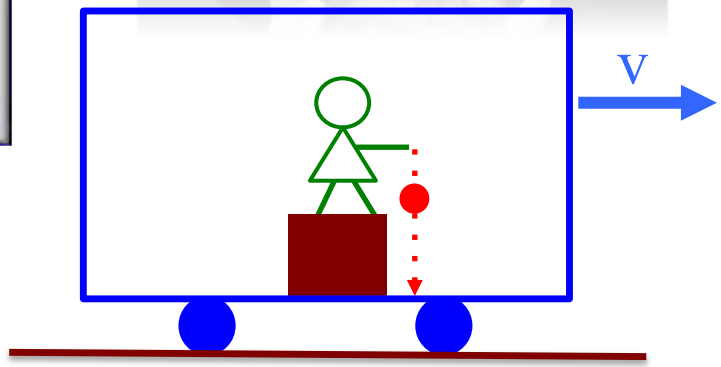
- Lo spazio assoluto, *sempre uguale e immobile*, non è osservabile da alcun esperimento. Due diversi sistemi di riferimento inerziali possono entrambi considerarsi legittimamente in quiete rispetto allo spazio assoluto.

Lo spazio assoluto, dunque, non ha realtà fisica.

Il principio di relatività



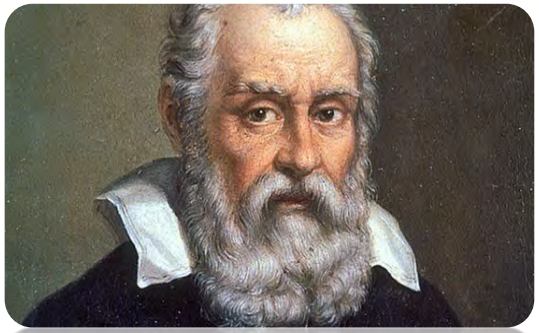
Il principio di relatività comporta l'impossibilità di stabilire se due eventi che avvengono a tempi distinti accadono nello stesso punto dello spazio



Per esempio: due rimbalzi successivi di una palla nello stesso punto del pavimento del treno avvengono in punti di spazio diversi per un osservatore al binario.
Nessuno dei due punti di vista può essere considerato privilegiato rispetto all'altro.

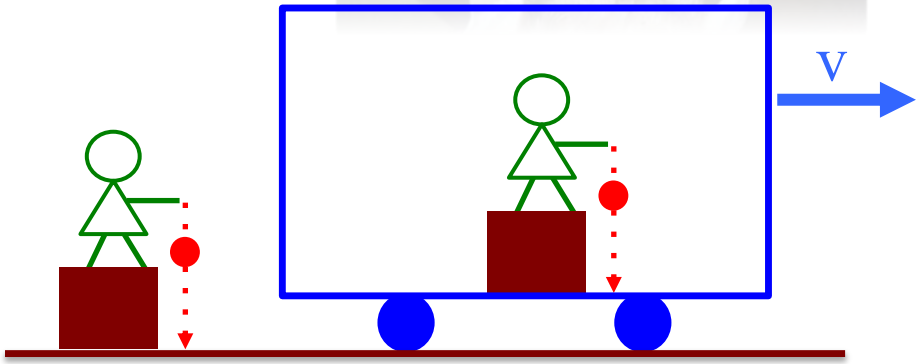
La relatività di Einstein estenderà questa stessa idea anche al tempo

Il principio di relatività

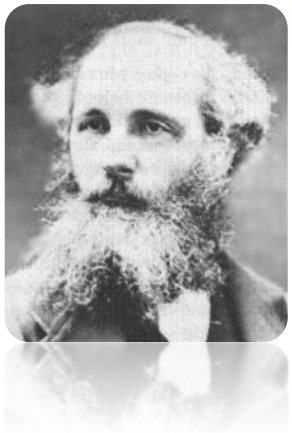


Le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Non è possibile rilevare con un esperimento, effettuato all'interno del sistema di riferimento, il moto rettilineo uniforme del sistema stesso



La velocità non è una proprietà assoluta, ma dipende dal sistema di riferimento. Ma allora le leggi fisiche non possono contenere velocità assolute



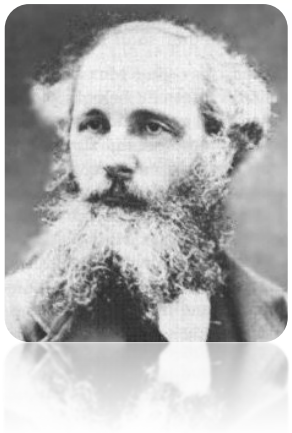
Le leggi dell'elettromagnetismo

J. C. Maxwell
(1865)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad , \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0$$

c ≈ 300.000 Km/s

Ma in quale sistema di riferimento ?



Le leggi dell'elettromagnetismo

J. C. Maxwell
(1865)

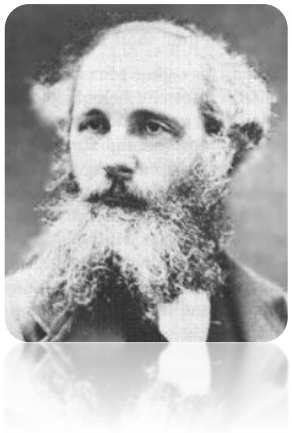
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad , \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0$$

c ≈ 300.000 Km/s

Ma in quale sistema di riferimento ?

Risposta plausibile: come tutte le altre onde conosciute (onde d'acqua, onde sonore, …) anche le onde elettromagnetiche sono perturbazioni che si propagano in un mezzo: l'etere.

➡ c è la velocità di propagazione nel sistema di riferimento dell'etere



Le leggi dell'elettromagnetismo

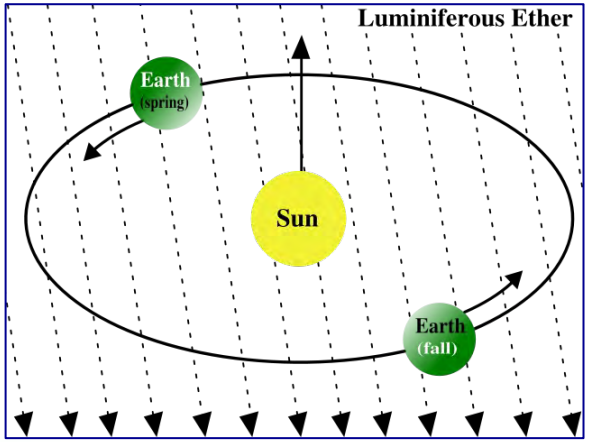
J. C. Maxwell
(1865)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad , \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0$$

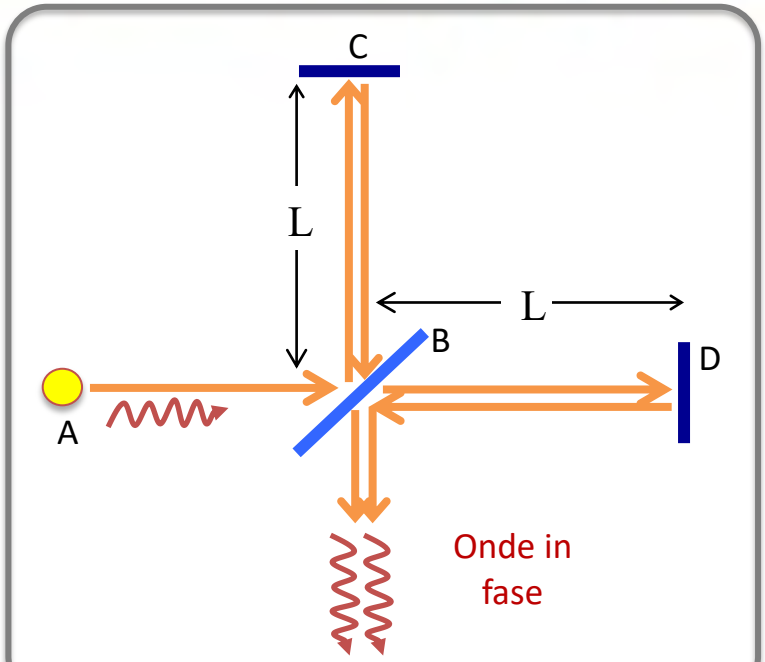
c ≈ 300.000 Km/s

c è la velocità di propagazione della luce nel sistema di riferimento dell'etere

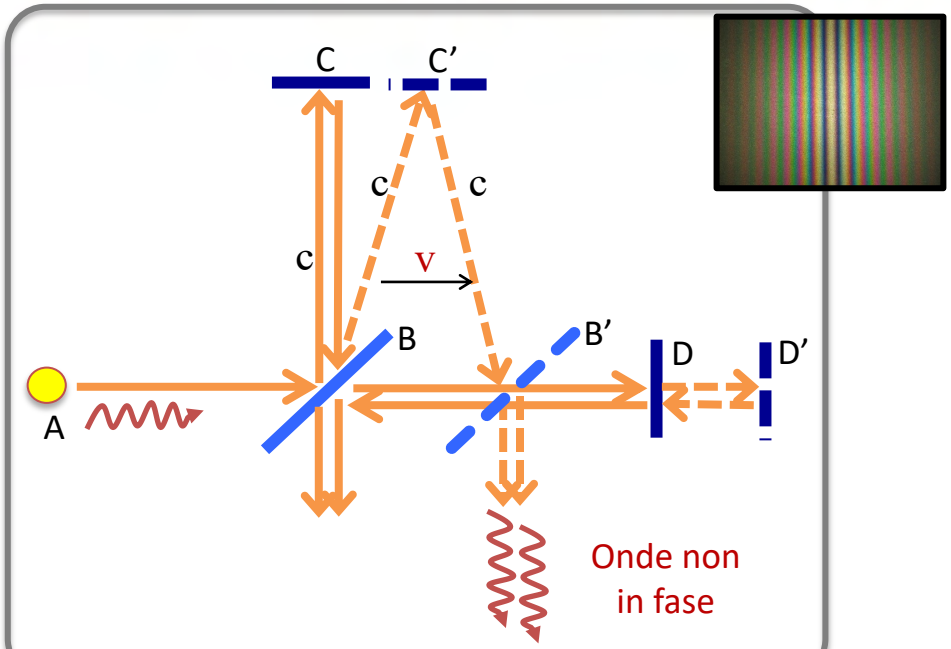
Ma nel 1887, un famoso esperimento condotto da Michelson e Morley escluse questa possibilità



L'esperimento di Michelson e Morley



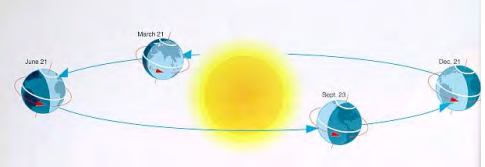
Terra in quiete rispetto all'Etere



Terra in moto rispetto all'Etere

R = distanza Terra-Sole = 150.000.000 Km

T = 1 anno = 365,25 giorni = 8766 ore



v = velocità della Terra = $2\pi R/T \approx$ 107.000 Km/h ≈ 30 Km/sec

$v/c \approx 10^{-4}$

L'esperimento di Michelson e Morley

Risultato "aspettato"

- t_{1a} = tempo di andata da B a D:

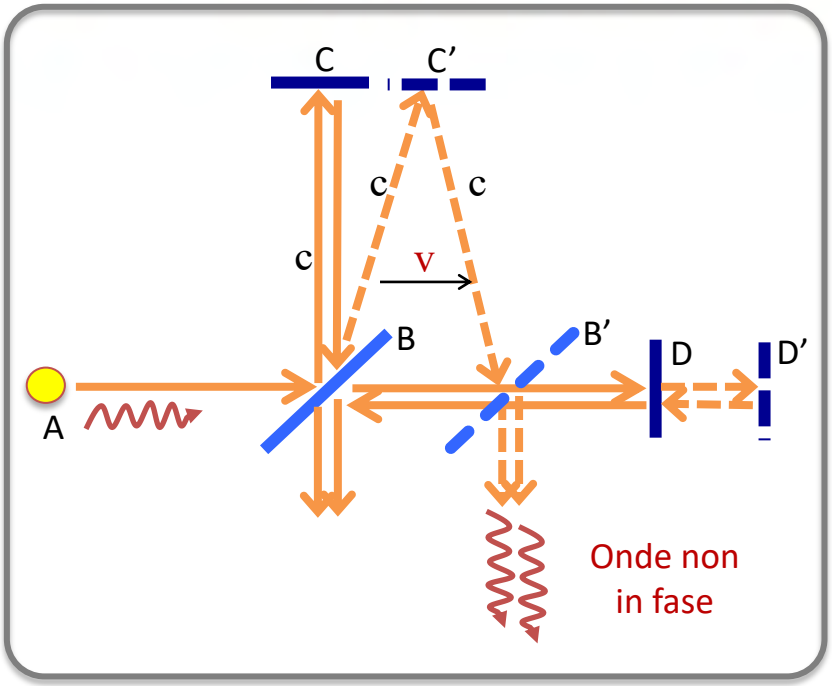
$$ct_{1a} = L + vt_{1a} \quad \Longrightarrow \quad t_{1a} = \frac{L}{c-v}$$

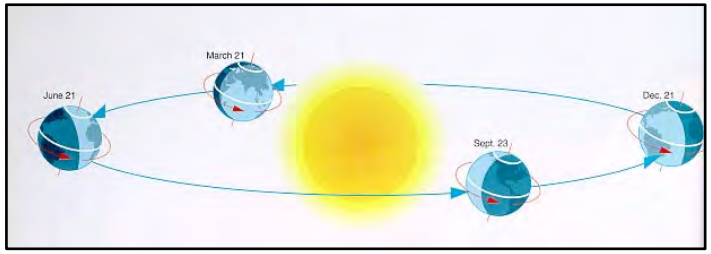
- t_{1r} = tempo di ritorno da D a B:

$$ct_{1r} = L - vt_{1r} \quad \Longrightarrow \quad t_{1r} = \frac{L}{c+v}$$

- $t_1 = t_{1a} + t_{1r}$ = tempo del tragitto BDB:

$$t_1 = t_{1a} + t_{1r} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$$





L'esperimento di Michelson e Morley

Risultato "aspettato"

- t_{2a} = tempo di andata da B a C:

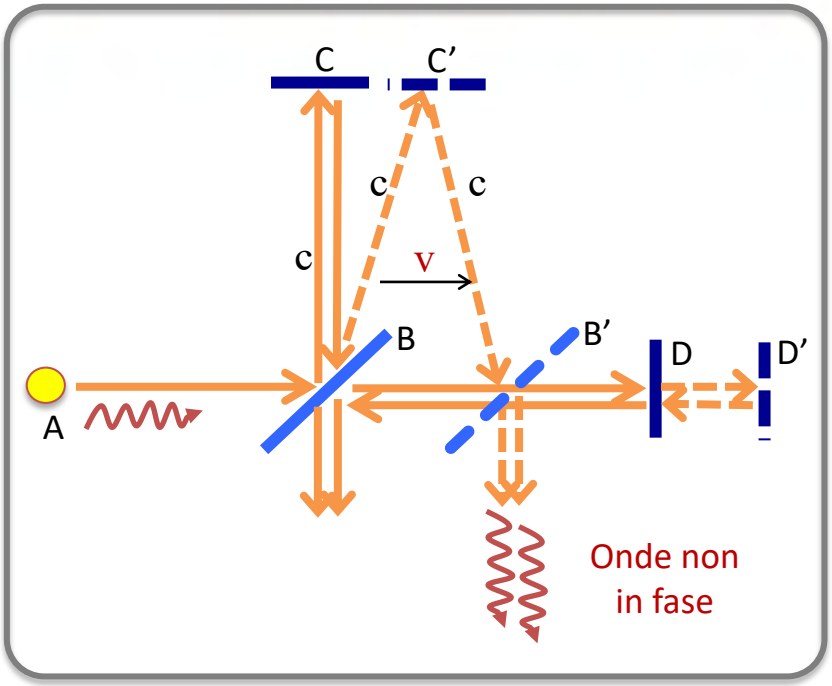
$$(ct_{2a})^2 = L^2 + (vt_{2a})^2 \longrightarrow t_{2a} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

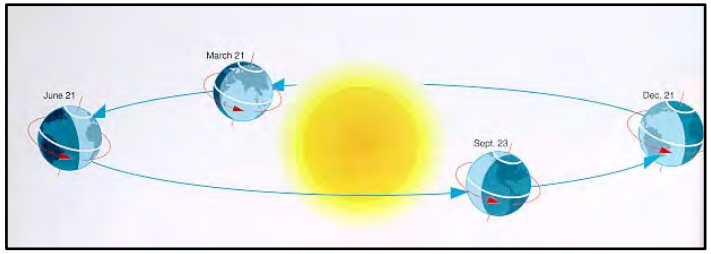
- t_{2r} = tempo di ritorno da C a B = t_{2a}:

$$t_{2r} = t_{2a} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

- $t_2 = 2\, t_{2a}$ = tempo del tragitto BCB:

$$t_2 = 2t_{2a} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



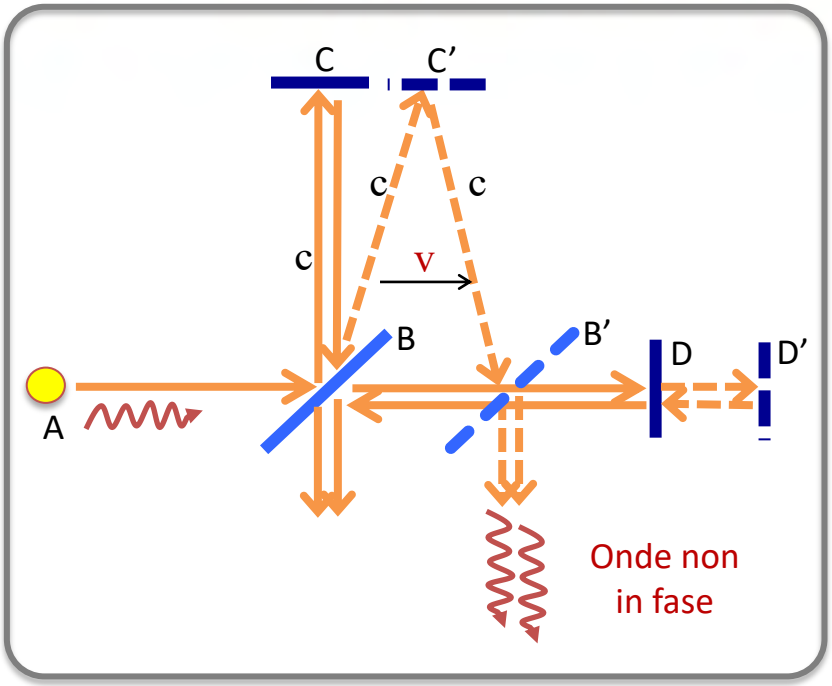


L'esperimento di Michelson e Morley

t_1 = tempo per BDB ; t_2 = tempo per BCB

$$t_1 = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$$

$$t_2 = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



Risultato "aspettato" :

$$t_1 \neq t_2$$

Risultato dell'esperimento:

$$t_1 = t_2$$

La conclusione che ne trassero Michelson e Morley fu che la Terra nel suo moto trascina l'etere circostante e dunque è in quiete rispetto all'etere. Ma questa ipotesi risultava in contrasto con altre evidenze sperimentali.

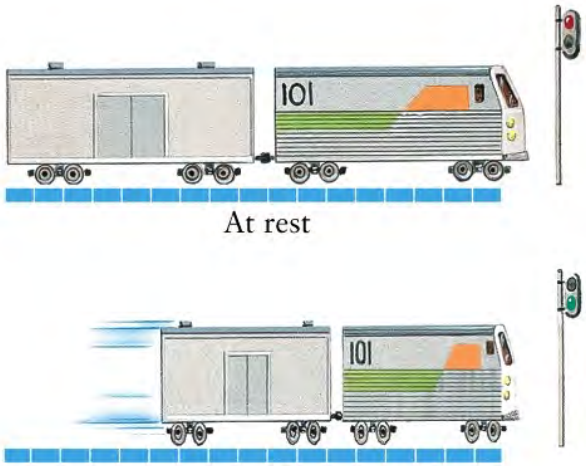
La contrazione di Lorentz

La prima idea fruttuosa per spiegare il risultato dell' esperimento di Michelson e Morley venne dal fisico olandese Hendrik Lorentz.

Lorentz suggerì che i corpi materiali si contraggono quando sono in movimento e che la contrazione avviene solo nella direzione del moto:

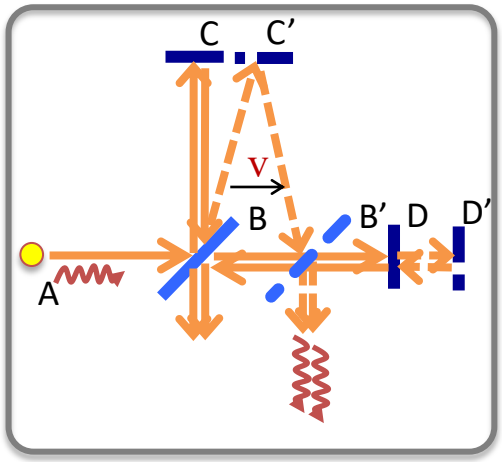
$$L_{\parallel} = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$L_{\perp} = L_0$$



La contrazione di Lorentz

Allora, nell' esperimento di Michelson e Morley:



$$t_2 = \frac{2L_\perp / c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L_0 / c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

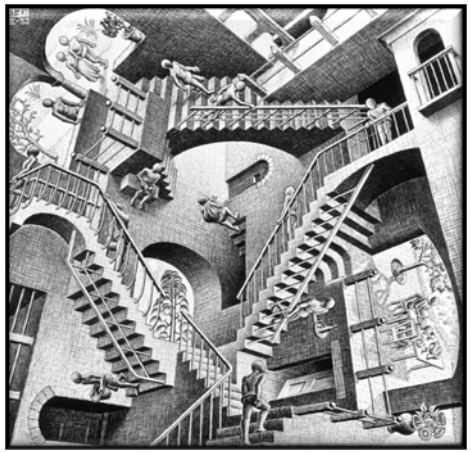
$$t_1 = \frac{2L_\parallel / c}{1 - v^2/c^2} = \frac{2L_0 / c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t_2$$

$$L_\parallel = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

- La spiegazione era molto *ad hoc* e l'origine della contrazione oscura
- Lo stato di quiete o di moto rispetto all'etere non è misurabile. Dunque l'etere non ha realtà fisica. Ma Lorentz non compie il passo…

La teoria della relatività

Albert Einstein, 1905

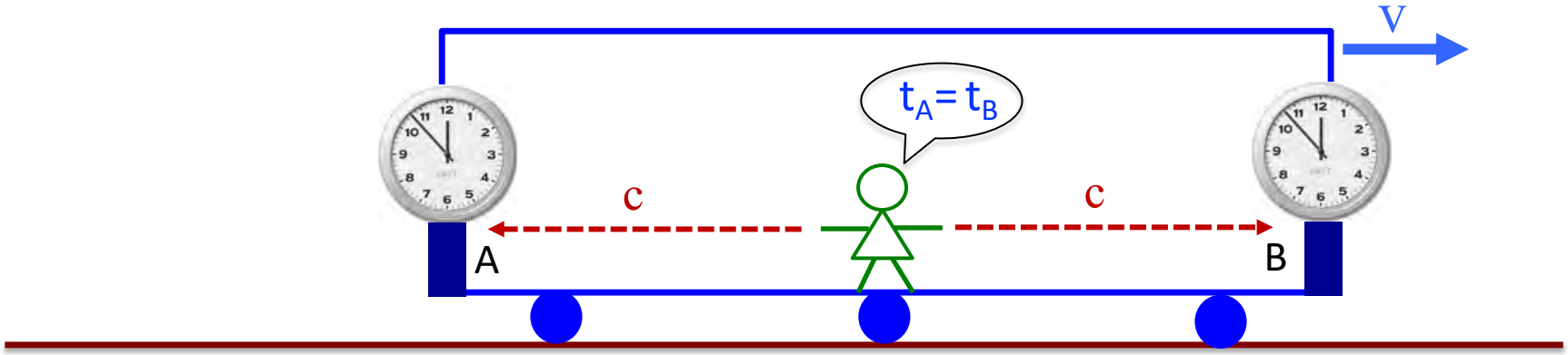


1. Tutti i fenomeni fisici si svolgono in modo identico nei sistemi di riferimento inerziali

2. La velocità della luce nel vuoto c è la stessa in ogni sistema di riferimento

Comporta una profonda revisione dei concetti di spazio e tempo

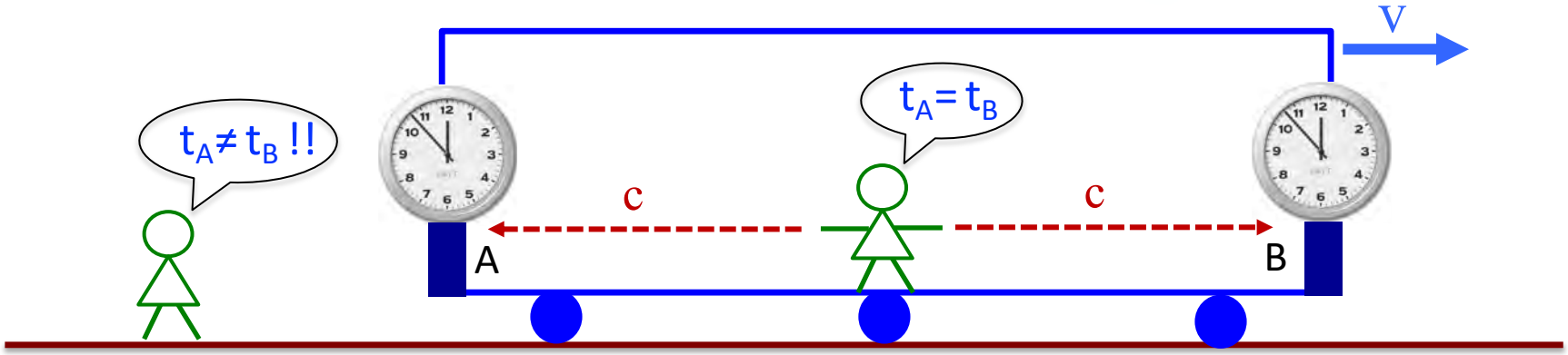
Simultaneità



- Per l'osservatore sul treno i due eventi sono simultanei.

Se così non fosse, potrebbe dedurne di essere in movimento, in violazione del principio di relatività.

Simultaneità



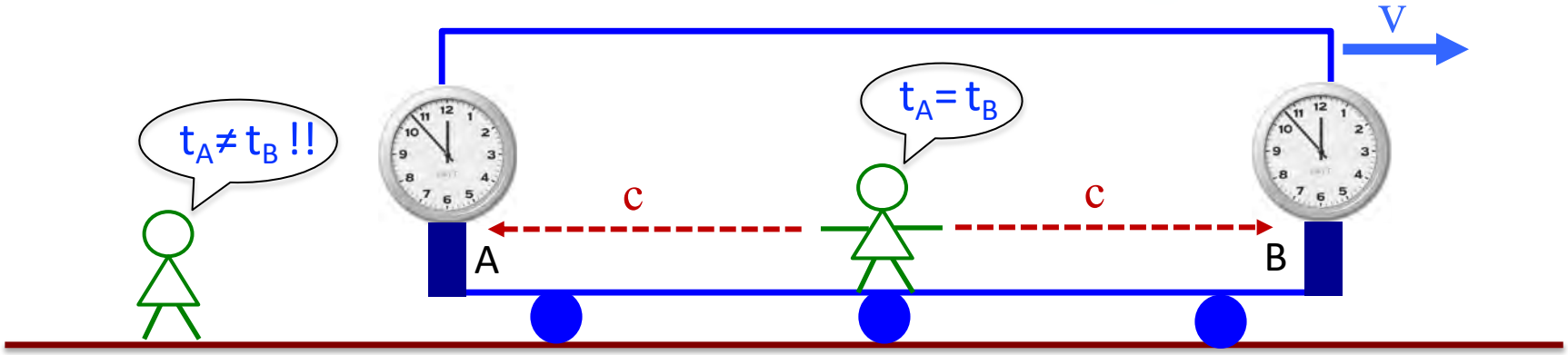
- Per l'osservatore sul treno i due eventi sono simultanei.

Se così non fosse, potrebbe dedurne di essere in movimento, in violazione del principio di relatività.

- Per l'osservatore al binario il segnale luminoso giunge prima al punto A, che nel frattempo si è avvicinato e poi al punto B, che nel frattempo si è allontanato.

I due eventi non sono simultanei

Simultaneità



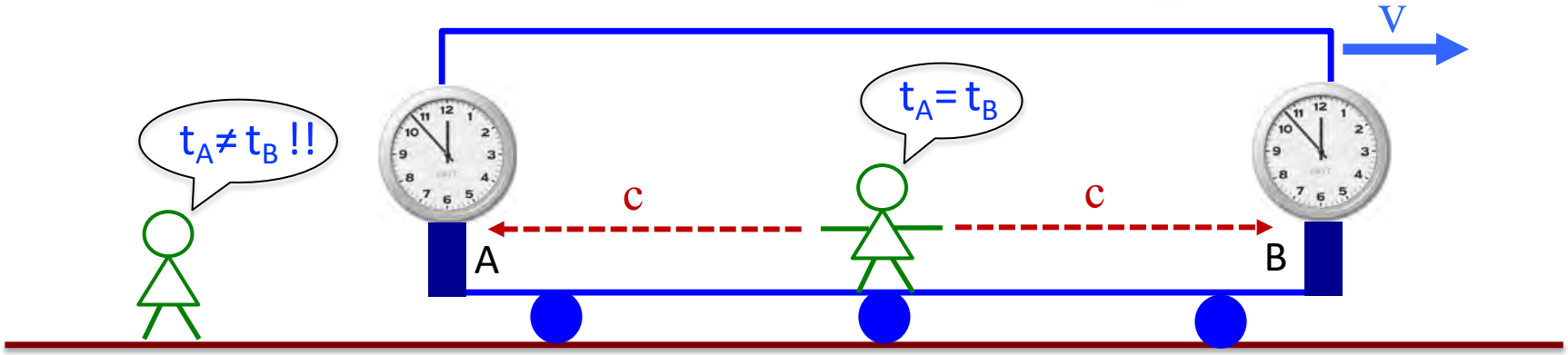
$$ct_A = \frac{L}{2} - vt_A \Rightarrow t_A = \frac{L/2}{c+v}$$

$$ct_B = \frac{L}{2} + vt_B \Rightarrow t_B = \frac{L/2}{c-v}$$

$$t_B - t_A = \frac{Lv/c^2}{1 - v^2/c^2}$$

I due eventi non sono simultanei

Simultaneità

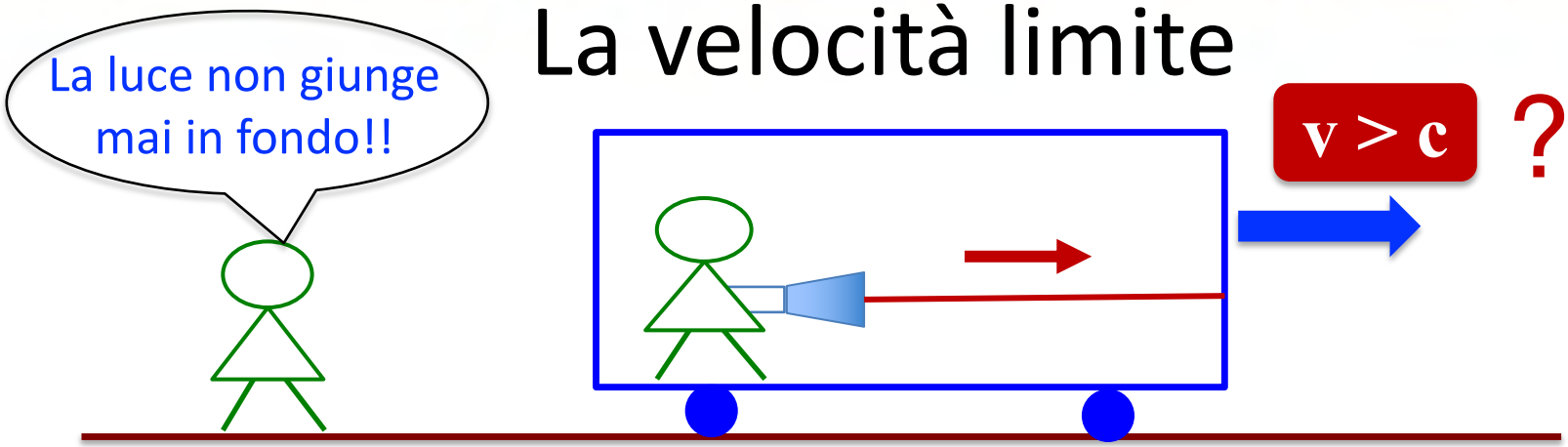


Dunque, per i due principi alla base della teoria della relatività,

$$t_B - t_A = \frac{L v / c^2}{1 - v^2 / c^2}$$

il concetto di simultaneità perde di significato *assoluto*

La velocità limite



Se il treno si potesse muovere velocità v > c il segnale luminoso non raggiungerebbe mai la parete del vagone.

Ma da questo l'osservatore sul treno potrebbe dedurne di essere in movimento, in violazione del principio di relatività. Dunque:

La velocità della luce è la velocità massima

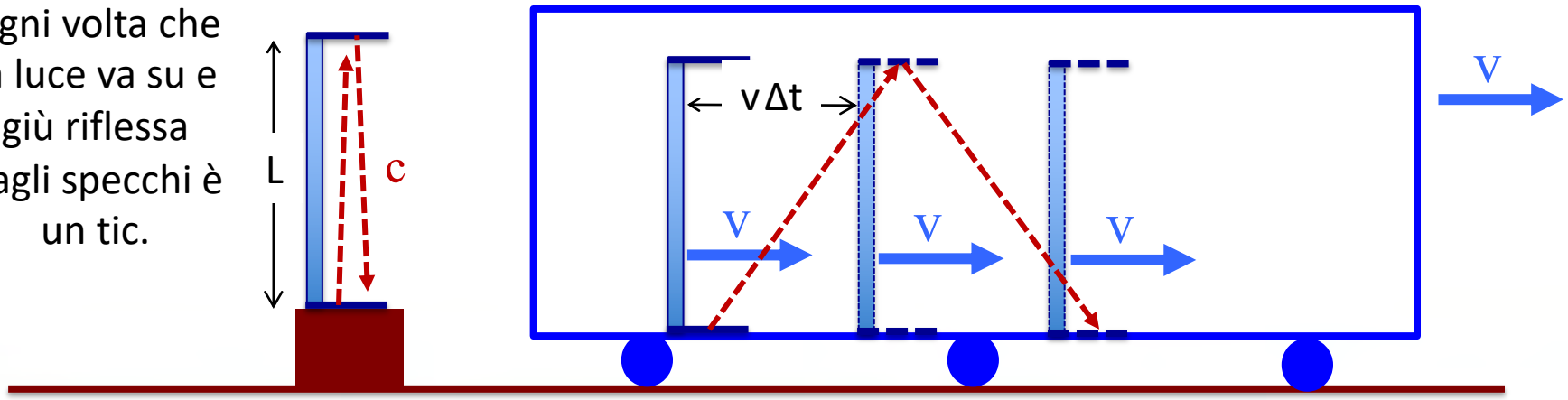
e non può essere raggiunta da nessun sistema fisico (se non privo di massa)

La dilatazione del tempo

La teoria della relatività implica che un qualunque orologio in movimento appare più lento ad un osservatore fermo

Consideriamo un tipo molto semplice di orologio, un "orologio a fotoni":

Ogni volta che la luce va su e giù riflessa dagli specchi è un tic.



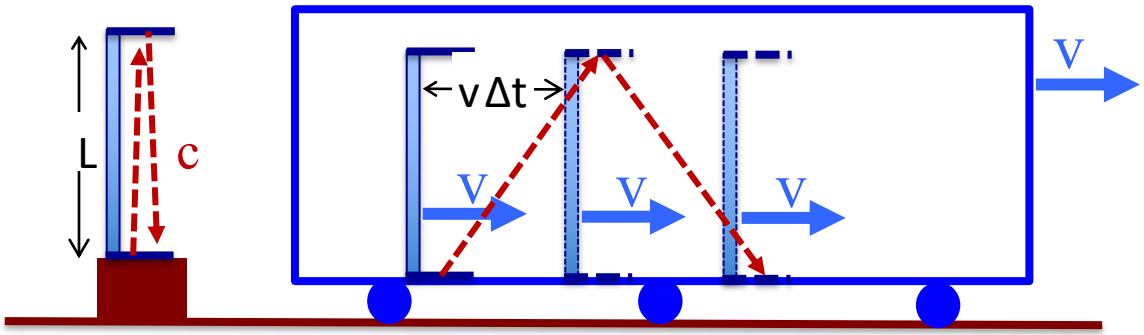
La dilatazione del tempo

- Orologio in quiete: Δt_0

$$c\Delta t_0 = L$$

- Orologio in moto: Δt

$$(c\Delta t)^2 = L^2 + (v\Delta t)^2$$



$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \gamma \Delta t_0$$

Il tempo scandito dall'orologio in moto scorre più lentamente del tempo scandito dall'orologio fermo

Se v =1/10000 c = 30 Km/s 1 ora si "allunga" di 18 microsecondi

Il tempo elastico

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \gamma \, \Delta t_0$$

Se questo risultato vale per l'orologio a fotoni, allora deve valere anche per qualunque altro tipo di orologio.

Se così non fosse, infatti, dalla discrepanza tra un orologio a fotoni ed un orologio di altro tipo sul treno in movimento si potrebbe determinare la velocità del treno, in violazione del principio di relatività.

Il tempo elastico

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \gamma \, \Delta t_0$$

Poiché tutti gli orologi sul treno scorrono più lentamente, poiché una qualunque misura del tempo indica una durata più lunga, dobbiamo concludere che:

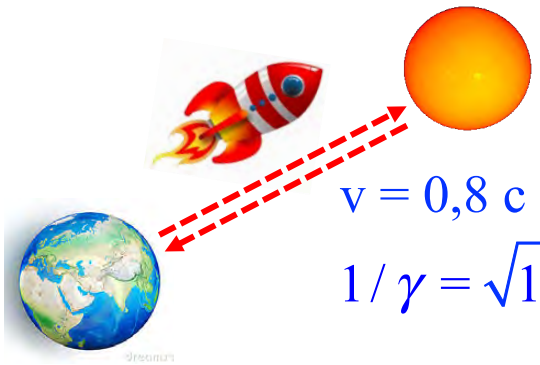
il tempo stesso scorre più lentamente nel sistema in moto

Il tempo elastico

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \gamma \, \Delta t_0$$

Per un uomo sul treno un qualunque fenomeno, la frequenza del suo battito cardiaco, la velocità dei suoi pensieri, il tempo che impiega il suo sigaro a consumarsi, il tempo con cui cresce e invecchia, la velocità con cui si sviluppa un cancro, tutti questi fenomeni devono essere rallentati nella stessa misura, perché l'uomo non può realizzare di essere in movimento.

Il “paradosso” dei gemelli

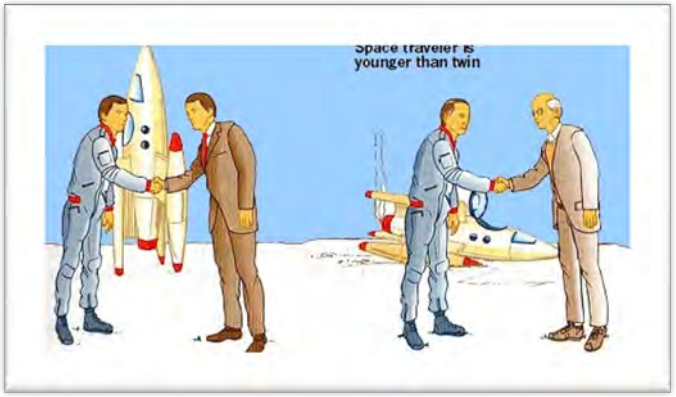


Stella Wolf 359

d=8 anni luce

$$v = 0{,}8\ c = 240.000\ \text{km/s}$$

$$1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0.6$$



- Nel sistema di riferimento della Terra, l’astronave percorre i 16 anni luce del viaggio di andata e ritorno in 20 anni
- Sull’astronave, il tempo scorre al 60% del tempo della Terra, quindi all’arrivo, secondo il calendario dell’ astronave sono trascorsi 12 anni.

Il fratello rimasto sulla Terra è perciò, dopo il viaggio, di 8 anni più vecchio del suo gemello

Il “paradosso” dei gemelli è verificato sperimentalmente

L’esperimento di Hafele e Keating

(1971)

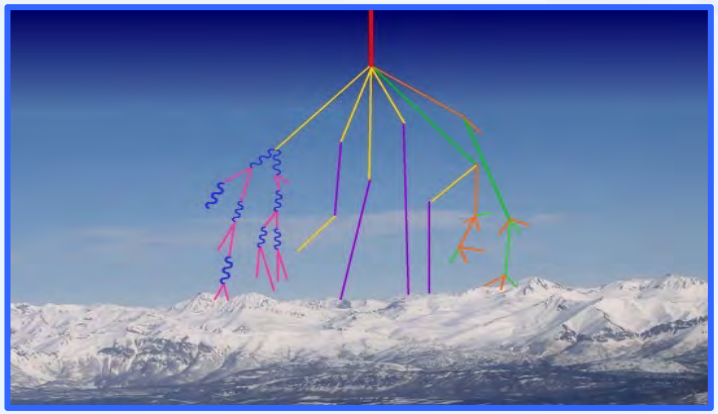
Quattro orologi atomici al cesio hanno volato intorno al mondo su 2 voli di linea commerciali, uno diretto verso est ed uno verso ovest. Rispetto all’orologio atomico di riferimento a terra, gli orologi in volo hanno

- perso circa 59 miliardesimi di secondo nel viaggio in direzione est
- guadagnato circa 273 miliardesimi di secondo nel viaggio in direzione ovest

in perfetto accordo con le previsioni della teoria della relatività.

Il “paradosso” dei gemelli è verificato sperimentalmente

Esperimento di Bruno Rossi e David B. Hall (1940)



I muoni atmosferici
Dilatazione della vita media

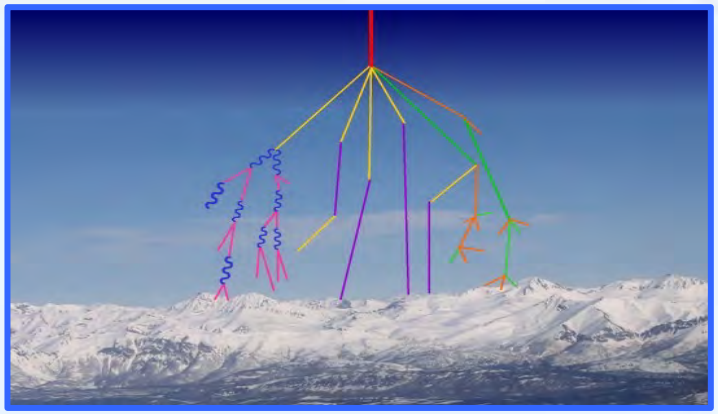
I muoni sono particelle che si disintegrano spontaneamente dopo una vita media di circa 2.2 milionesimi di secondo.

Alcuni muoni giungono sulla Terra nei raggi cosmici, prodotti all’inizio dell’ atmosfera a circa 10 km di altezza.

Seppur viaggiando ad una velocità prossima a quella della luce, data la loro vita media i muoni non potrebbero percorrere più di circa 660 metri.

Il "paradosso" dei gemelli è verificato sperimentalmente

Esperimento di Bruno Rossi e David B. Hall (1940)



I muoni atmosferici
Dilatazione della vita media

Eppure molti muoni vengono rivelati al suolo, in perfetto accordo con le previsioni relativistiche sulla dilatazione del tempo.

$$v \simeq 0.995\, c \qquad \tau_0 \simeq 2.2\ \mu s \qquad L_0 \simeq c\tau_0 \simeq 660\ m$$

Senza la dilatazione del tempo: $N = N_0 e^{-t/\tau_0} = N_0 e^{-L/L_0} \simeq 2\times 10^{-7} N_0$

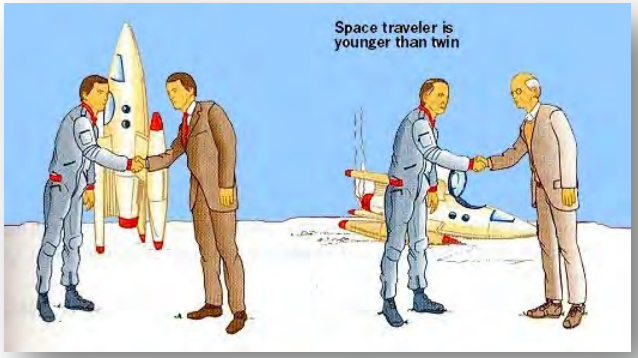
Con la dilatazione del tempo: $N = N_0 e^{-t/(\gamma\, \tau_0)} = N_0 e^{-L/(\gamma L_0)} \simeq 0.22\, N_0$

I viaggi nel tempo

- Il fenomeno della dilatazione dei tempi rende possibili i

VIAGGI NEL FUTURO

- Il viaggio descritto nel paradosso dei gemelli ne è un esempio, un viaggio nel futuro di 8 anni



- Nell'esperimento di Hafele e Keating, l'aereo con l'orologio atomico ha viaggiato nel futuro di circa 60 milardesimi di secondo

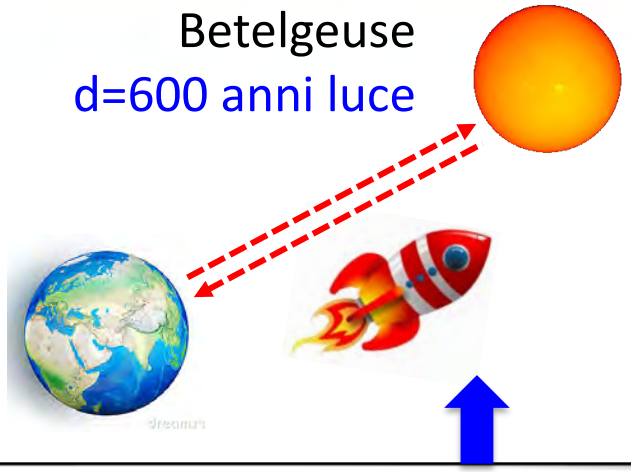
Il tempo elastico

- Ma possiamo fare un viaggio nel futuro di

1000 anni

sopravvivendo alle accelerazioni ?

Sì, le difficoltà sono "solo" di carattere tecnologico



Immaginiamo un viaggio con accelerazione costante ± g:

La velocità massima, raggiunta a metà del tragitto, è v=0.999995 c.
Secondo il tempo dell'astronave, il viaggio sin qui è durato 6 anni.
La stella viene dunque raggiunta dopo 12 anni. Il viaggio di ritorno è analogo. Dunque:

Per l'astronave il viaggio è durato 24 anni
ma sulla Terra sono trascorsi 1200 anni !!

I viaggi nel tempo

- Dunque, muovendosi velocemente si possono fare

VIAGGI NEL FUTURO

Ma sono possibili anche

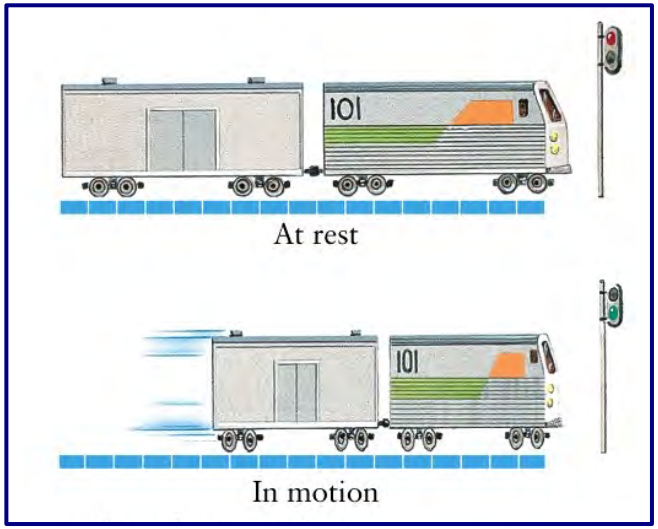
VIAGGI NEL PASSATO ?

Secondo la relatività ristretta, per viaggiare nel passato ci si dovrebbe muovere ad una velocità maggiore della luce, e questo è impossibile. Però...

La contrazione delle lunghezze

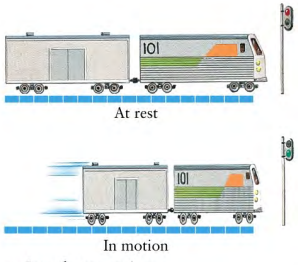
Il fenomeno della dilatazione dei tempi non conduce ad alcuna contraddizione soltanto se si ammette che anche le lunghezze sono modificate nel sistema in moto, esattamente come era stato ipotizzato da Lorentz per spiegare il risultato dell'esperimento di Michelson e Morley:

$$L_{\parallel} = L_0 / \gamma = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$



La contrazione delle lunghezze

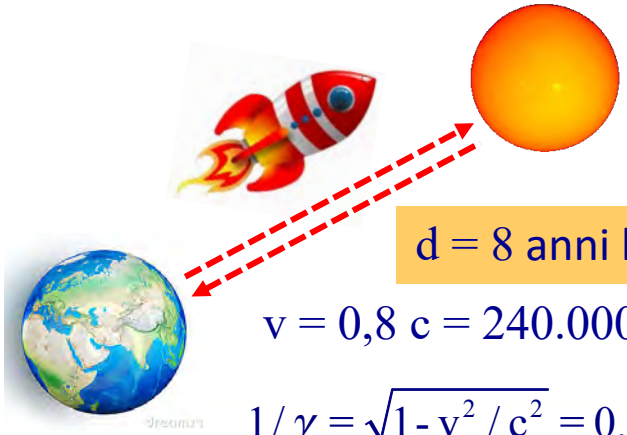
$$L_{\parallel} = L_0 / \gamma = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$



- <u>Paradosso dei gemelli</u>

durata del viaggio: T_{Terra} = 10 anni

$T_{Astronave} = T_{Terra} / \gamma$ = 6 anni



d = 8 anni luce

$v = 0{,}8\ c = 240.000$ km/s

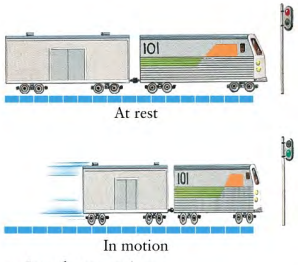
$$1/\gamma = \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 0.6$$

- Secondo il gemello sulla Terra questo si deve alla dilatazione dei tempi: il tempo sull'astronave scorre più lentamente rispetto al tempo a Terra, per un fattore $1/\gamma$.

- Secondo il gemello sull'astronave questo si deve invece alla contrazione delle lunghezze: nel suo sistema, Terra e Stella si muovono con velocità v. La distanza Terra-Stella è dunque ridotta di una fattore $1/\gamma$ - per lui d=4.8 anni luce - e la durata del viaggio è ridotta di conseguenza.

La contrazione delle lunghezze

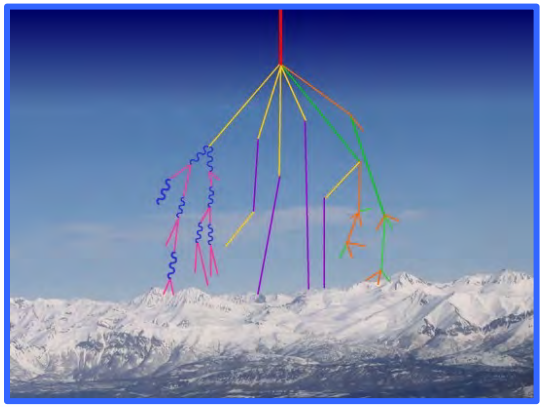
$$L_{\parallel} = L_0 / \gamma = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$



- <u>Decadimento dei muoni:</u>

  L_{Terra} = 10 Km

  $L_{Muone} = L_{Terra} / \gamma$ = 1 Km

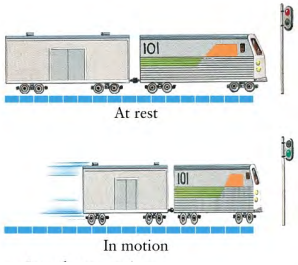


- Per l'osservatore a Terra il fenomeno si deve alla dilatazione dei tempi: il tempo proprio del muone scorre più lentamente rispetto al tempo a Terra, per un fattore $1/\gamma$.

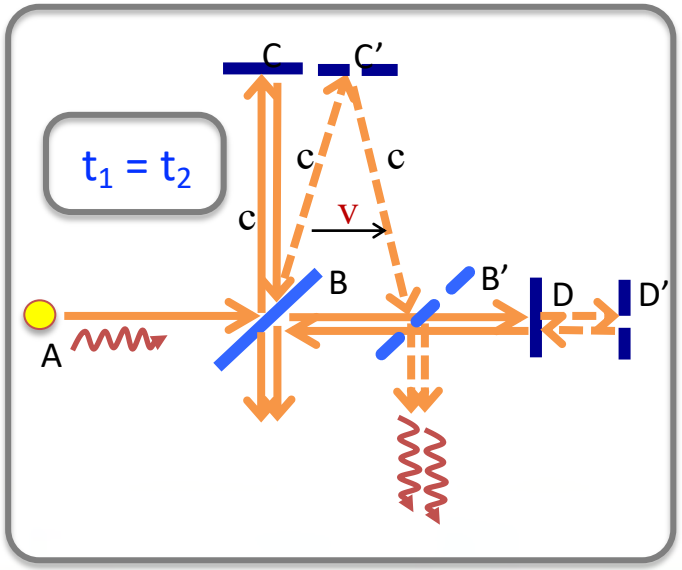
- Per il muone questo si deve invece alla contrazione delle lunghezze: nel suo sistema la Terra e l'atmosfera si muovono con velocità v. La distanza atmosfera-Terra è dunque ridotta di una fattore $1/\gamma$ - per lui 1 Km - e la durata del viaggio è ridotta di conseguenza.

La contrazione delle lunghezze

$$L_{\parallel} = L_0 / \gamma = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$



- Esperimento di Michelson e Morley:

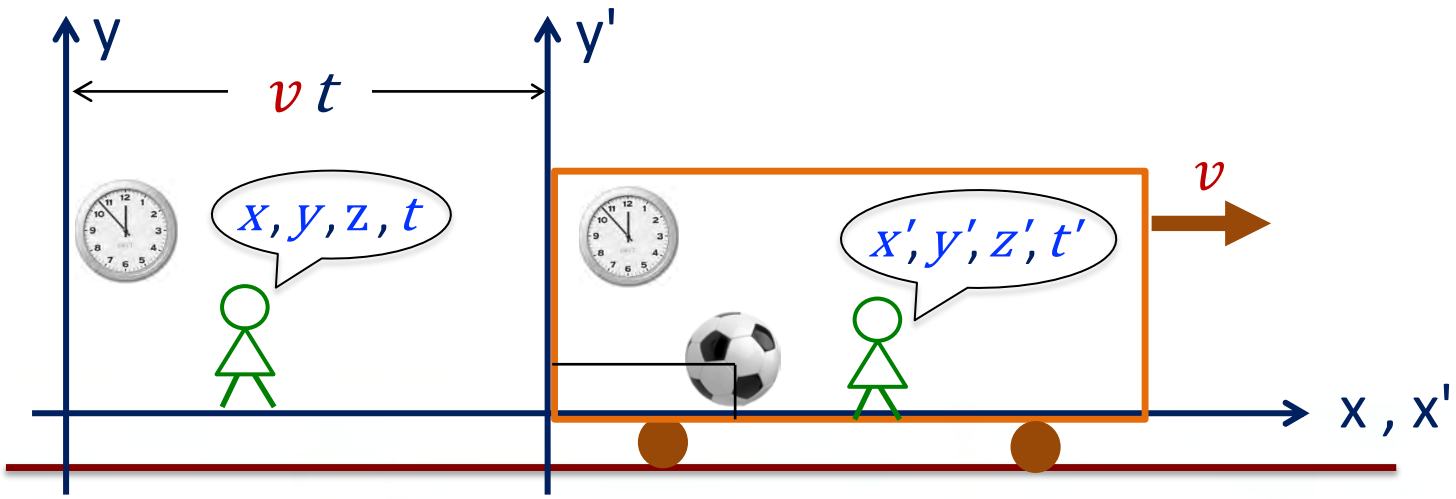


- Per l'osservatore a Terra la luce si muove a velocità c in entrambe le direzioni e i due tempi sono uguali.

- Per l'osservatore esterno alla Terra (in quiete "rispetto all'etere") i due tempi sono uguali per la contrazione della lunghezza del braccio allineato con la direzione del moto della Terra

Le trasformazioni di Lorentz

I fenomeni della relatività della simultaneità, della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze, sono casi particolari di leggi di trasformazione generali che connettono le coordinate spaziali (x, y, z) e la coordinata temporale (t) di un evento in due sistemi di riferimento inerziali distinti



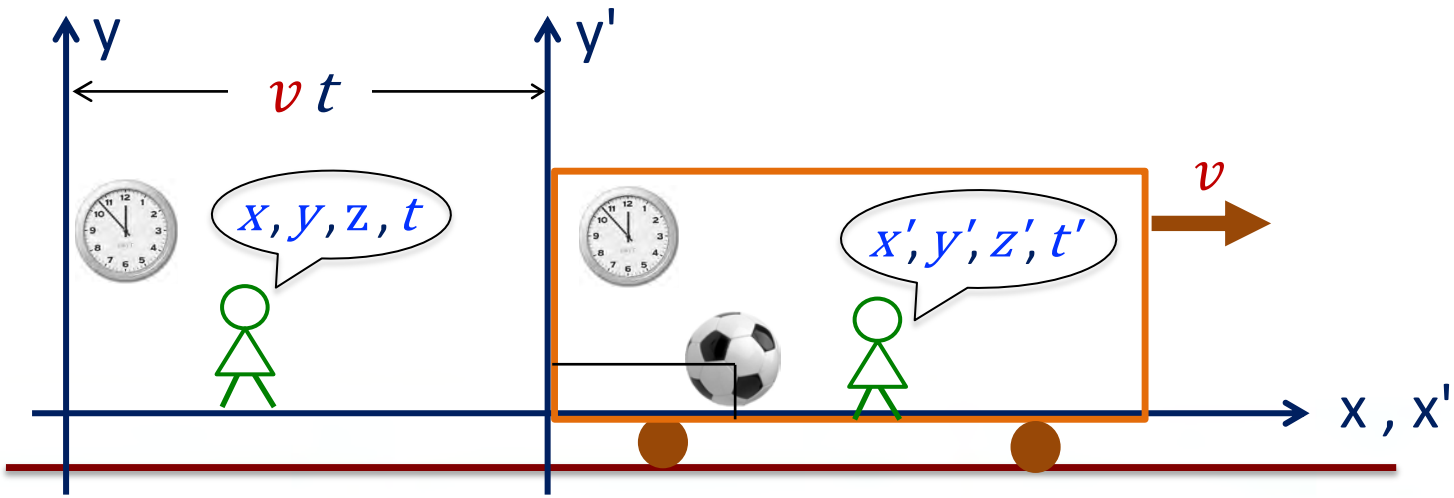
Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Galileo

$$x = x' + v\,t'$$
$$t = t'$$

Prima della teoria della relatività di Einstein si riteneva che queste fossero le relazioni tra le coordinate spaziali e temporali nei due sistemi di riferimento inerziali

$$\left(\begin{array}{l} y = y' \\ z = z' \end{array} \right)$$



Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Galileo

$$x = x' + v\,t'$$

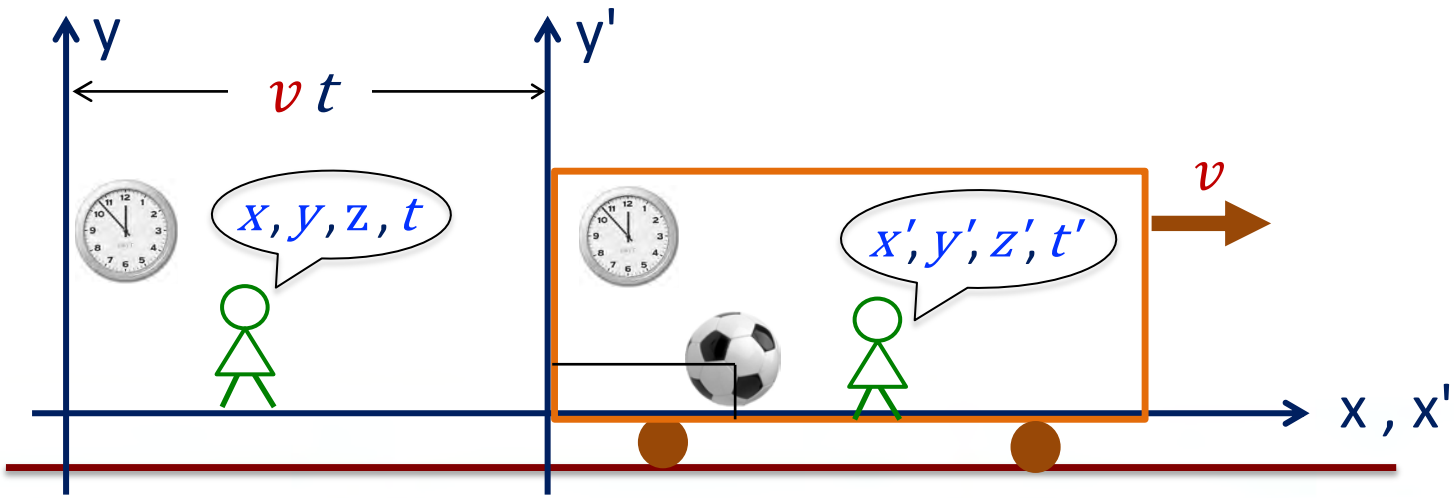
$$t = t'$$

Le trasformazioni di Lorentz

$$x = \gamma\,(x' + v\,t')$$

$$t = \gamma\,(t' + (v/c^2)x')$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz

$$x = \gamma\,(x' + v\,t')$$

$$t = \gamma\,(t' + (v/c^2)x')$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- $\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + v/c^2\,\Delta x'\right) \overset{\Delta x' = 0}{\Longrightarrow} \boxed{\Delta t = \gamma\,\Delta t'}$

Dilatazione dei tempi

Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz

$$x = \gamma\,(x' + v\,t')$$

$$t = \gamma\,(t' + (v/c^2)x')$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- $\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + v/c^2\,\Delta x'\right) \overset{\Delta x' = 0}{\Longrightarrow} \boxed{\Delta t = \gamma\,\Delta t'}$

Dilatazione dei tempi

- $\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right) \overset{\Delta t = 0}{\Longrightarrow} \boxed{\Delta x' = \gamma\,\Delta x}$

Contrazione delle lunghezze

Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz

$$x = \gamma\,(x' + v\,t')$$

$$t = \gamma\,(t' + (v/c^2)x')$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- $\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + v/c^2\,\Delta x'\right) \overset{\Delta x' = 0}{\Longrightarrow} \boxed{\Delta t = \gamma\,\Delta t'}$

Dilatazione dei tempi

- $\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right) \overset{\Delta t = 0}{\Longrightarrow} \boxed{\Delta x' = \gamma\,\Delta x}$

Contrazione delle lunghezze

- $\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + v/c^2\,\Delta x'\right) \overset{\Delta t' = 0}{=} \gamma\,v/c^2\,\Delta x' \Longrightarrow$

$$\overset{\Delta x' = \gamma\,\Delta x\ (\text{per } \Delta t = 0)}{\Longrightarrow} \boxed{\Delta t = \gamma^2\,v/c^2\,\Delta x}$$

Relatività della simultaneità

Elementi di Fisica Teorica Contemporanea

1. Teoria della Relatività
2. Meccanica quantistica
3. Particelle e campi
4. Gravità quantistica

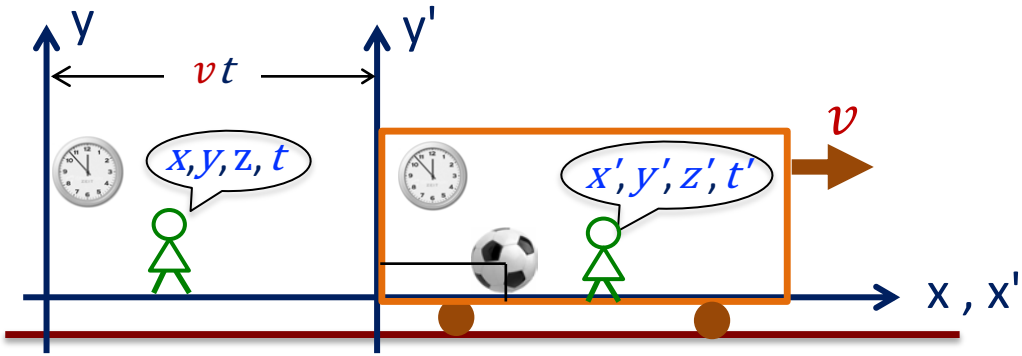
Teoria della Relatività
Parte II

Sommario

1) Il tempo
2) Tempo e spazio assoluti
3) Tempo e spazio relativi
4) Lo spazio-tempo
5) Quadrivettori: velocità, impulso ed energia relativistiche
6) Lo spazio-tempo curvo

4) Lo spazio-tempo

Le trasformazioni di Lorentz

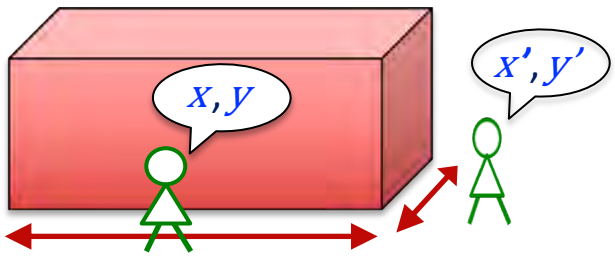


$$x' = \gamma\left(x - vt\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - (v/c^2)x\right)$$

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + (v/c^2)x'\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

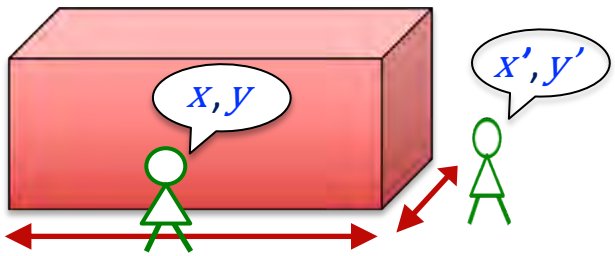
Lo spazio-tempo

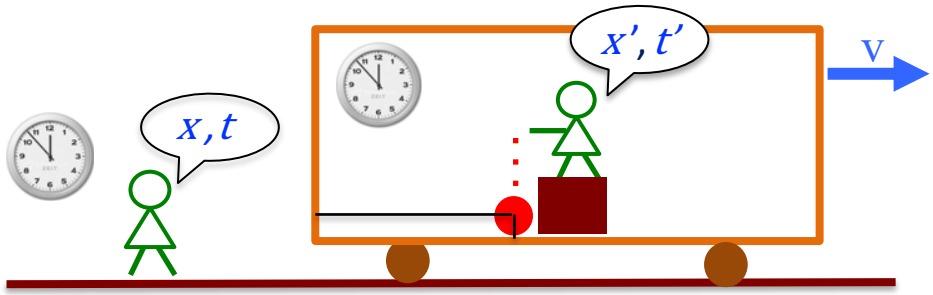


$$x' = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y$$
$$y' = \cos\theta\, y - \operatorname{sen}\theta\, x$$

- La larghezza x e la profondità y di un oggetto non sono proprietà fondamentali, dipendono dall'angolo da cui lo guardiamo. Se cambiamo angolo, la nuova larghezza x' e la nuova profondità y' sono date da un *mescolamento* delle precedenti

Lo spazio-tempo





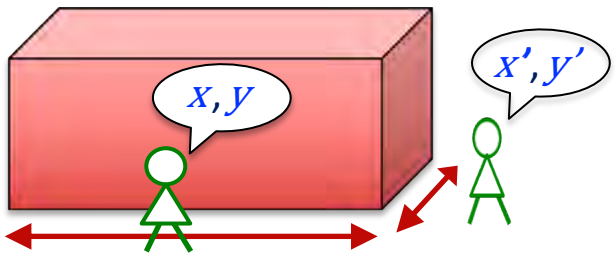
$$x' = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y$$
$$y' = \cos\theta\, y - \operatorname{sen}\theta\, x$$

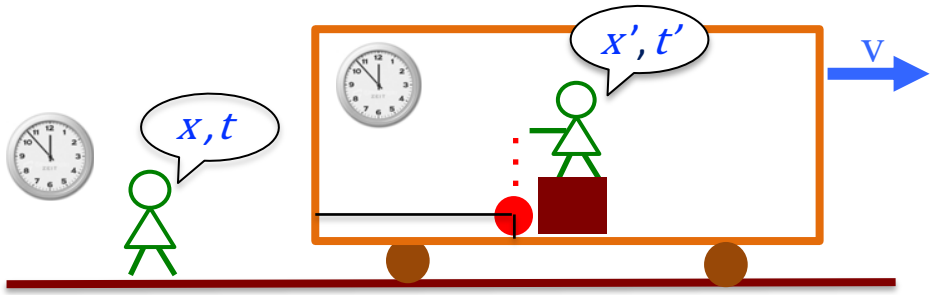
$$x' = \gamma x - \gamma v t$$
$$t' = \gamma t - \gamma v / c^2 x$$

Trasformazioni di Lorentz

- In modo analogo, la posizione x e il tempo t di un evento non sono proprietà fondamentali ma dipendono dalla velocità con cui ci muoviamo. Per un osservatore in moto, la posizione x' e il tempo t' di un evento sono dati da un *mescolamento* della posizione x e del tempo t visti da un osservatore in quiete

Lo spazio-tempo





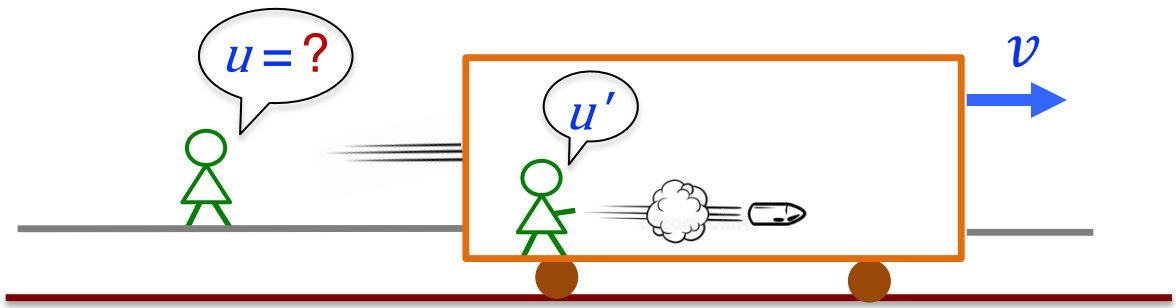
$$x' = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y$$
$$y' = \cos\theta\, y - \operatorname{sen}\theta\, x$$

$$x' = \gamma x - \gamma v t$$
$$t' = \gamma t - \gamma v / c^2 x$$

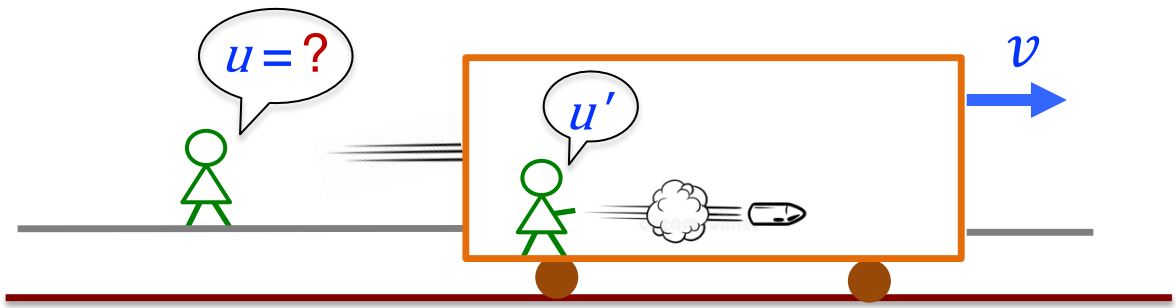
Trasformazioni di Lorentz

Dobbiamo dunque pensare ad un nuovo mondo di spazio e tempo mescolati tra loro, lo spazio-tempo, in cui gli oggetti occupano una "posizione" che ci appare diversa a seconda della velocità con cui ci muoviamo

La composizione delle velocità



La composizione delle velocità



Con le trasformazioni di Galileo:

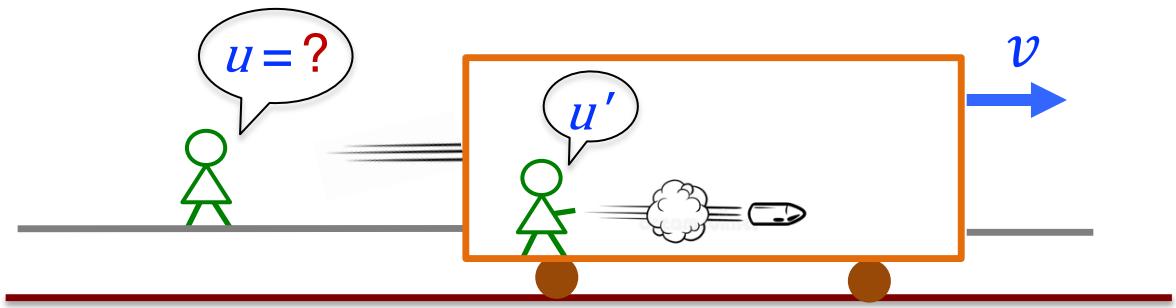
$$x = x' + v\,t'$$
$$y = y'$$
$$t = t'$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt'}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'}$$

$$u_x = u'_x + v$$
$$u_{y(z)} = u'_{y(z)}$$

La composizione delle velocità



IMPOSSIBILE !!

Si può avere v > c

Con le trasformazioni di Galileo:

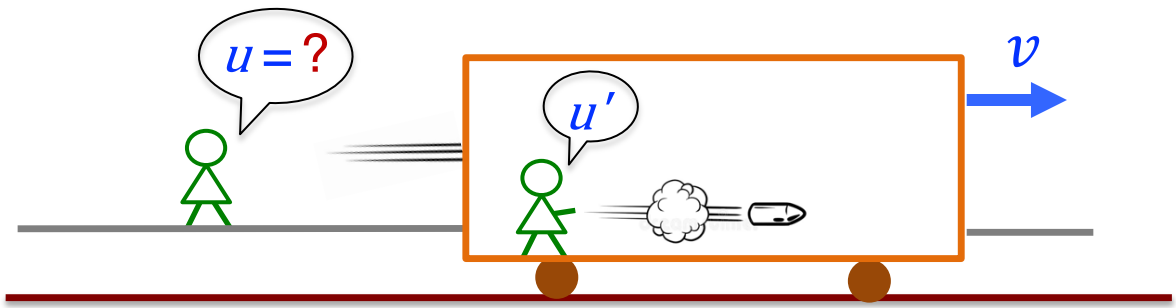
$$x = x' + v\,t'$$
$$y = y'$$
$$t = t'$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt'}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'}$$

$$u_x = u'_x + v$$
$$u_{y(z)} = u'_{y(z)}$$

La composizione delle velocità



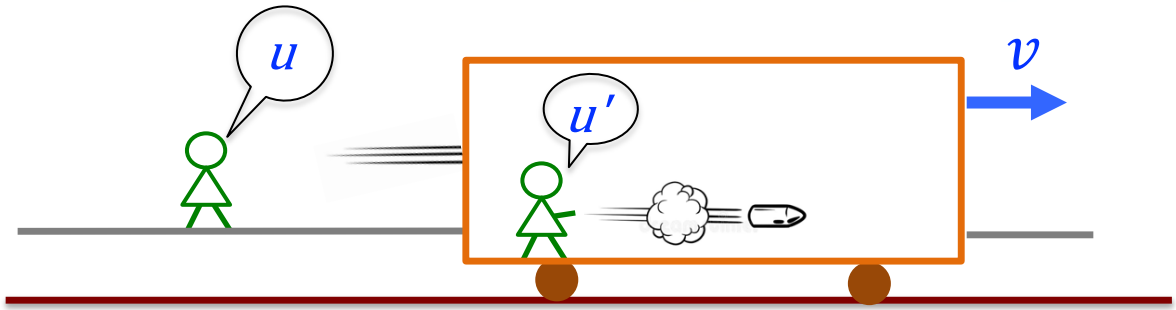
$$x = \gamma\left(x' + v\,t'\right)$$
$$y = y' \quad , \quad z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + v/c^2\, x'\right)$$

Con le trasformazioni di Lorentz:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma\left(dx' + v\,dt'\right)}{\gamma\left(dt' + v/c^2\,dx'\right)} \Rightarrow u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + v/c^2\,dx'\right)} \Rightarrow u_{y(z)} = \frac{u'_{y(z)}}{\gamma\left(1 + u'_x v/c^2\right)}$$

Composizione delle velocità: esempi



$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2}$$

$$u_{y(z)} = \frac{u'_{y(z)}}{\gamma\left(1 + u'_x v / c^2\right)}$$

- $u'_x = \frac{1}{2}c \;,\; v = \frac{1}{2}c \;\Rightarrow\; u_x = \frac{1/2 + 1/2}{1 + 1/4}c = \frac{4}{5}c$

Nella relatività «1/2 + 1/2 = 4/5»

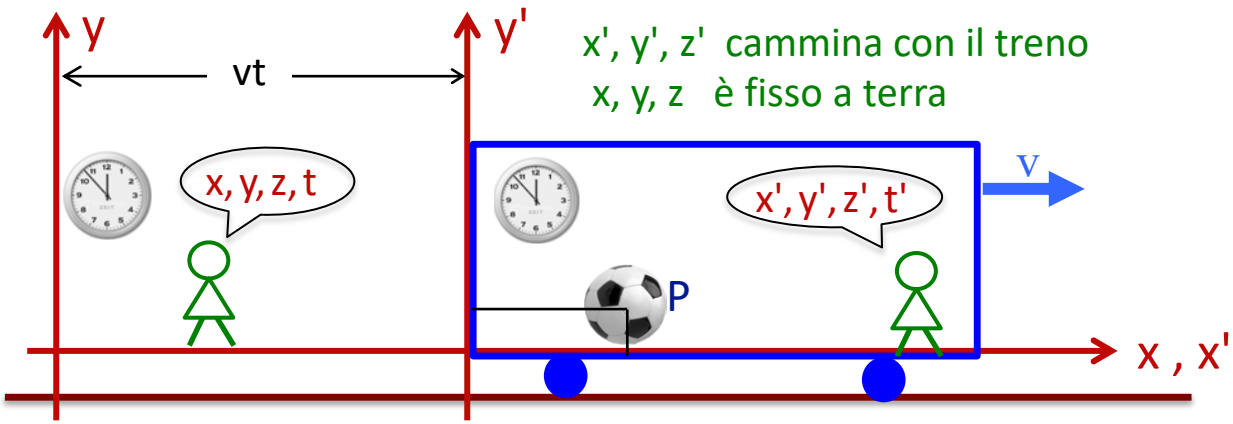
- $u'_x = c \;\Rightarrow\; u_x = \frac{c + v}{1 + v/c} = c$

La velocità della luce è invariante «c + v = c»

- $u'_x = 0 \;\Rightarrow\; u_x = v \;,\; u_y = \frac{1}{\gamma}u'_y \;,\; u_z = \frac{1}{\gamma}u'_z$

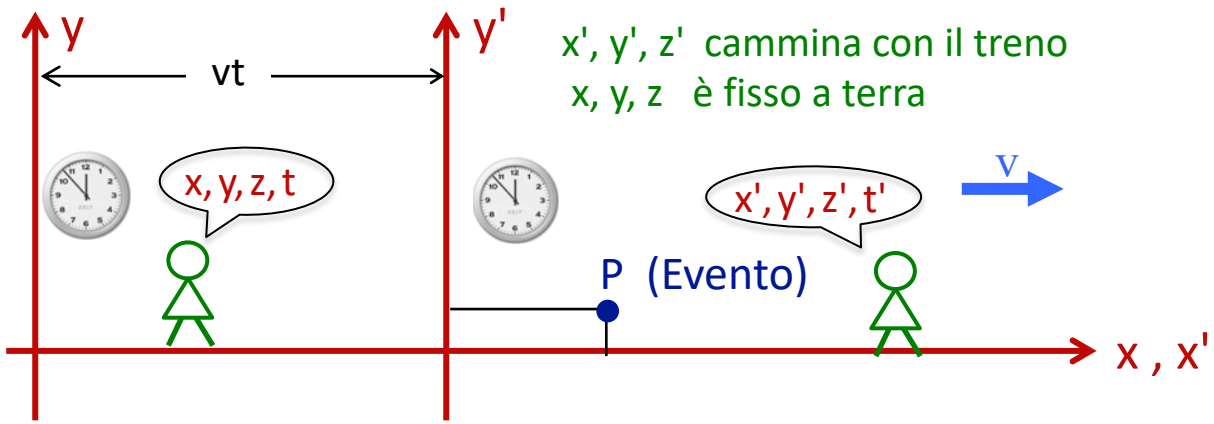
Se il moto è trasverso, le velocità si riducono di un fattore 1/γ

Il piano di Minkowski



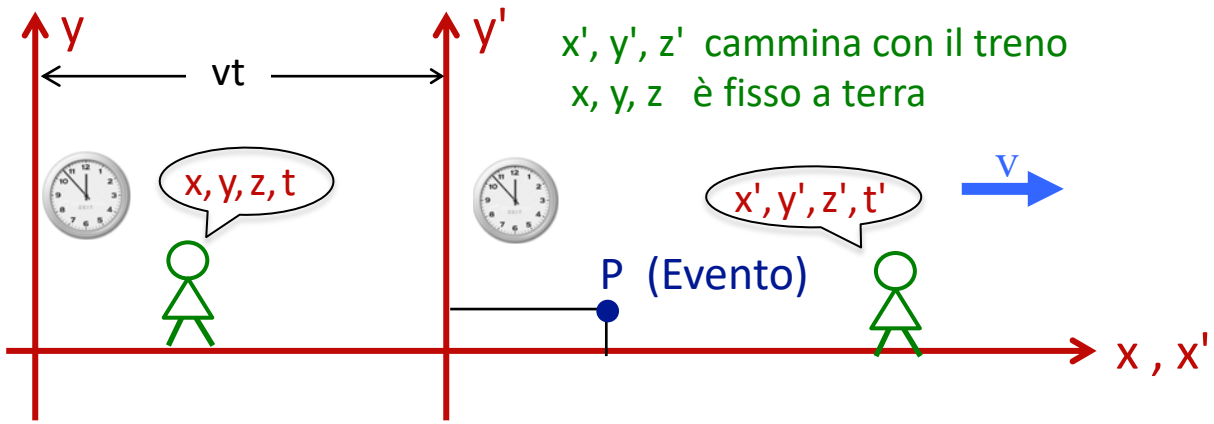
- In precedenza nei due sistemi di riferimento abbiamo considerato i piani x-y e x'-y'

Il piano di Minkowski



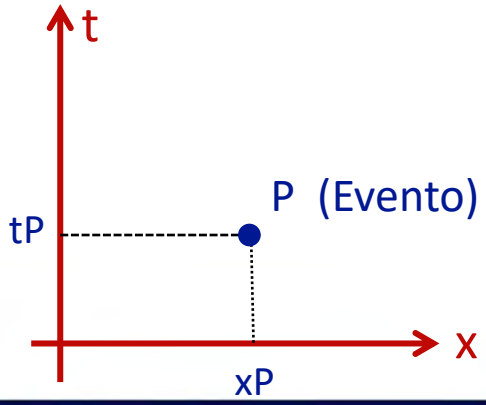
- In precedenza nei due sistemi di riferimento abbiamo considerato i piani x-y e x'-y'

Il piano di Minkowski

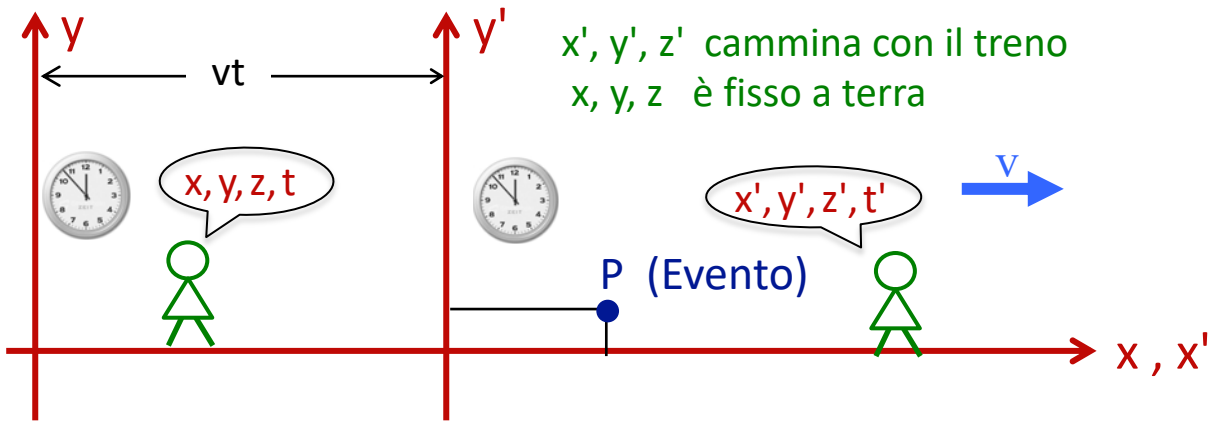


- In precedenza nei due sistemi di riferimento abbiamo considerato i piani x-y e x'-y'

- Risulta anche utile considerare i piani nello spazio-tempo: x-t e x'-t'

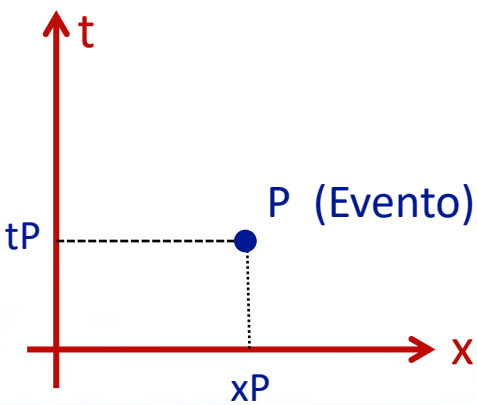


Il piano di Minkowski



- In precedenza nei due sistemi di riferimento abbiamo considerato i piani x-y e x'-y'

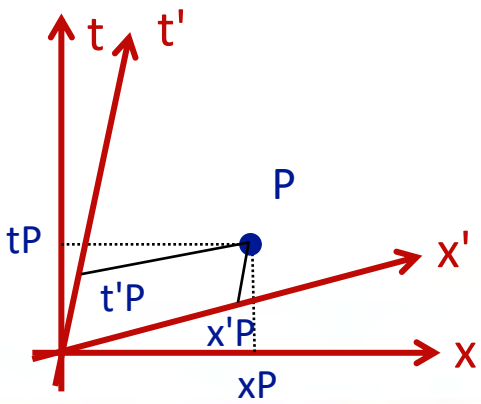
- Risulta anche utile considerare i piani nello spazio-tempo: x-t e x'-t'



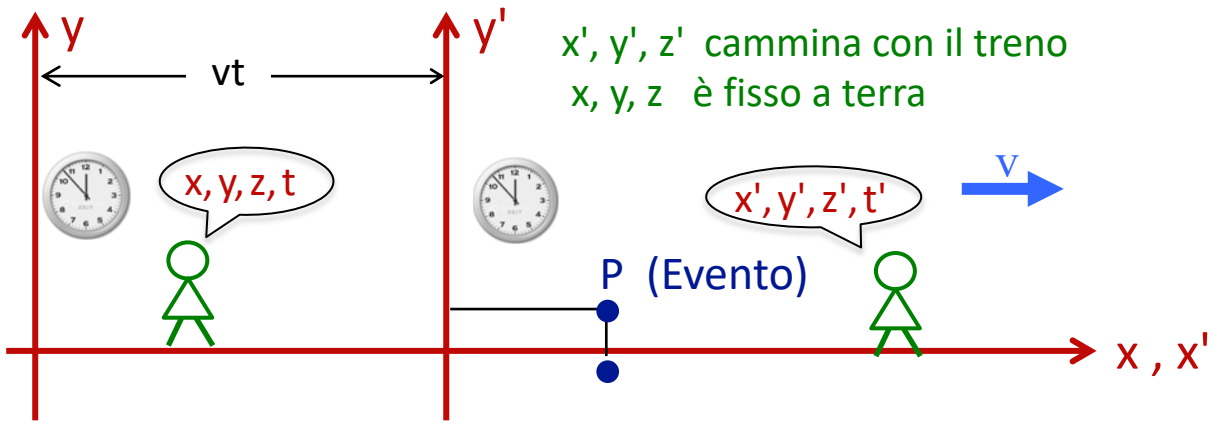
$$x' = \gamma\,(x - v\,t)$$
$$t' = \gamma\,(t - v/c^2\,x)$$

Asse x' : $t' = 0 \rightarrow t = (v/c^2)\,x$

Asse t' : $x' = 0 \rightarrow t = (1/v)\,x$



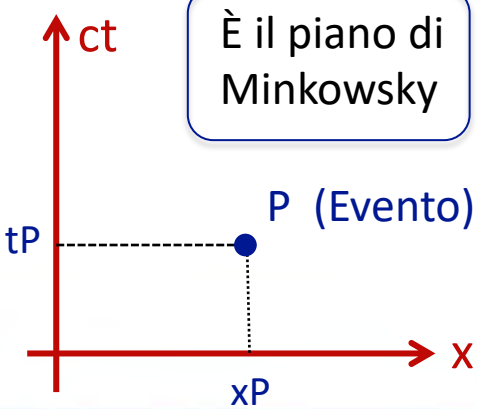
Il piano di Minkowski



x', y', z' cammina con il treno
x, y, z è fisso a terra

- In precedenza nei due sistemi di riferimento abbiamo considerato i piani x-y e x'-y'

- Per rendere omogenee le dimensioni delle coordinate spaziali e temporali utilizziamo ct (ct')

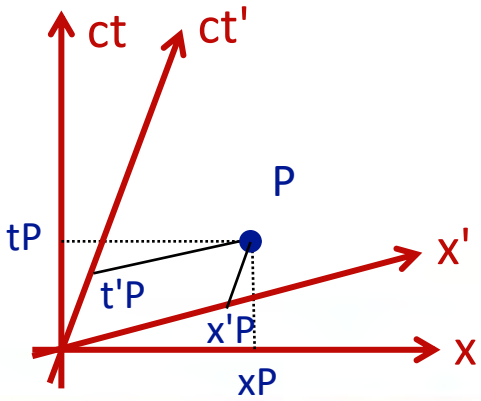


È il piano di Minkowsky

$$x' = \gamma\,(x - (v/c)\,ct)$$
$$ct' = \gamma\,(ct - (v/c)\,x)$$

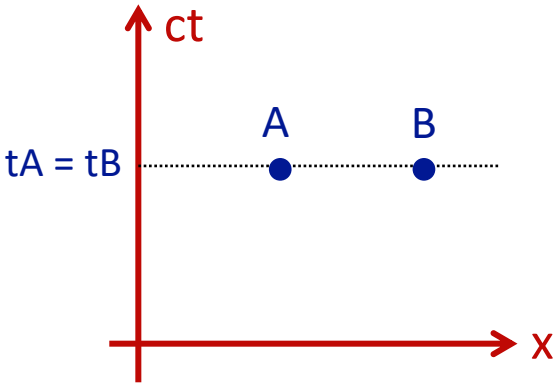
Asse x' : $t' = 0 \rightarrow ct = v/c\ x$

Asse ct' : $x' = 0 \rightarrow ct = c/v\ x$



Il piano di Minkowski: applicazioni

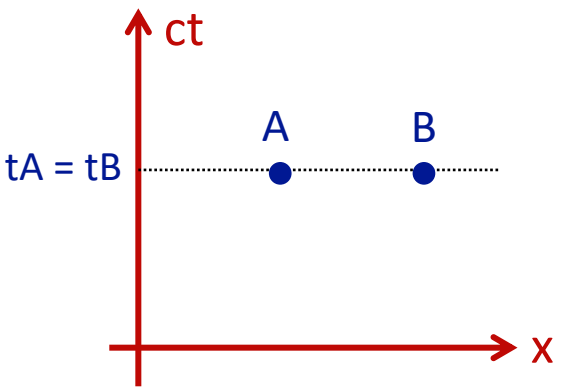
- Relatività della simultaneità



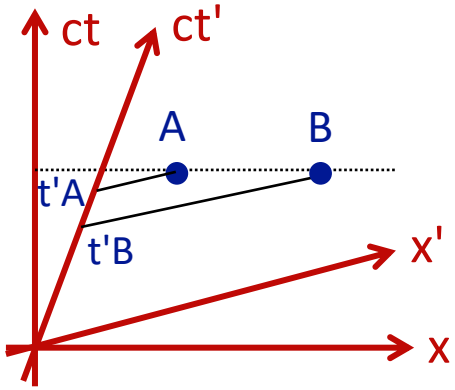
Eventi simultanei in K

Il piano di Minkowski: applicazioni

- Relatività della simultaneità



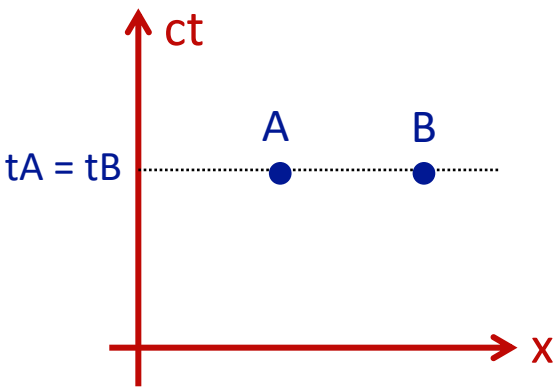
Eventi simultanei in K



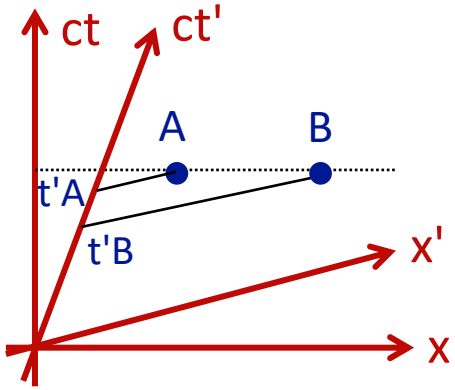
non sono simultanei in K'

Il piano di Minkowski: applicazioni

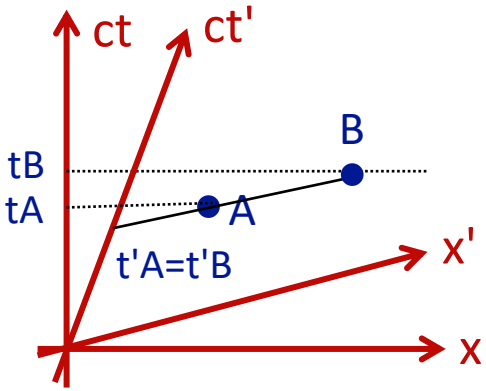
- Relatività della simultaneità



Eventi simultanei in K



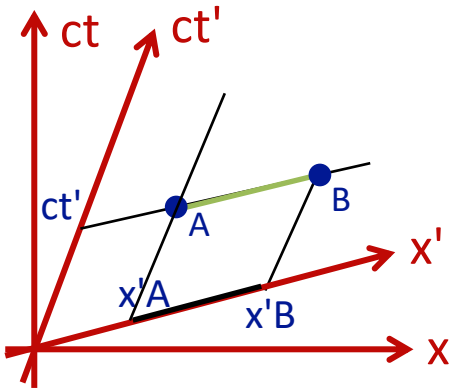
non sono simultanei in K'



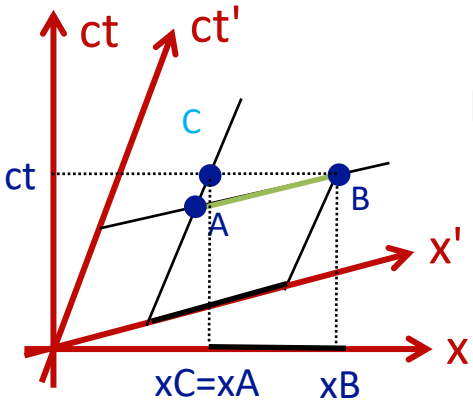
Eventi simultanei in K'
non sono simultanei in K

Il piano di Minkowski: applicazioni

- Contrazione delle lunghezze



In K' al tempo ct' l'asta misura x'B-x'A

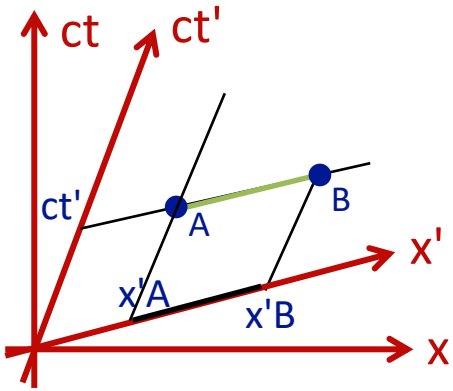


«C» è l'evento posizione di una delle estremità nell'istante ct in cui l'altra estremità è in B

In K la misura deve essere effettuata allo stesso tempo ct.

Il piano di Minkowski: applicazioni

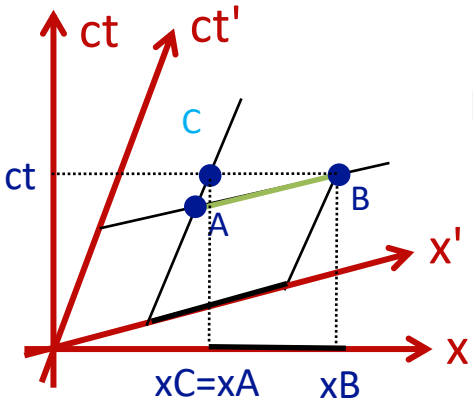
- Contrazione delle lunghezze



In K' al tempo ct' l'asta misura x'B-x'A

$$xB-xA < x'B-x'A$$

Nel sistema in cui l'asta è in moto si ha una contrazione della lunghezza



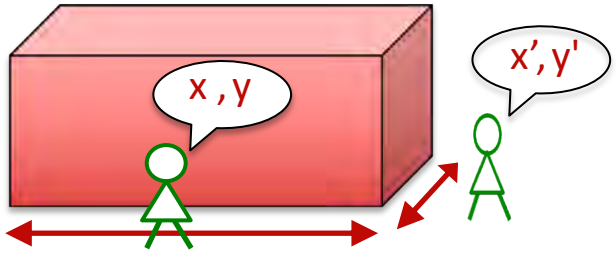
«C» è l'evento posizione di una delle estremità nell'istante ct in cui l'altra estremità è in B

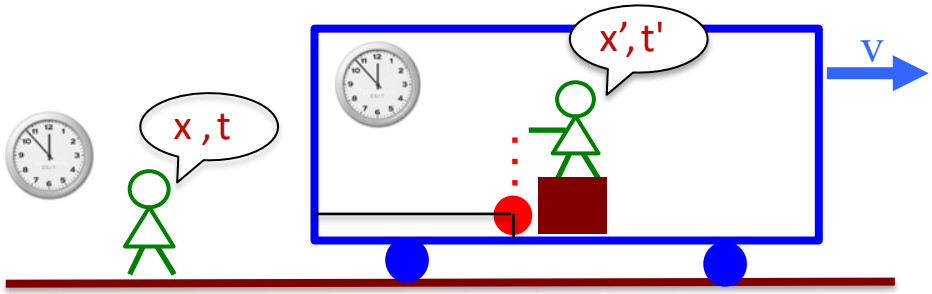
In K la misura deve essere effettuata allo stesso tempo ct.

Nota: a rigore per un confronto di lunghezze si deve considerare che le unità di misura sono diverse nei due sistemi (iperbole di calibrazione)

Intervallo spazio-temporale

- L'analogia tra rotazioni spaziali e trasformazioni di Lorentz può essere portata più avanti





Rotazioni spaziali

$$x' = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y$$
$$y' = \cos\theta\, y - \operatorname{sen}\theta\, x$$

Trasformazioni di Lorentz

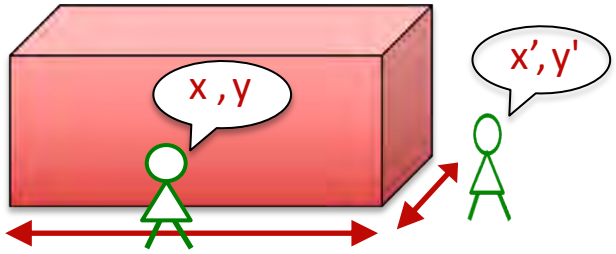
$$x' = \gamma x - \gamma v / c\; ct$$
$$ct' = \gamma ct - \gamma v / c\, x$$

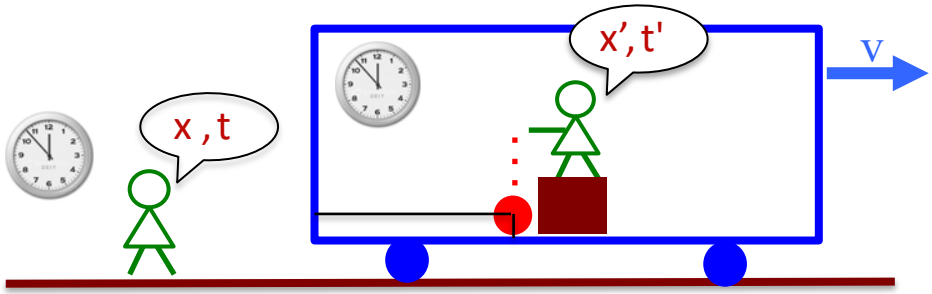
Nelle rotazioni spaziali si conserva la distanza tra due punti:

$$x'^2 + y'^2 = \left(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta\right)^2 = x^2 + y^2$$

Intervallo spazio-temporale

- L'analogia tra rotazioni spaziali e trasformazioni di Lorentz può essere portata più avanti





Rotazioni spaziali

$$x' = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y$$
$$y' = \cos\theta\, y - \operatorname{sen}\theta\, x$$

Trasformazioni di Lorentz

$$x' = \gamma x - \gamma v / c\; ct$$
$$ct' = \gamma ct - \gamma v / c\, x$$

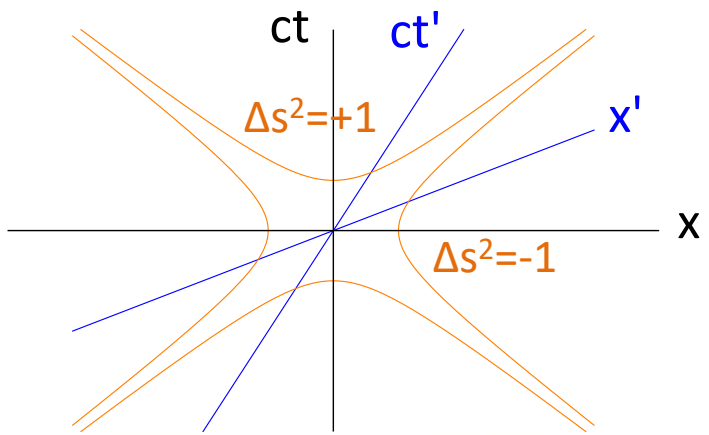
Nelle trasformazioni di Lorentz si conserva l'intervallo tra due eventi:

$$c^2t'^2 - x'^2 = \gamma^2\left[\left(ct - (v/c)x\right)^2 - \left(x - (v/c)\,ct\right)^2\right] = \gamma^2\left[\left(1 - v^2/c^2\right)\left(c^2t^2 - x^2\right)\right] = c^2t^2 - x^2$$

Intervallo spazio-temporale

- Nelle trasformazioni di Lorentz è invariante l'intervallo:

$$\Delta s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$



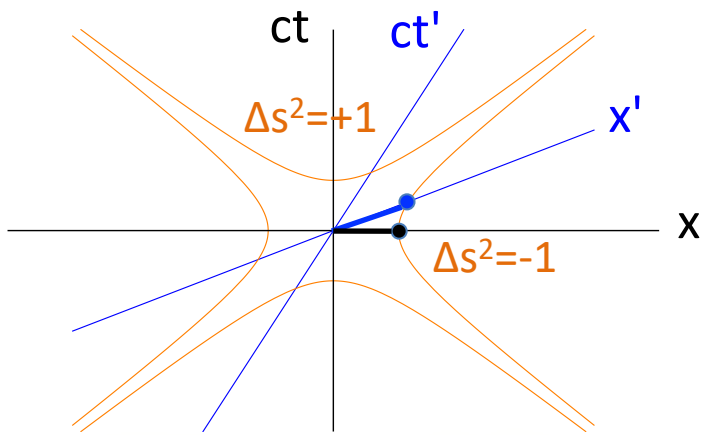
Gli eventi su ogni iperbole di equazione Δs^2 = costante si trovano tutti alla stessa "distanza" dall'origine e in entrambi i sistemi di riferimento.

Nello spazio-tempo di Minkowski la geometria non è euclidea

Intervallo spazio-temporale

- Nelle trasformazioni di Lorentz è invariante l'intervallo:

$$\Delta s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$



I punti in cui l'iperbole con $\Delta s^2 = -1$ incrocia l'asse x e l'asse x' si trovano alla stessa distanza spaziale (pari ad 1) dall'origine nei sistemi rispettivamente K e K' (iperbole di calibrazione).

Vediamo dunque che le unità di misura sono diverse nei due sistemi. Un analogo discorso vale per le distanze temporali.

Intervallo spazio-temporale

- Nelle trasformazioni di Lorentz è invariante l'intervallo:

$$\Delta s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

- L'intervallo può essere definito in generale per due eventi qualunque, P_1 e P_2

$P_1=(ct_1, x_1, y_1, z_1)$ $\qquad$ $P_2=(ct_2, x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{aligned}\Delta s_{12}^2 &= (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\ &= (ct_2' - ct_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2\end{aligned}$$

Intervallo spazio-temporale

- A differenza di una distanza nello spazio 3-dimensionale, che ha sempre quadrato positivo, l'intervallo può avere quadrato positivo, negativo o nullo.

- Se in un sistema di riferimento due eventi avvengono nello stesso luogo:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 > 0$$

Intervallo "di tipo tempo"

In qualunque altro sistema di riferimento $\Delta s^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2 > 0$ ⟹

Non esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono simultanei

Intervallo spazio-temporale

- A differenza di una distanza nello spazio 3-dimensionale, che ha sempre quadrato positivo, l'intervallo può avere quadrato positivo, negativo o nullo.

- Se in un sistema di riferimento due eventi avvengono allo stesso tempo:

$$\Delta s^2 = -\Delta r^2 < 0$$

Intervallo "di tipo spazio"

In qualunque altro sistema di riferimento $\Delta s^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2 < 0$ ⟹

Non esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso luogo

Intervallo spazio-temporale

- A differenza di una distanza nello spazio 3-dimensionale, che ha sempre quadrato positivo, l'intervallo può avere quadrato positivo, negativo o nullo.

- Se due eventi rappresentano la propagazione di un segnale di luce:

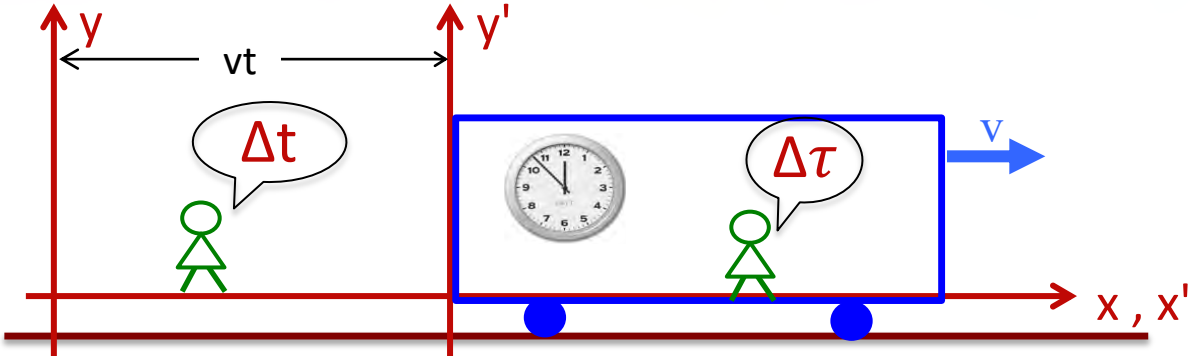
$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 = 0$$

Intervallo "di tipo luce"

In qualunque altro sistema di riferimento $\Delta s^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta r'^2 = \Delta t'^2 (c^2 - v^2) = 0$ ⟹

La velocità della luce è la stessa in ogni sistema di riferimento

Il tempo proprio

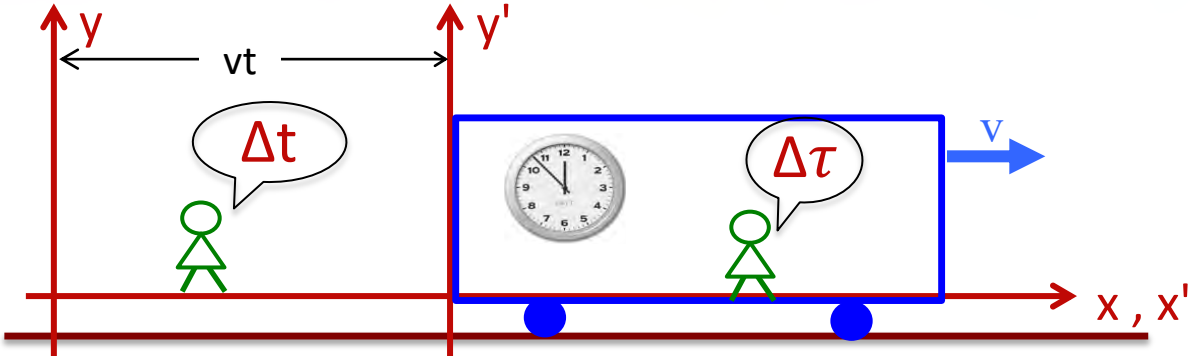


- Il tempo segnato da un orologio in moto rispetto a noi si chiama tempo proprio (dell'orologio)

- L'intervallo di tempo proprio, essendo misurato nel sistema di quiete dell'orologio, è direttamente proporzionale all'intervallo spaziotemporale:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta \tau^2$$

Il tempo proprio



$$\Delta s^2 = c^2 \Delta\tau^2$$

- Dall'invarianza dell'intervallo segue:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^{\,2} = c^2\Delta t^2\left[1-\left(\Delta\vec{r}\,/\,c\Delta t\right)^2\right] = c^2\Delta t^2\left[1-v^2/c^2\right] = c^2\Delta t^2/\gamma^2$$

ossia

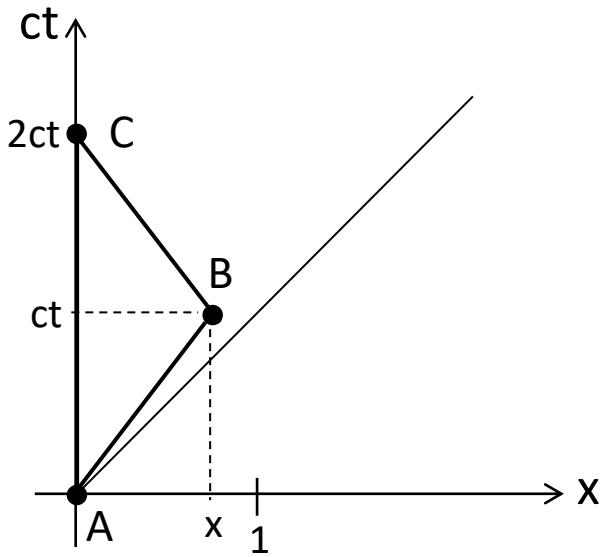
$$\Delta\tau = \Delta t/\gamma = \Delta t\sqrt{1-v^2/c^2}$$

È la dilatazione del tempo

Tempo misurato dall'orologio in moto

Tempo misurato da un orologio in quiete rispetto a noi

Lo spazio-tempo e il paradosso dei gemelli



- Nello spazio-tempo una linea retta tra due punti non rappresenta necessariamente il cammino di distanza minima.

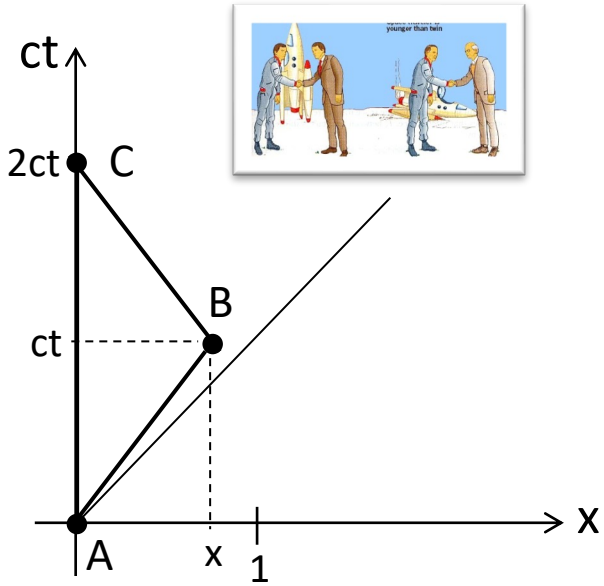
  Nel triangolo in figura, la somma delle lunghezze dei due lati, AB e BC, è minore della lunghezza del lato AC

$$d_{AC} = \sqrt{\Delta s_{AC}^2} = \sqrt{4c^2t^2} = 2ct$$

$$d_{AB} + d_{BC} = 2\sqrt{\Delta s_{AB}^2} = 2\sqrt{c^2t^2 - x^2} = 2ct\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d_{AB} + d_{BC} < d_{AC}}$$

Lo spazio-tempo e il paradosso dei gemelli



- Il diagramma può essere interpretato come il paradosso dei gemelli. Un gemello resta sulla Terra mentre l'altro viaggia da A a B e poi da B a C.
- Le distanze sono proporzionali al tempo proprio dei due gemelli:

$$c\,\Delta\tau_1 = d_{AC} = 2\,ct$$ Gemello a Terra

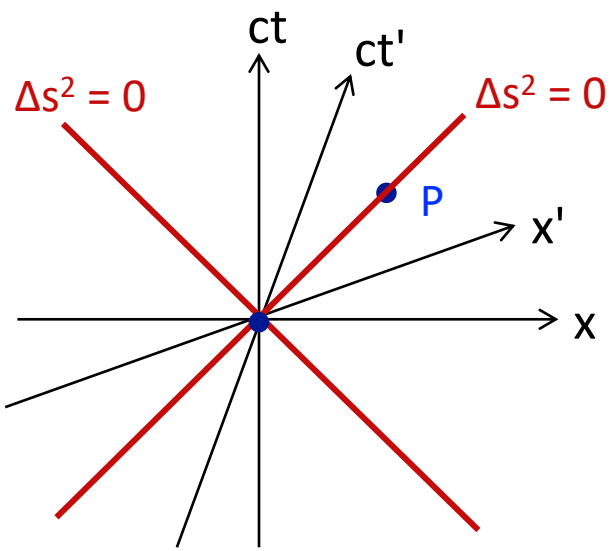
$$c\,\Delta\tau_2 = d_{Ab} + d_{BC} = 2\sqrt{c^2t^2 - x^2} = 2\,ct\sqrt{1 - v^2/c^2}$$ Gemello che viaggia

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\Delta\tau_2 < \Delta\tau_1$$

Il gemello che viaggia resta più giovane!

Il cono luce



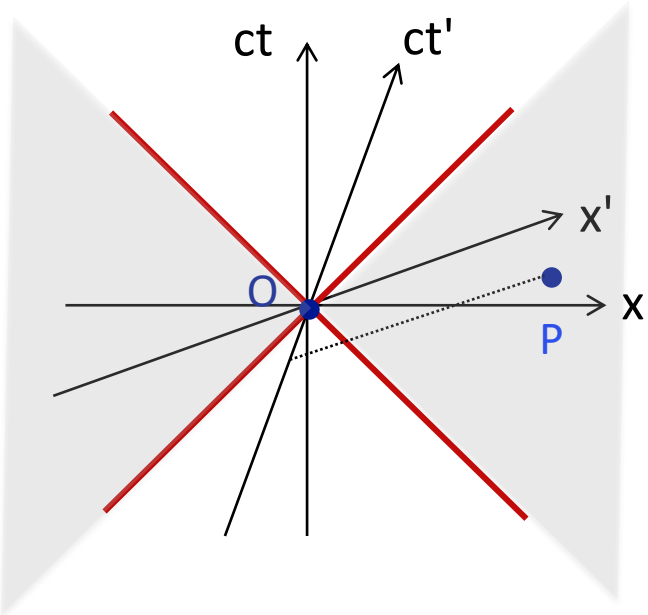
- Nel piano di Minkowsi, le due linee a 45° rappresentano l'insieme degli eventi separati dall'origine da un intervallo nullo.

  In 4 dimensioni sono in realtà un "cono", il cosiddetto cono luce

- Come abbiamo già visto, l'invarianza dell'intervallo garantisce che la luce si muove a velocità c in qualunque sistema di riferimento.
  In tutti I sistemi infatti

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 = 0 \rightarrow (\Delta r/\Delta t)^2 = v^2 = c^2$$

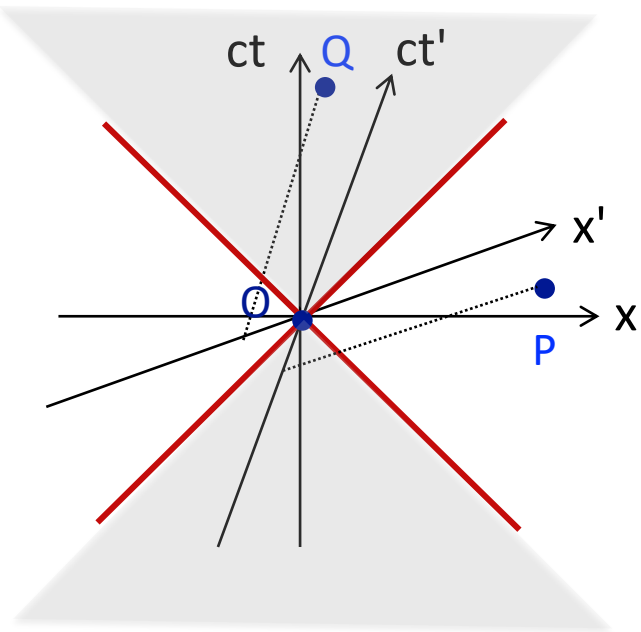
Il cono luce



- Per un evento P al di fuori del cono luce la successione temporale rispetto ad O non è preservata:

$\Delta s^2 < 0$ In K: $tP > 0$ In K': $t'P < 0$

Il cono luce



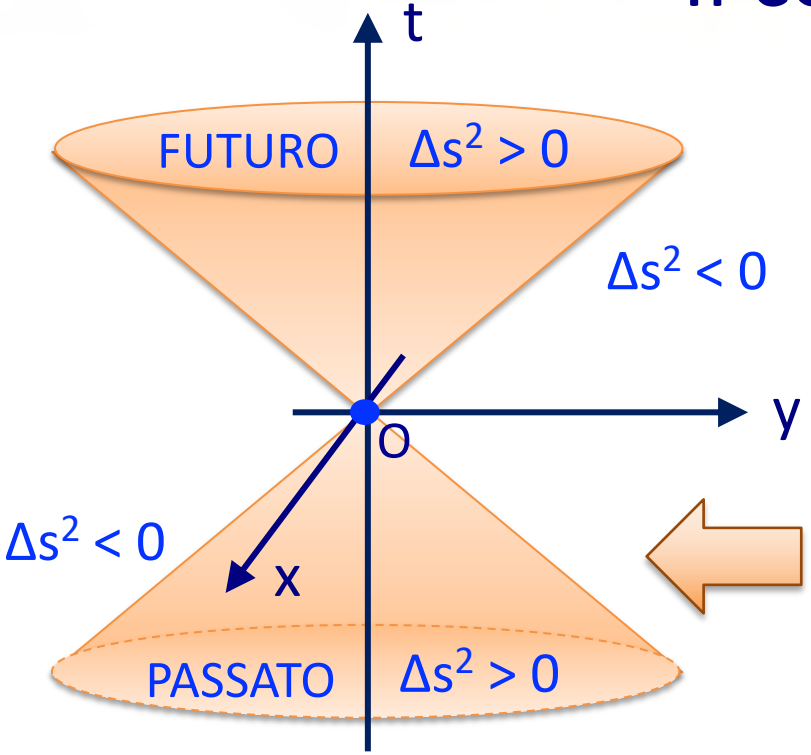
- Per un evento P al di fuori del cono luce la successione temporale rispetto ad O non è preservata:

  $\Delta s^2 < 0$ In K: $tP > 0$ In K': $t'P < 0$

- Per un evento Q all'interno del cono luce (passato o futuro di O), invece, non è preservata la successione spaziale:

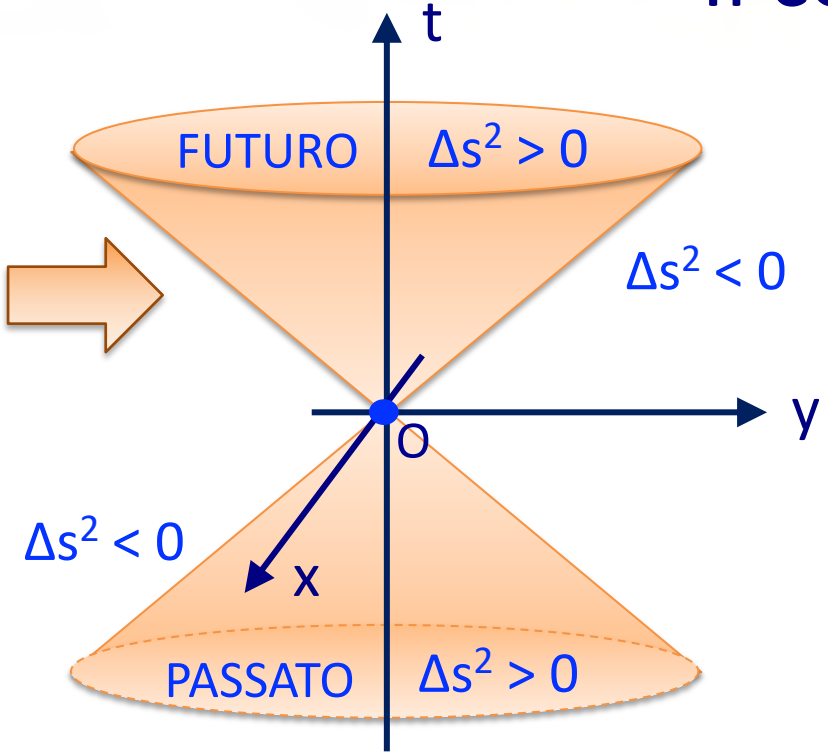
  $\Delta s^2 > 0$ In K: $xQ > 0$ In K': $x'Q < 0$

Il cono luce



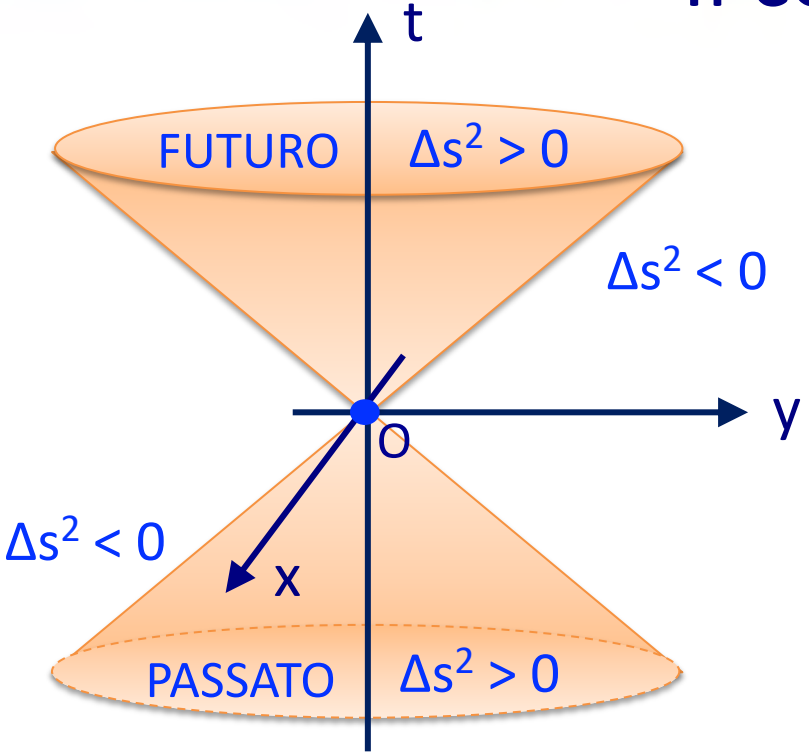
- La regione spaziotemporale che circonda un dato punto, assunto come origine O, può essere divisa in tre regioni.
- Ciascun evento contenuto nel semicono inferiore rappresenta un possibile PASSATO di O. Un oggetto fisico o un segnale può raggiungere l'evento O da un punto di questa regione muovendosi con velocità $v < c$.

Il cono luce



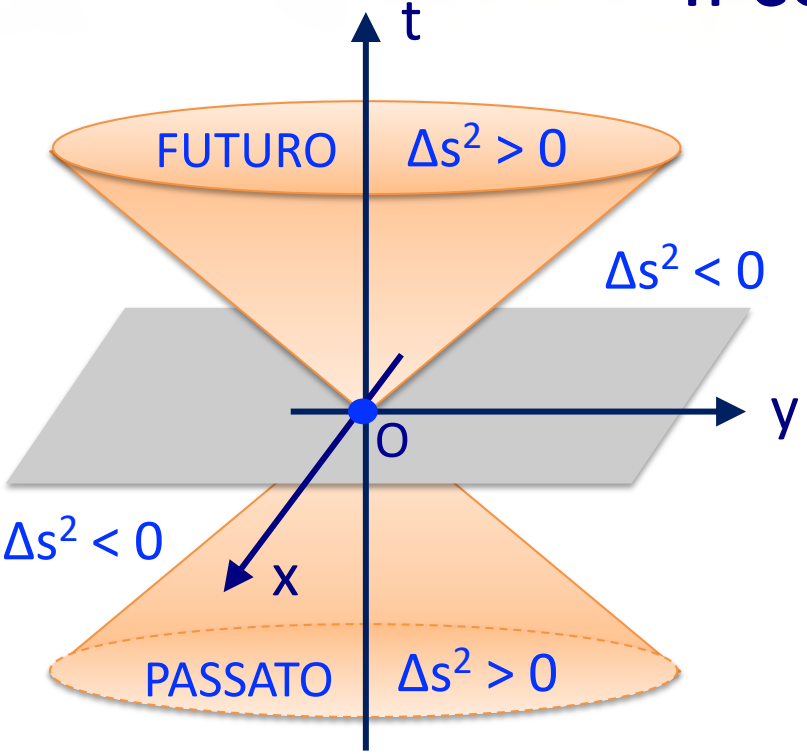
- La regione spaziotemporale che circonda un dato punto, assunto come origine O, può essere divisa in tre regioni.
- Ciascun evento contenuto nel semicono inferiore rappresenta un possibile PASSATO di O. Un oggetto fisico o un segnale può raggiungere l'evento O da un punto di questa regione muovendosi con velocità $v < c$.
- Ciascun evento contenuto nel semicono superiore rappresenta un possibile FUTURO di O. Questa regione contiene l'insieme degli eventi che possono essere influenzati da O.

Il cono luce



- Gli eventi al di fuori del cono luce ($\Delta s^2 < 0$) non possono essere influenzati da O ne' possono influenzare O. Sono eventi totalmente disconnessi da O, NÉ PASSATO NÉ FUTURO

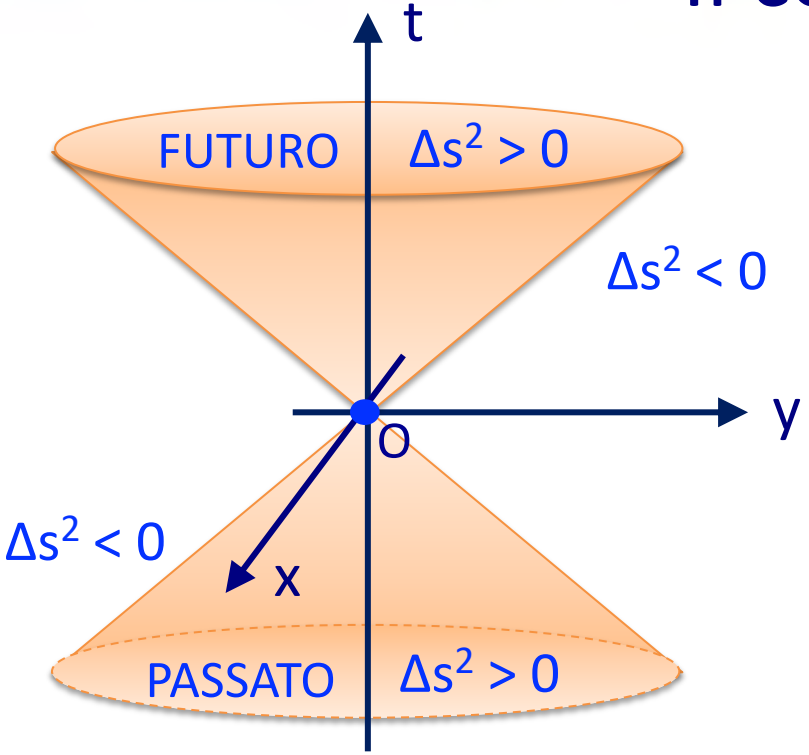
Il cono luce



- Gli eventi al di fuori del cono luce ($\Delta s^2 < 0$) non possono essere influenzati da O ne' possono influenzare O. Sono eventi totalmente disconnessi da O, NÉ PASSATO NÉ FUTURO
- Si potrebbe pensare che il piano t=0 sia il "presente" di O. Ma questo non è vero.

  Sappiamo che anche il concetto di simultaneità non è assoluto, dipende dal sistema di riferimento.

Il cono luce



- Gli eventi al di fuori del cono luce ($\Delta s^2 < 0$) non possono essere influenzati da O ne' possono influenzare O. Sono eventi totalmente disconnessi da O, NÉ PASSATO NÉ FUTURO
- Si potrebbe pensare che il piano t=0 sia il "presente" di O. Ma questo non è vero.

  Sappiamo che anche il concetto di simultaneità non è assoluto, dipende dal sistema di riferimento.

GLI EVENTI AL DI FUORI DEL CONO LUCE NON APPARTENGONO NÈ AL PASSATO, NÈ AL PRESENTE, NÈ AL FUTURO

5) Quadrivettori. Velocità, impulso ed energia relativistiche

Invarianza per rotazioni

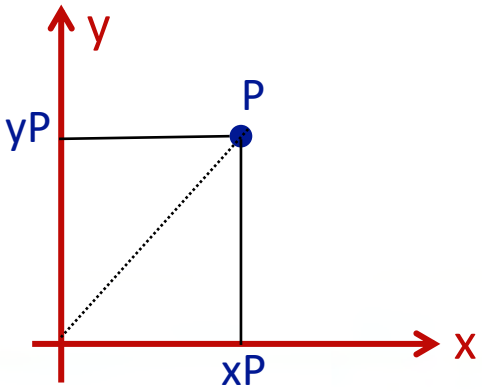
- L'esperienza indica che le direzioni nello spazio sono tutte equivalenti, ossia lo spazio è "isotropo". Se ruotiamo un sistema, questo si comporta esattamente allo stesso modo, ossia le leggi fisiche sono invarianti per rotazioni.

Invarianza per rotazioni

- L'esperienza indica che le direzioni nello spazio sono tutte equivalenti, ossia lo spazio è "isotropo". Se ruotiamo un sistema, questo si comporta esattamente allo stesso modo, ossia le leggi fisiche sono invarianti per rotazioni.

- Consideriamo ad esempio una particella nel punto P di coordinate x, y, z su cui agisce una forza di componenti Fx, Fy, Fz. Le equazioni del moto di Newton per la particella sono:

$$m\, d^2x/dt^2 = Fx$$
$$m\, d^2y/dt^2 = Fy$$
$$m\, d^2z/dt^2 = Fz$$

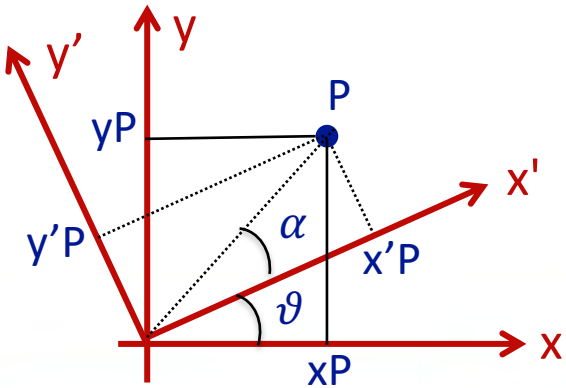


Invarianza per rotazioni

- L'esperienza indica che le direzioni nello spazio sono tutte equivalenti, ossia lo spazio è "isotropo". Se ruotiamo un sistema, questo si comporta esattamente allo stesso modo, ossia le leggi fisiche sono invarianti per rotazioni.

- Consideriamo quindi un sistema ruotato attorno all'asse z. Le coordinate del punto P nei due sistemi sono legate da:

$$m\, d^2x/dt^2 = Fx$$
$$m\, d^2y/dt^2 = Fy$$
$$m\, d^2z/dt^2 = Fz$$

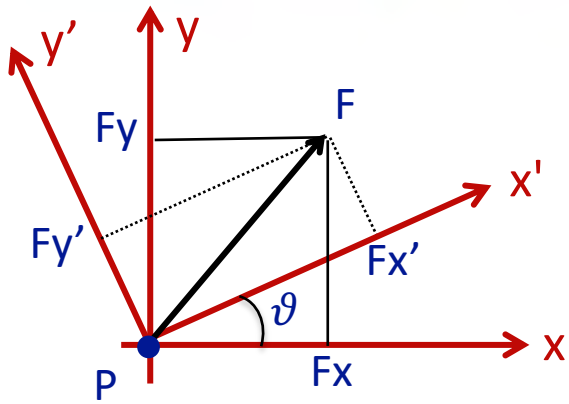


$$x = r\cos(\alpha+\vartheta) = r(\cos\alpha\cos\vartheta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\vartheta) = x'\cos\vartheta - y'\operatorname{sen}\vartheta$$
$$y = r\operatorname{sen}(\alpha+\vartheta) = r(\cos\alpha\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\alpha\cos\vartheta) = x'\operatorname{sen}\vartheta + y'\cos\vartheta$$
$$z = z'$$

Dunque:

$$x' = x\cos\vartheta + y\operatorname{sen}\vartheta$$
$$y' = y\cos\vartheta - x\operatorname{sen}\vartheta$$
$$z' = z$$

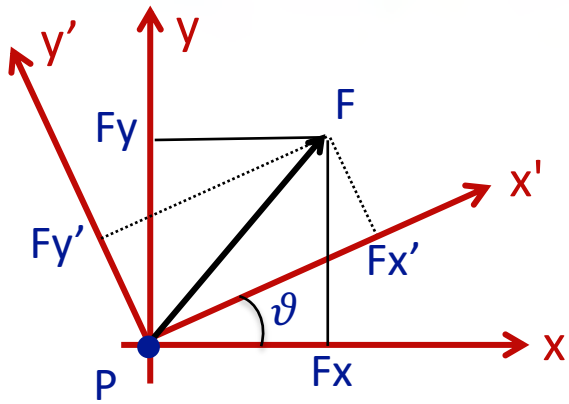
Invarianza per rotazioni



- Anche le componenti della forza F agente sulla particella trasformano come:

$$F_x' = F_x \cos\vartheta + F_y \operatorname{sen}\vartheta$$
$$F_y' = F_y \cos\vartheta - F_x \operatorname{sen}\vartheta$$
$$F_z' = F_z$$

Invarianza per rotazioni



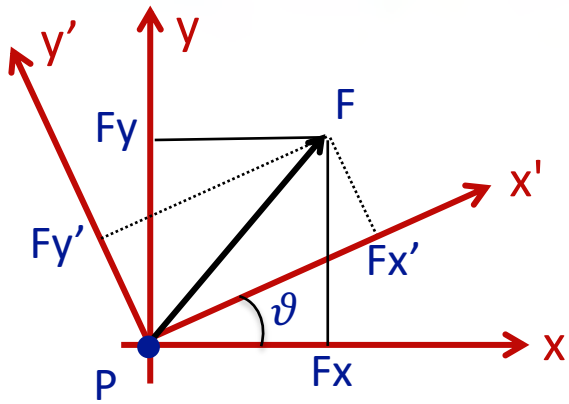
- Anche le componenti della forza F agente sulla particella trasformano come:

$$F_x' = F_x \cos\vartheta + F_y \operatorname{sen}\vartheta$$
$$F_y' = F_y \cos\vartheta - F_x \operatorname{sen}\vartheta$$
$$F_z' = F_z$$

$$x' = x \cos\vartheta + y \operatorname{sen}\vartheta$$
$$y' = y \cos\vartheta - x \operatorname{sen}\vartheta$$
$$z' = z$$

Sono le stesse leggi di trasformazione !!

Invarianza per rotazioni



- Anche le componenti della forza F agente sulla particella trasformano come:

$$F_x' = F_x \cos\vartheta + F_y \operatorname{sen}\vartheta$$
$$F_y' = F_y \cos\vartheta - F_x \operatorname{sen}\vartheta$$
$$F_z' = F_z$$

$$x' = x \cos\vartheta + y \operatorname{sen}\vartheta$$
$$y' = y \cos\vartheta - x \operatorname{sen}\vartheta$$
$$z' = z$$

Sono le stesse leggi di trasformazione !!

- Determiniamo allora le equazioni del moto nel sistema ruotato:

$$m\, d^2x'/dt^2 = m\, d^2/dt^2\, (x \cos\vartheta + y \operatorname{sen}\vartheta) = F_x \cos\vartheta + F_y \operatorname{sen}\vartheta = F_x'$$
$$m\, d^2y'/dt^2 = m\, d^2/dt^2\, (y \cos\vartheta - x \operatorname{sen}\vartheta) = F_y \cos\vartheta - F_x \operatorname{sen}\vartheta = F_y'$$
$$m\, d^2z'/dt^2 = m\, d^2z/dt^2 = F_z = F_z'$$

Hanno la stessa forma:

$$m\, d^2x'/dt^2 = F_x'$$
$$m\, d^2y'/dt^2 = F_y'$$
$$m\, d^2z'/dt^2 = F_z'$$

Invarianza per rotazioni

Le equazioni del moto nei due sistemi hanno la stessa forma !!

Equazioni del moto nel sistema iniziale

$$m\, d^2x/dt^2 = Fx$$
$$m\, d^2y/dt^2 = Fy$$
$$m\, d^2z/dt^2 = Fz$$

Equazioni del moto nel sistema ruotato

$$m\, d^2x'/dt^2 = Fx'$$
$$m\, d^2y'/dt^2 = Fy'$$
$$m\, d^2z'/dt^2 = Fz'$$

Oggi sappiamo che non solo le equazioni di Newton, ma tutte le leggi fisiche sono invarianti per traslazioni e per rotazioni degli assi

Queste proprietà sono talmente importanti nella formulazione e nell'applicazione delle leggi fisiche che è stata inventata una tecnica matematica per poterle sfruttare adeguatamente:

il calcolo vettoriale

Vettori

- Si definisce vettore una qualunque grandezza fisica associata a tre numeri che si trasformano tra loro sotto rotazioni come le coordinate spaziali

Sistema $\vec{a} = (ax, ay, az)$

Sistema ruotato $\vec{a} = (ax', ay', az')$

Il vettore è lo stesso nei due sistemi ma le sue componenti sono diverse

$$ax' = ax \cos\vartheta + ay \operatorname{sen}\vartheta$$
$$ay' = ay \cos\vartheta - ax \operatorname{sen}\vartheta$$
$$az' = az$$

Le componenti (ax, ay, az) si trasformano sotto rotazioni come (x, y, z)

Vettori

- Si definisce vettore una qualunque grandezza fisica associata a tre numeri che si trasformano tra loro sotto rotazioni come le coordinate spaziali

Sistema $\vec{a} = (ax, ay, az)$

Sistema ruotato $\vec{a} = (ax', ay', az')$

$$ax' = ax \cos\vartheta + ay \operatorname{sen}\vartheta$$
$$ay' = ay \cos\vartheta - ax \operatorname{sen}\vartheta$$
$$az' = az$$

Il vettore è lo stesso nei due sistemi ma le sue componenti sono diverse

Le componenti (ax, ay, az) si trasformano sotto rotazioni come (x, y, z)

- Le leggi fisiche posso allora essere espresse in termini di vettori:

$$\begin{cases} m\, d^2x/dt^2 = Fx \\ m\, d^2y/dt^2 = Fy \\ m\, d^2z/dt^2 = Fz \end{cases} \Rightarrow \boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}}$$

Sappiamo che se l'equazione è vera in un sistema di coordinate lo sarà in qualunque altro, perché i vettori trasformano tutti nello stesso modo

Vettori

- Nelle rotazioni si conserva la distanza tra due punti:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Poiché le componenti di un vettore (ax, ay, az) trasformano come (x, y, z), ne segue anche che resta invariato nelle rotazioni il quadrato di un qualunque vettore:

$$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = ax^2 + ay^2 + az^2 = ax'^2 + ay'^2 + az'^2$$

È uno "scalare"

Per lo stesso argomento, nelle rotazioni resta invariato il prodotto scalare tra due vettori:

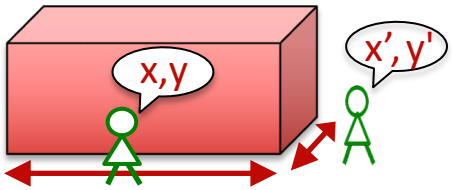
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ax\ bx + ay\ by + az\ bz = ax'\ bx' + ay'\ by' + az'\ bz'$$

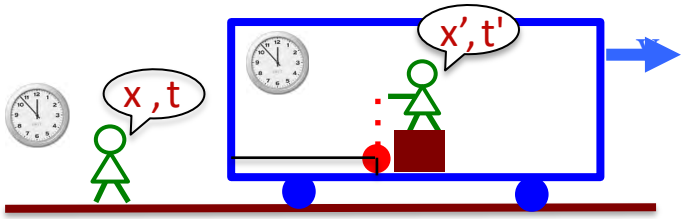
È uno "scalare"

Quadrivettori

- Per il principio di relatività, le leggi fisiche hanno la stessa forma in qualunque sistema di riferimento inerziale.
  In altri termini, le leggi fisiche sono invarianti per trasformazioni di Lorentz.

- Abbiamo già discusso l'analogia tra rotazioni e trasformazioni di Lorentz





Rotazioni spaziali

$$x' = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y$$
$$y' = \cos\theta\, y - \operatorname{sen}\theta\, x$$

Trasformazioni di Lorentz

$$x' = \gamma\left(x - v\,t\right)$$
$$ct' = \gamma\left(ct - v/c\,x\right)$$

In analogia con i vettori nel caso delle rotazioni, per esprimere efficacemente l'invarianza delle leggi fisiche sotto trasformazioni di Lorentz risulta utile definire i quadrivettori

Quadrivettori

- Un quadrivettore è una grandezza fisica associata a 4 numeri che si trasformano tra loro nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro con le trasformazioni di Lorentz, come le coordinate spazio-temporali (ct, x, y, z)

- Il primo quadrivettore è dunque la posizione stessa, l'evento nello spazio-tempo:

$$x^{\mu} = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$$

- Un generico quadrivettore è definito come:

$$a^{\mu} = (a_0, \vec{a}) = (a_0, a_x, a_y, a_z)$$

Quadrivettori

- Un quadrivettore è una grandezza fisica associata a 4 numeri che si trasformano tra loro nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro con le trasformazioni di Lorentz, come le coordinate spazio-temporali (ct, x, y, z)

Per il quadrivettore posizione:

$$x^{\mu} = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$$

Nel passaggio tra due sistemi di riferimento inerziali:

$$ct' = \gamma(ct - (v/c)\,x)$$
$$x' = \gamma(x - (v/c)\,ct)$$
$$y' = y \;,\quad z' = z$$

,

Quadrivettori

- Un quadrivettore è una grandezza fisica associata a 4 numeri che si trasformano tra loro nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro con le trasformazioni di Lorentz, come le coordinate spazio-temporali (ct, x, y, z)

Per il quadrivettore posizione:

$$x^{\mu} = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$$

Per un generico quadrivettore:

$$a^{\mu} = (a_0, \vec{a}) = (a_0, a_x, a_y, a_z)$$

Nel passaggio tra due sistemi di riferimento inerziali:

$$a'_0 = \gamma(a_0 - (v/c)\, a_1)$$
$$a'_1 = \gamma(a_1 - (v/c)\, a_0)$$
$$a'_2 = a_2 \qquad a'_3 = a_3$$

QUADRIVETTORI

- Così come nelle rotazioni si conserva la distanza r^2 tra due punti, nelle trasformazioni di Lorentz si conserva l'intervallo, ossia il «quadrato» del quadrivettore posizione:

$$x^2 = x^\mu x_\mu = c^2t^2 - \vec{r}^{\,2} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad x_\mu = (ct, -\vec{r})$$

← e somma su μ sottintesa

,

QUADRIVETTORI

- Così come nelle rotazioni si conserva la distanza r^2 tra due punti, nelle trasformazioni di Lorentz si conserva l'intervallo, ossia il «quadrato» del quadrivettore posizione:

$$x^2 = x^\mu x_\mu = c^2t^2 - \vec{r}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad x_\mu = (ct, -\vec{r})$$

← e somma su μ sottintesa

- Poiché le componenti di un generico quadrivettore trasformano come le componenti della posizione, risulta invariante sotto trasformazioni di Lorentz il quadrato di un qualunque quadrivettore:

$$a^2 = a^\mu a_\mu = a_0^2 - \vec{a}^2 = a_0^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2$$

È uno scalare

,

QUADRIVETTORI

- Così come nelle rotazioni si conserva la distanza r^2 tra due punti, nelle trasformazioni di Lorentz si conserva l'intervallo, ossia il «quadrato» del quadrivettore posizione:

$$x^2 = x^\mu x_\mu = c^2t^2 - \vec{r}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad x_\mu = (ct, -\vec{r})$$

← e somma su μ sottintesa

- Poiché le componenti di un generico quadrivettore trasformano come le componenti della posizione, risulta invariante sotto trasformazioni di Lorentz il quadrato di un qualunque quadrivettore:

$$a^2 = a^\mu a_\mu = a_0^2 - \vec{a}^2 = a_0^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2$$

È uno scalare

- Per lo stesso argomento, nelle trasformazioni di Lorentz resta invariato il prodotto scalare di due quadrivettori:

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = a_0 b_0 - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

È uno scalare

La quadrivelocità

- Consideriamo il moto di una particella di massa m con velocità $\vec{v}$.
- La velocità stessa $\vec{v}$ non può essere parte di un quadrivettore perché le sue componenti trasformano non linearmente (fattore $1+v_x u/c^2$ a denominatore).

  La differenza infinitesima dx^μ tra due eventi che definiscono posizione e tempo della particella è un quadrivettore. Inoltre l'intervallo di tempo proprio $d\tau$ è uno scalare, giacché $ds = c\,d\tau = c\,dt\,/\,\gamma$

  Possiamo allora definire il quadrivettore quadrivelocità come:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \left(\gamma c\,,\gamma \vec{v}\right)$$

È un quadrivettore

- Nel limite non relativistico: $u^\mu \to \left(c, \vec{v}\right)$
- L'invariante quadrato della quadrivelocità è: $u^2 = u^\mu u_\mu = \gamma^2\left(c^2 - v^2\right) = c^2$

Il quadrimpulso

- Definiamo il quadrivettore quadrimpulso.

  Nel limite non relativistico le componenti spaziali della quadrivelocità coincidono con la velocità ordinaria della particella. Risulta allora naturale porre:

$$p^{\mu} = mu^{\mu} = m\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = m\gamma\frac{dx^{\mu}}{dt} = \left(m\gamma c\,, m\gamma\vec{v}\right)$$

Il quadrimpulso

- Definiamo il quadrivettore quadrimpulso.

Nel limite non relativistico le componenti spaziali della quadrivelocità coincidono con la velocità ordinaria della particella. Risulta allora naturale porre:

$$p^\mu = mu^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = m\gamma\frac{dx^\mu}{dt} = \left(m\gamma c\,, m\gamma\vec{v}\right)$$

- Studiamo il limite non relativistico di p^μ :

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \simeq m\vec{v} + \ldots$$

È l'impulso non relativistico

$$p_0 = m\gamma c = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \simeq mc\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\ldots\right) = mc + \frac{1}{2}\frac{mv^2}{c} + \ldots$$

cp_0 coincide, a meno di una costante. con l'energia cinetica della particella

Identifichiamo allora cp_0 con l'energia della particella

Il quadrimpulso

- L'energia relativistica è allora :

$$E = cp_0 = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Per una particella a riposo $E = mc^2$

Il quadrimpulso

- L'energia relativistica è allora :

$$E = cp_0 = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Per una particella a riposo $E = mc^2$

- In termini di energia e impulso relativistici il quadrimpulso si scrive:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

Questa forma è generale: vale anche per particelle di massa nulla

Il quadrimpulso

- L'energia relativistica è allora :

$$E = cp_0 = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Per una particella a riposo $E = mc^2$

- In termini di energia e impulso relativistici il quadrimpulso si scrive:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

Questa forma è generale: vale anche per particelle di massa nulla

- Calcoliamo il quadrato del quadrimpulso per la particella di massa m:

$$p^2 = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2$$

La massa è un invariante

Energia e impulso relativistici

- Dal quadrato del quadrimpulso

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}$$

Relazione relativistica tra energia e impulso

Energia e impulso relativistici

- Dal quadrato del quadrimpulso

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}$$

Relazione relativistica tra energia e impulso

$m = 0 \rightarrow E = cp$

Particella di massa nulla

$p = 0 \rightarrow E = mc^2$

Particella in quiete

Energia e impulso relativistici

- Dal quadrato del quadrimpulso

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}$$

Relazione relativistica tra energia e impulso

- Dalle relazioni $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$, $E = m\gamma c^2$ segue:

$$\vec{v} = c^2\frac{\vec{p}}{E}$$

Per particelle di massa nulla $E = cp$ e dunque:

$$v = c$$

Energia e impulso relativistici

- Dal quadrato del quadrimpulso

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}$$

Relazione relativistica tra energia e impulso

- Dalle relazioni $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$, $E = m\gamma c^2$ segue:

$$\vec{v} = c^2\frac{\vec{p}}{E}$$

Per particelle di massa nulla $E = cp$ e dunque:

$$v = c$$

- Nel limite non relativistico:

$$E = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} \simeq mc^2\left(1+\frac{p^2}{2m^2c^2}-\frac{p^4}{8m^4c^4}+\ldots\right) = mc^2+\frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3c^2}+\ldots$$

Trasformazioni del quadrimpulso

- Nel cambiamento di sistema di riferimento inerziale, le componenti del quadrimpulso, trattandosi di un quadrivettore, si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz

$$E' = \gamma(E - v\,p_x)$$
$$p'_x = \gamma(p_x - (v/c^2)E)$$
$$p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z$$

$$E = \gamma(E' + v\,p'_x)$$
$$p_x = \gamma(p'_x + (v/c^2)E')$$
$$p_y = p'_y \qquad p_z = p'_z$$

Trasformazioni del quadrimpulso

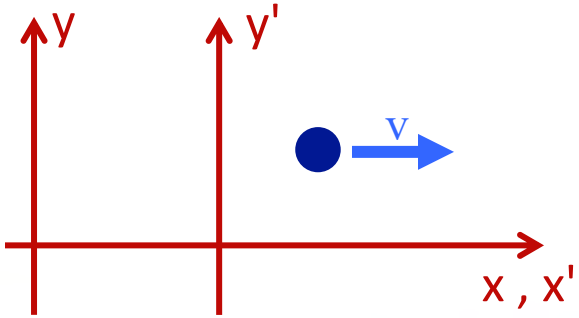
- Nel cambiamento di sistema di riferimento inerziale, le componenti del quadrimpulso, trattandosi di un quadrivettore, si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz

$$E' = \gamma(E - v\,p_x)$$
$$p'_x = \gamma(p_x - (v/c^2)E)$$
$$p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z$$

$$E = \gamma(E' + v\,p'_x)$$
$$p_x = \gamma(p'_x + (v/c^2)E')$$
$$p_y = p'_y \qquad p_z = p'_z$$

- Esempio: particella di massa m in moto nel sistema K con velocità v.

  Sia K' il sistema di riferimento in cui la particella è in quiete.



In K' particella in quiete:

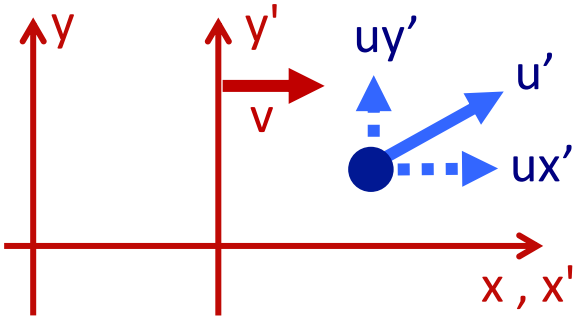
$$E' = mc^2 \quad , \quad \vec{p}' = 0$$

In K particella in moto:

$$E = \gamma E' = mc^2\gamma$$
$$p_x = \gamma(v/c^2)E' = m\gamma v$$
$$p_y = p_z = 0$$

Trasformazioni del quadrimpulso

- Dalle trasformazioni di Lorentz per il quadrimpulso si può ricavare nuovamente la legge di composizione delle velocità:



K' in moto con velocità (v,0,0) rispetto a K

Particella in moto con velocità (ux',uy',0) in K'

$$u_x = c^2 \frac{p_x}{E} = c^2 \frac{\gamma\left(p'_x - \left(v/c^2\right)E'\right)}{\gamma\left(E' - vp'_x\right)} = c^2 \frac{E'\left(p'_x/E' - \left(v/c^2\right)\right)}{E'\left(1 - vp'_x/E'\right)} = \frac{u'_x - v}{1 - vu'_x/c^2}$$

$$u_y = c^2 \frac{p_y}{E} = c^2 \frac{p'_y}{\gamma\left(E' - vp'_x\right)} = \frac{c^2 p'_y/E'}{\gamma\left(1 - vp'_x/E'\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 - vu'_x/c^2\right)}$$

$$u_z = c^2 \frac{p_z}{E} = c^2 \frac{p'_z \quad (u'_z=0)}{\gamma\left(E' - vp'_x\right)} = 0$$

Nota: sotto trasformazioni di Lorentz la velocità trasforma in modo non lineare perché è un rapporto di componenti di un quadrivettore

Conservazione del quadrimpulso

- Le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso sono espresse, nella meccanica relativistica, dall'unica legge di conservazione del quadrimpulso:

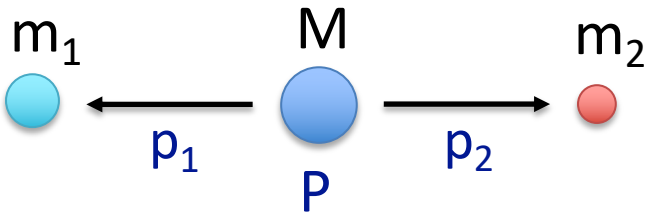
$$\sum_{iniziali} p_i^\mu = \sum_{finali} p_f^\mu$$

Conservazione del quadrimpulso

- Le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso sono espresse, nella meccanica relativistica, dall'unica legge di conservazione del quadrimpulso:

$$\sum_{iniziali} p_i^\mu = \sum_{finali} p_f^\mu$$

- Il decadimento in due corpi:



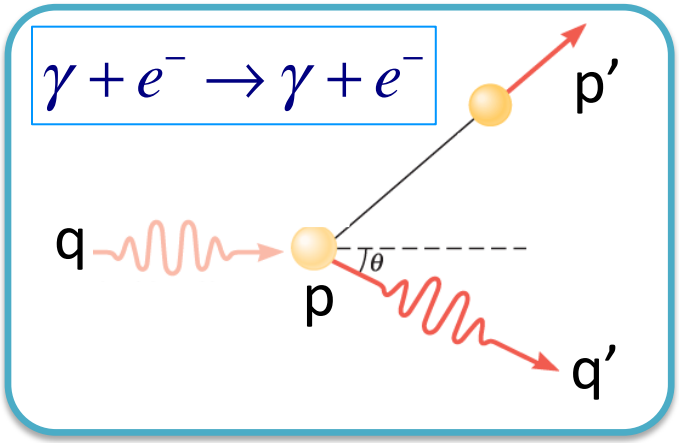
$$P = (Mc, \vec{0}) \qquad p_1 = \left(E_1/c, \vec{p}_1\right) \qquad p_2 = \left(E_2/c, \vec{p}_2\right)$$

$$P = p_1 + p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2^2 = m_2^2 c^2 = (P - p_1)^2 = P^2 + p_1^2 - 2P \cdot p_1 = M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2ME_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_1}{c^2} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \qquad \frac{E_2}{c^2} = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}$$

Conservazione del quadrimpulso

L'effetto Compton:



$$p + q = p' + q'$$

Per i fotoni: $E = \hbar\omega \quad , \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$

$$m_\gamma = 0 \quad \rightarrow \quad E = cp \quad \rightarrow \quad \omega = ck$$

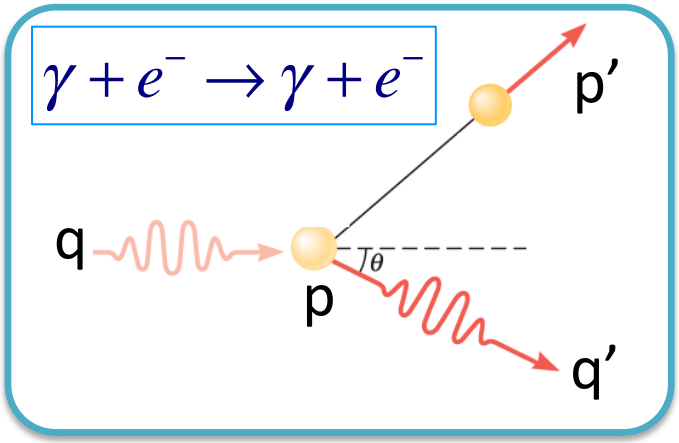
Elettroni: $p = \left(mc, \vec{0}\right) \quad , \quad p' = \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}'\right)$

Fotoni: $q = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k}\right) \quad , \quad q' = \left(\frac{\hbar\omega'}{c}, \hbar\vec{k}'\right)$

Conservazione del quadrimpulso

L'effetto Compton:

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$



Per i fotoni: $E = \hbar\omega \quad , \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$

$$m_\gamma = 0 \quad \rightarrow \quad E = cp \quad \rightarrow \quad \omega = ck$$

Elettroni: $p = \left(mc, \vec{0}\right) \quad , \quad p' = \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}'\right)$

Fotoni: $q = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k}\right) \quad , \quad q' = \left(\frac{\hbar\omega'}{c}, \hbar\vec{k}'\right)$

$$p + q = p' + q'$$

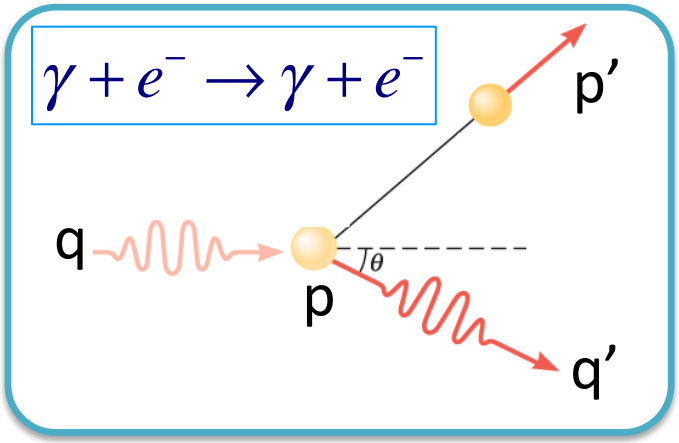
$$p'^2 = m^2c^2 = \left(p + q - q'\right)^2 = p^2 + q^2 + q'^2 + 2pq - 2pq' - 2qq' =$$

$$= m^2c^2 + 2m\hbar\omega - 2m\hbar\omega' - 2\frac{\hbar^2\omega\,\omega'}{c^2}(1 - \cos\theta)$$

Conservazione del quadrimpulso

L'effetto Compton:

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$



$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{\hbar}{mc^2}\left(1-\cos\theta\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi c/\lambda$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\left(1-\cos\theta\right)$$

$$p + q = p' + q'$$

$$p'^2 = \cancel{m^2c^2} = \left(p+q-q'\right)^2 = p^2 + q^2 + q'^2 + 2pq - 2pq' - 2qq' =$$

$$= \cancel{m^2c^2} + 2m\hbar\omega - 2m\hbar\omega' - 2\frac{\hbar^2\omega\,\omega'}{c^2}\left(1-\cos\theta\right)$$

Elementi di Fisica Teorica Contemporanea

1. Teoria della Relatività
2. Meccanica quantistica
3. Particelle e campi
4. Gravità quantistica

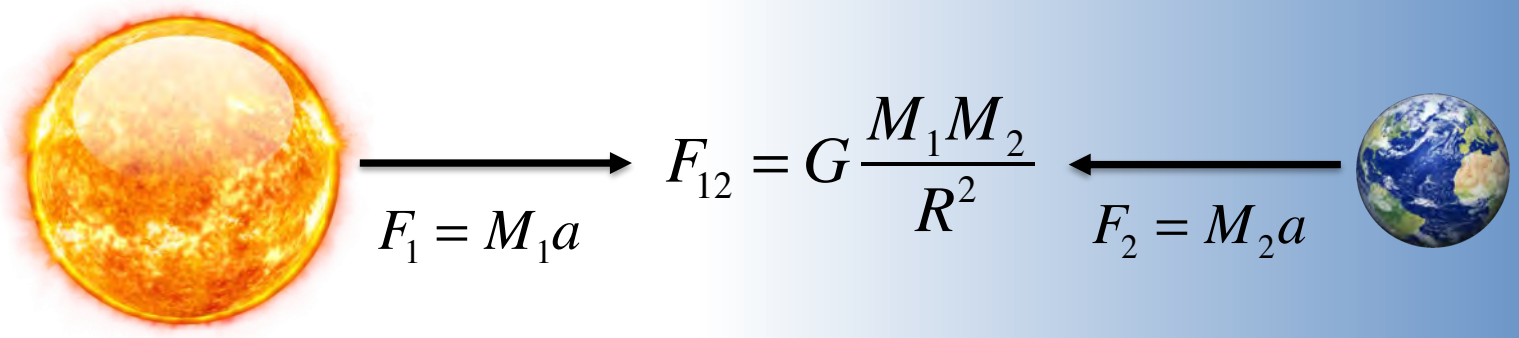
Teoria della Relatività
Parte III

1) Il tempo
2) Tempo e spazio assoluti
3) Tempo e spazio relativi
4) Lo spazio-tempo
5) Quadrivettori: velocità, impulso ed energia relativistiche
6) Lo spazio-tempo curvo

6) Lo spazio-tempo curvo

1. Gravitazione e relatività
2. Lo spazio curvo
3. Il principio di equivalenza
4. La deflessione della luce
5. La dilatazione del tempo
6. La curvatura dello spazio-tempo
7. Le onde gravitazionali
8. Il moto nello spazio-tempo curvo
9. I viaggi nel tempo

1. Gravitazione e relatività



NEWTON:

1) Ogni corpo attrae un altro con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza

2) Un corpo risponde ad una forza con un'accelerazione ad essa proporzionale

Queste sono le leggi di Newton della gravitazione universale e della dinamica e spiegano i movimenti di corpi, pianeti, stelle, galassie ecc.

Gravitazione e relatività

$$F_1 = M_1 a \longrightarrow \quad F_{12} = G\frac{M_1 M_2}{R^2} \quad \longleftarrow F_2 = M_2 a$$

NEWTON:

1) Ogni corpo attrae un altro con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza

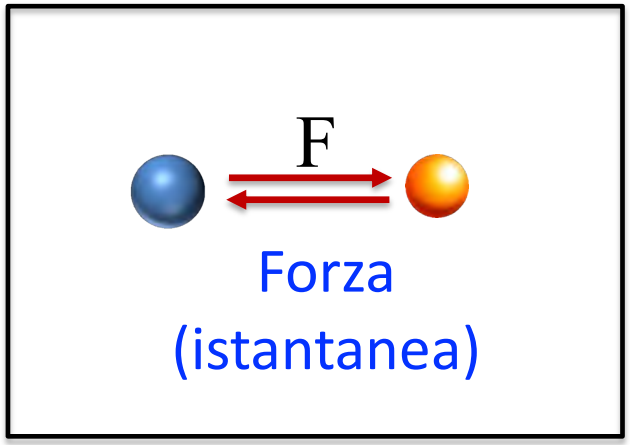
2) Un corpo risponde ad una forza con un'accelerazione ad essa proporzionale

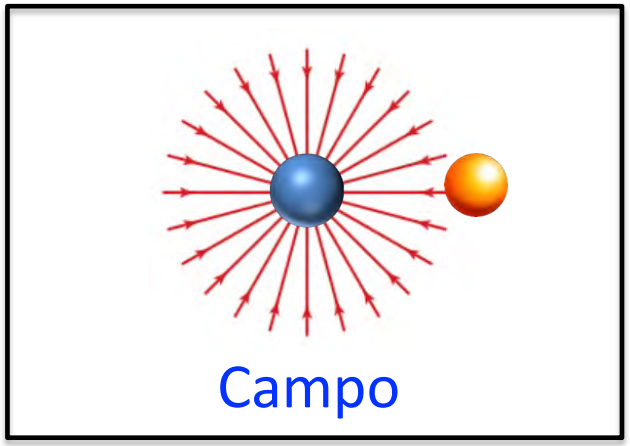
QUESTE LEGGI SONO INCOMPATIBILI CON LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ!

L'interazione è istantanea, ma nessun segnale può propagarsi a velocità maggiore della velocità della luce

Gravitazione e relatività: non forze ma campi...

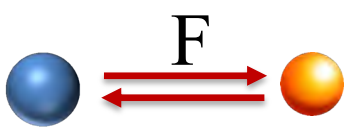
- Nella gravità newtoniana, l'idea di campo rappresenta solo un concetto ausiliario



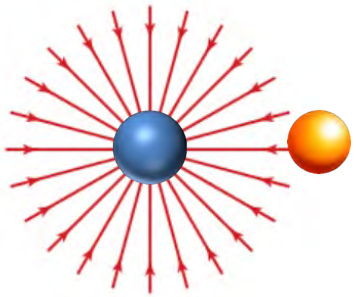


Gravitazione e relatività: non forze ma campi...

- Nella gravità newtoniana, l'idea di campo rappresenta solo un concetto ausiliario



Forza
(istantanea)

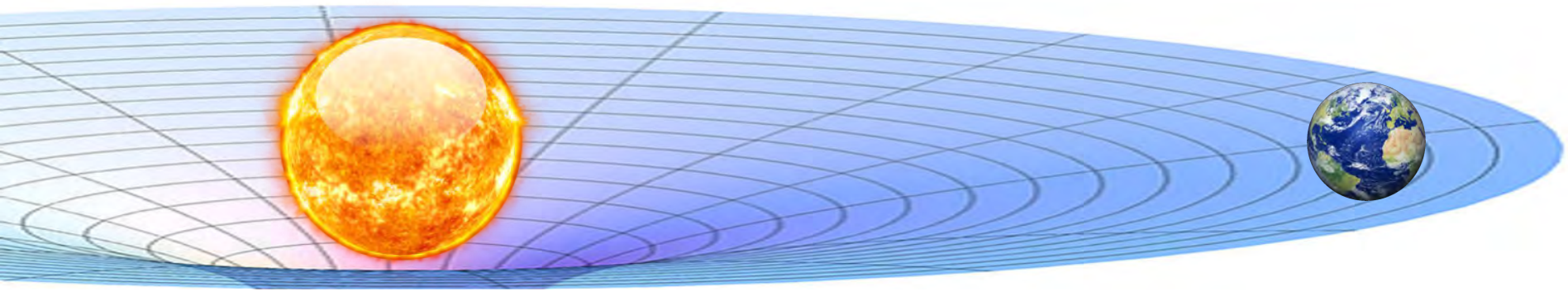


Campo

Ma le interazioni gravitazionali, come quelle elettromagnetiche, si propagano ad una velocità finita, la velocità della luce

➡ Il concetto di campo diventa essenziale ed acquista un significato fisico di per sé

La relatività generale



NEWTON:

1) Ogni corpo attrae un altro con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza

2) Un corpo risponde ad una forza con un'accelerazione ad essa proporzionale

EINSTEIN:

1) Vicino ad una massa lo spazio e il tempo, che sono fusi nello spazio-tempo, si incurvano

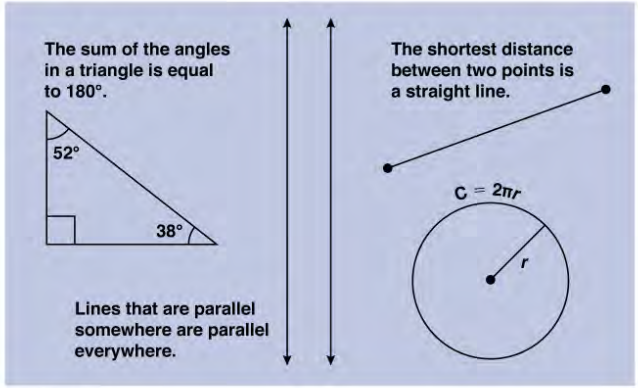
2) I corpi si muovono lungo «linee rette» in questo spazio-tempo curvo

2. Lo spazio curvo

Lo spazio curvo

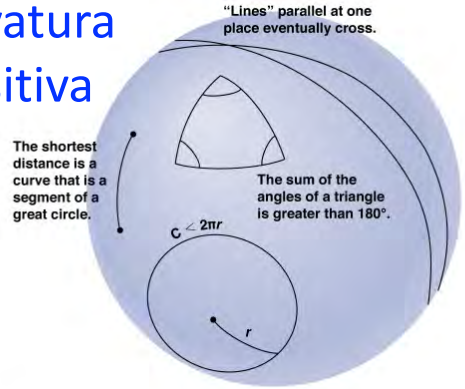
Si definisce curvo uno spazio in cui **non** valgono le leggi della geometria euclidea

- La somma degli angoli interni di un triangolo è diversa da 180°
- La circonferenza divisa per 2π non è uguale al raggio
- Due rette parallele in un punto sono parallele ovunque
- La linea più breve tra due punti è una linea retta
- ...

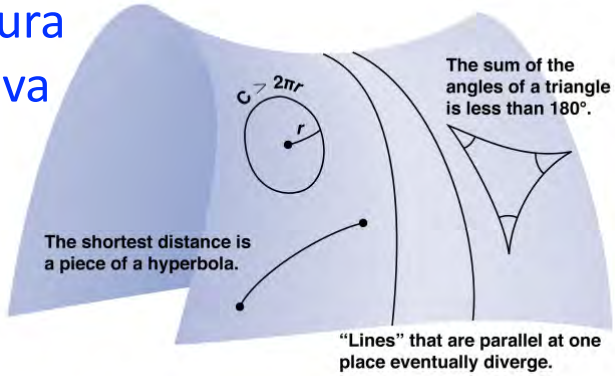


Curvatura nulla

Curvatura positiva



Curvatura negativa

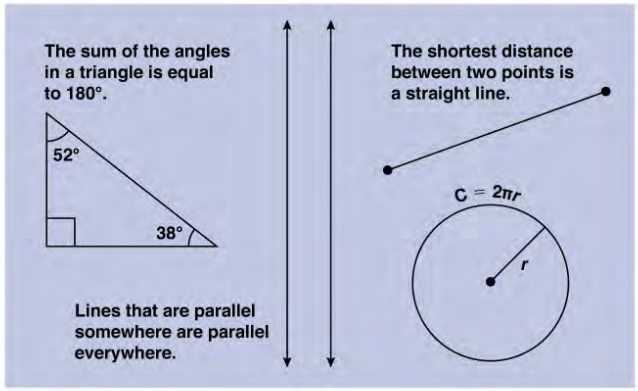


Lo spazio curvo

Si definisce curvo uno spazio in cui **non** valgono le leggi della geometria euclidea

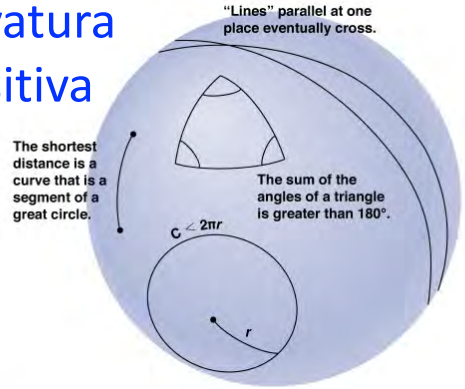
- È da notare che con questa definizione un cilindro non è curvo (si può "srotolare" su un piano).

  Quella che ci interessa qui è la curvatura intrinseca, quella cioè che si può rilevare con misurazioni locali

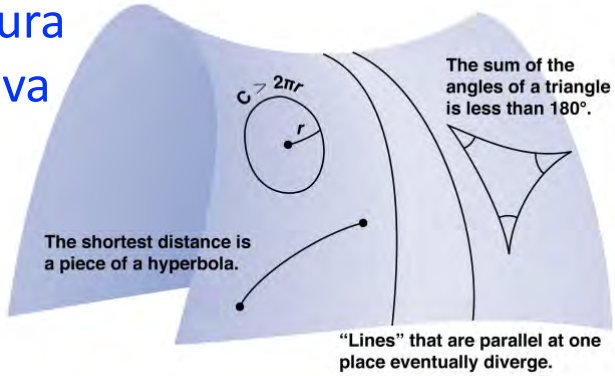


Curvatura nulla

Curvatura positiva



Curvatura negativa

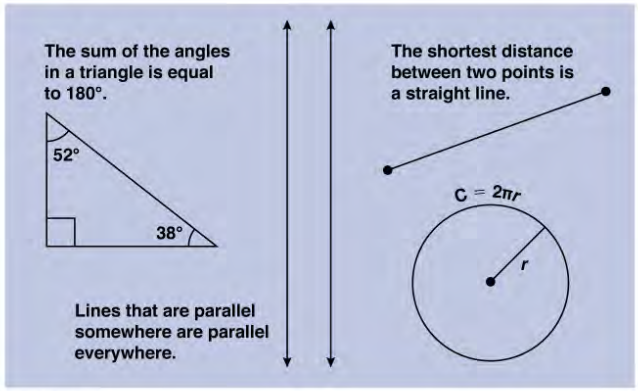


Lo spazio curvo

Si definisce curvo uno spazio in cui **non** valgono le leggi della geometria euclidea

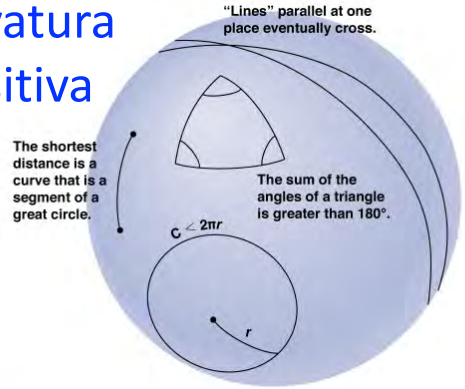
- In generale la curvatura di uno spazio può variare da punto a punto (si pensi alla superficie di una pera).

  La curvatura può essere ad esempio positiva in un punto e negativa in un altro

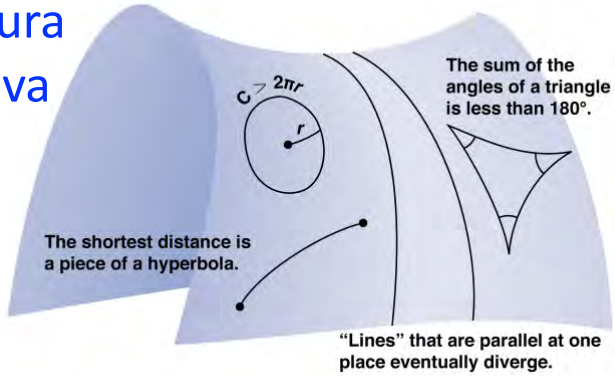


Curvatura nulla

Curvatura positiva



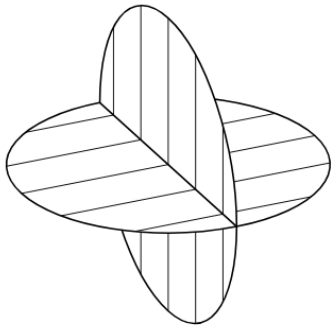
Curvatura negativa



Lo spazio curvo in D=3 dimensioni

- Nello spazio in D=3 la curvatura può avere diverse componenti

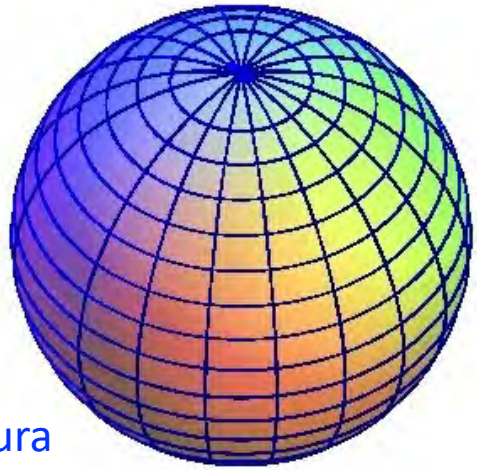
  Se ad esempio disegno un cerchio, in una direzione posso trovare $C > 2\pi r$, in un'altra direzione $C < 2\pi r$



- In D=3 possiamo misurare la curvatura media considerando ad esempio una sfera e definendo un «raggio in eccesso»:

$$r_{ecc} \equiv r_{mis} - \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{1/2}$$

r_{ecc} = raggio in eccesso
r_{mis} = raggio misurato
A = Area



La conoscenza della curvatura media non consente di prevedere tutte le proprietà geometriche dello spazio. La definizione completa della curvatura in D=3 richiede in ogni punto 6 coefficienti di curvatura

In generale occorrono $D^2(D^2-1)/12$ coefficienti (20 per D=4)

EINSTEIN: lo spazio è curvo e la causa della curvatura è la materia

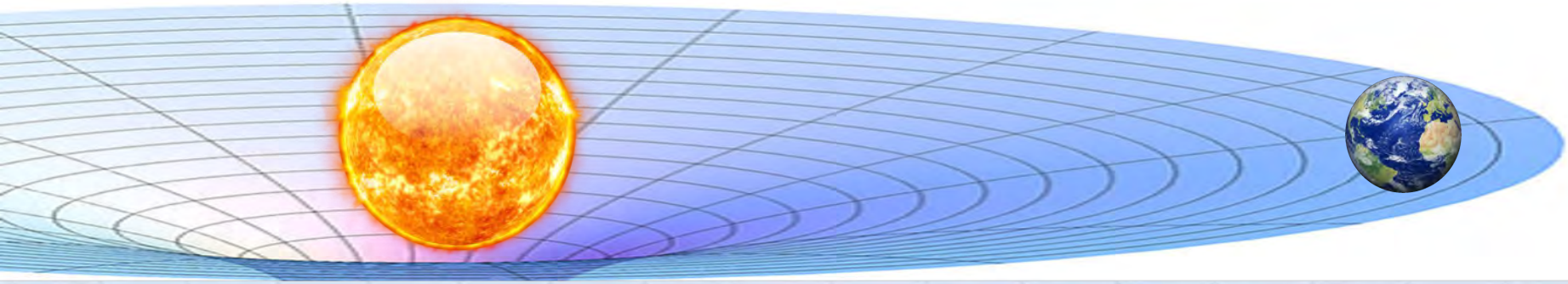
- Regola di Einstein per la curvatura media:
  Se in una regione di spazio è presente della materia e consideriamo una sfera abbastanza piccola perché al suo interno la densità di materia ρ sia praticamente costante allora:

$$r_{ecc} = r_{mis} - \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{1/2} = \frac{G}{3c^2} M$$

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Massa contenuta all'interno della sfera

La costante vale: $G / 3c^2 = 2.5 \times 10^{-29}$ cm/g



EINSTEIN: lo spazio è curvo e la causa della curvatura è la materia

- Regola di Einstein per la curvatura media:
  Se in una regione di spazio è presente della materia e consideriamo una sfera abbastanza piccola perché al suo interno la densità di materia ρ sia praticamente costante allora:

$$r_{ecc} = r_{mis} - \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{1/2} = \frac{G}{3c^2} M$$

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Massa contenuta all'interno della sfera

La costante vale: $G / 3c^2 = 2.5 \times 10^{-29}$ cm/g

- Per il Sole:

$M_{Sole} \simeq 2 \times 10^{33}$ g

$r_{ecc} \simeq 0.5$ Km

- Per la Terra:

$M_{Terra} \simeq 6 \times 10^{27}$ g

$r_{ecc} \simeq 1.5$ mm

EINSTEIN: lo spazio è curvo e la causa della curvatura è la materia

- Regola di Einstein per la curvatura media:
  Se in una regione di spazio è presente della materia e consideriamo una sfera abbastanza piccola perché al suo interno la densità di materia ρ sia praticamente costante allora:

$$r_{ecc} = r_{mis} - \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{1/2} = \frac{G}{3c^2} M$$

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

- Questa legge dice anche che la curvatura media su una sfera è nulla quando non c'è massa all'interno, anche nelle vicinanze di una grande massa. Questo non significa però che siano nulle tutte le sue componenti.

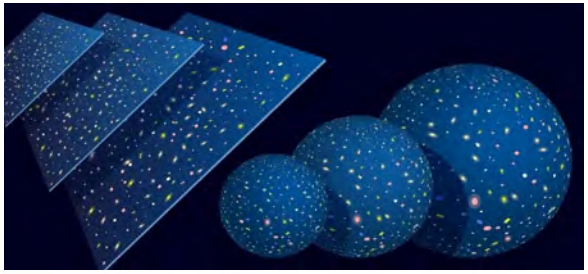
EINSTEIN: lo spazio è curvo e la causa della curvatura è la materia

- Regola di Einstein per la curvatura media:
  Se in una regione di spazio è presente della materia e consideriamo una sfera abbastanza piccola perché al suo interno la densità di materia ρ sia praticamente costante allora:

$$r_{ecc} = r_{mis} - \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{1/2} = \frac{G}{3c^2} M \qquad M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

- Questa legge dice anche che la curvatura media su una sfera è nulla quando non c'è massa all'interno, anche nelle vicinanze di una grande massa. Questo non significa però che siano nulle tutte le sue componenti.

- Se in un piano vi sono molti rigonfiamenti ci potrebbe essere, oltre alle curvatura delle singole bolle, una curvatura complessiva. Le misure oggi indicano che il nostro Universo ha una curvatura media nulla (oppure molto piccola)



3. Il principio di equivalenza

Il principio di equivalenza

- Nella ricerca di una teoria della gravitazione che fosse coerente con la teoria della relatività, Einstein giunse ad un importante principio che lo guidò verso le leggi corrette: il principio di equivalenza ("l'intuizione più felice della mia vita")

- Galileo per primo aveva osservato che:

In un campo gravitazionale i corpi cadono tutti con la stessa accelerazione indipendentemente dal loro peso

- Newton realizza che questo corrisponde all'equivalenza:

⇒ massa inerziale = massa gravitazionale

$$\begin{cases} F = G\dfrac{m_g M}{r^2} \\ F = m_i a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \left(\frac{m_g}{m_i}\right)\frac{GM}{r^2}}$$

Il rapporto m_g/m_i è dunque una costante universale che possiamo porre uguale ad 1 con una opportuna definizione di G

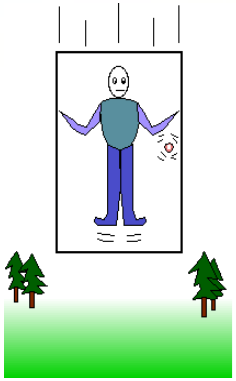
È il principio di equivalenza "debole"

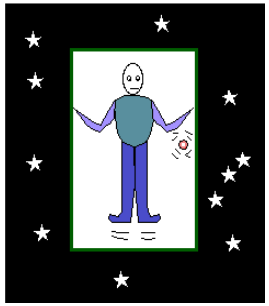
Il principio di equivalenza

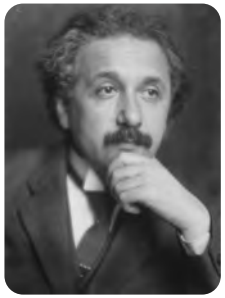
- Einstein estende questa osservazione formulando il

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA "FORTE"

Un sistema di riferimento in caduta libera è localmente indistinguibile da un sistema di riferimento inerziale







1907

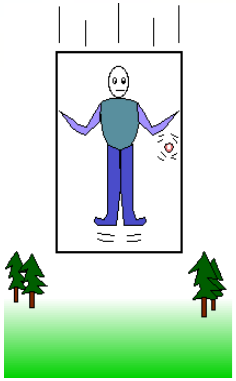
Nel sistema in caduta libera valgono le leggi della relatività ristretta

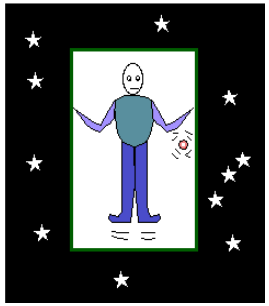
Il principio di equivalenza

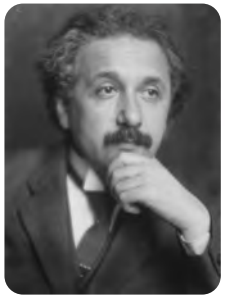
- Einstein estende questa osservazione formulando il

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA "FORTE"

Un sistema di riferimento in caduta libera è localmente indistinguibile da un sistema di riferimento inerziale



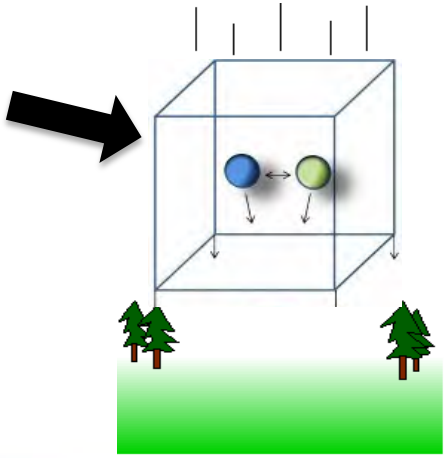




1907

Nel sistema in caduta libera valgono le leggi della relatività ristretta

"Localmente" significa che l'equivalenza vale in una regione di spazio piccola in cui il campo gravitazionale non varia apprezzabilmente.

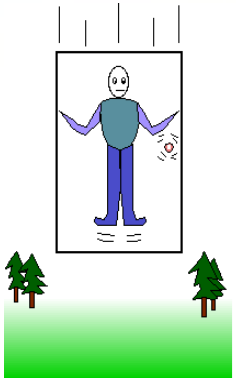


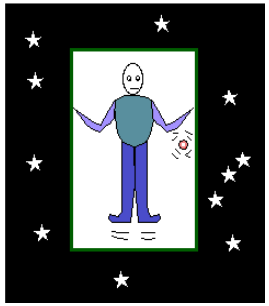
Il principio di equivalenza

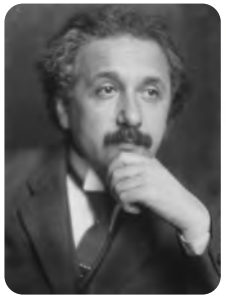
- Einstein estende questa osservazione formulando il

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA "FORTE"

Un sistema di riferimento in caduta libera è localmente indistinguibile da un sistema di riferimento inerziale



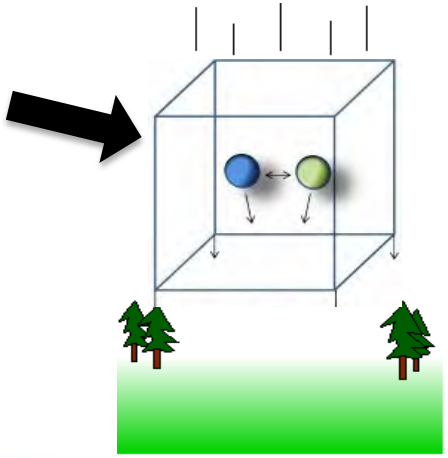




1907

Nel sistema in caduta libera valgono le leggi della relatività ristretta

"Localmente" significa che l'equivalenza vale in una regione di spazio piccola in cui il campo gravitazionale non varia apprezzabilmente.



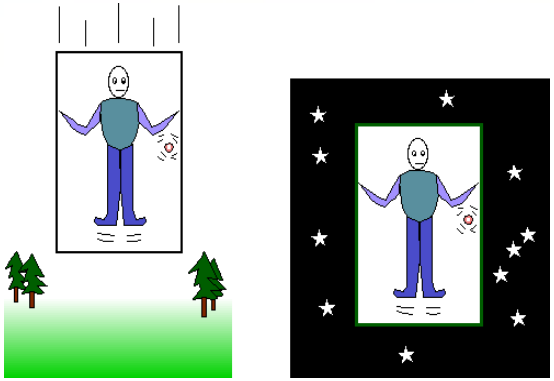
- Se vale il principio di equivalenza forte allora deve essere valido anche il principio di equivalenza debole. Da un punto di vista logico, il viceversa non è necessariamente vero

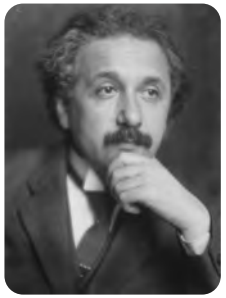
Il principio di equivalenza

- Einstein estende questa osservazione formulando il

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA "FORTE"

Un sistema di riferimento in caduta libera è localmente indistinguibile da un sistema di riferimento inerziale



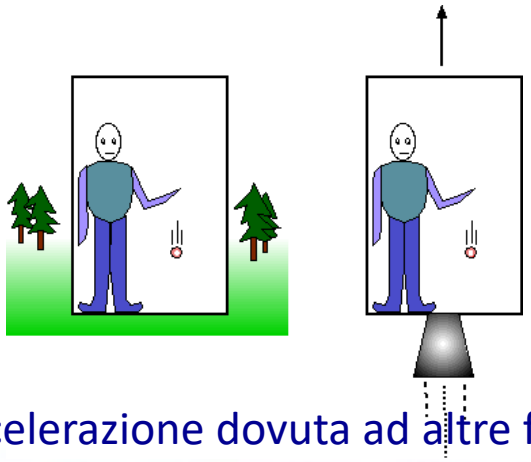


1907

Nel sistema in caduta libera valgono le leggi della relatività ristretta

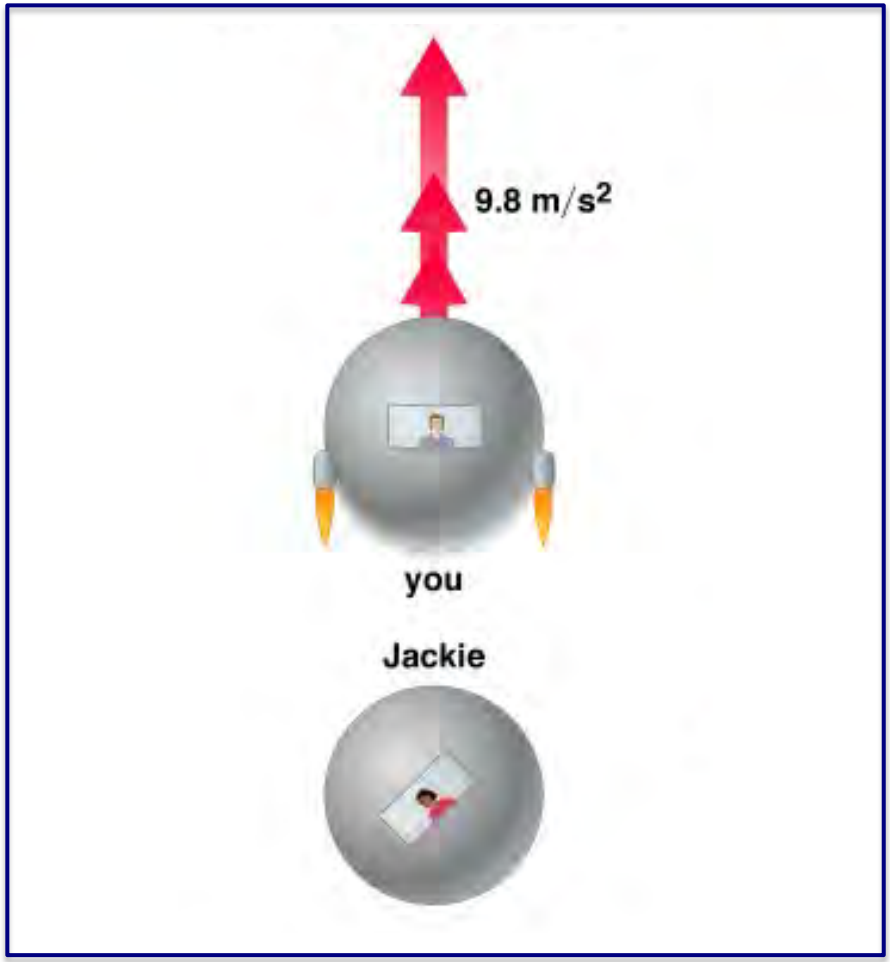
- Consideriamo un'altra situazione:

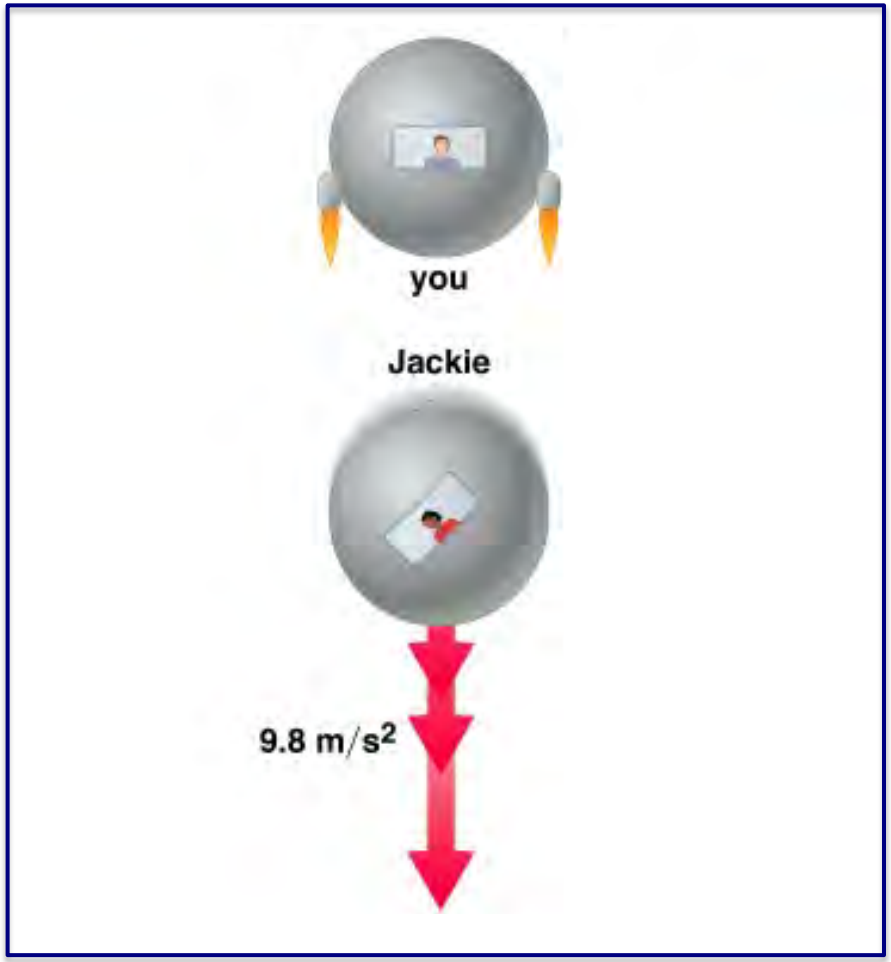
Un sistema in un campo gravitazionale è indistinguibile da un sistema di riferimento accelerato



L'accelerazione dovuta alla gravità è equivalente all'accelerazione dovuta ad altre forze

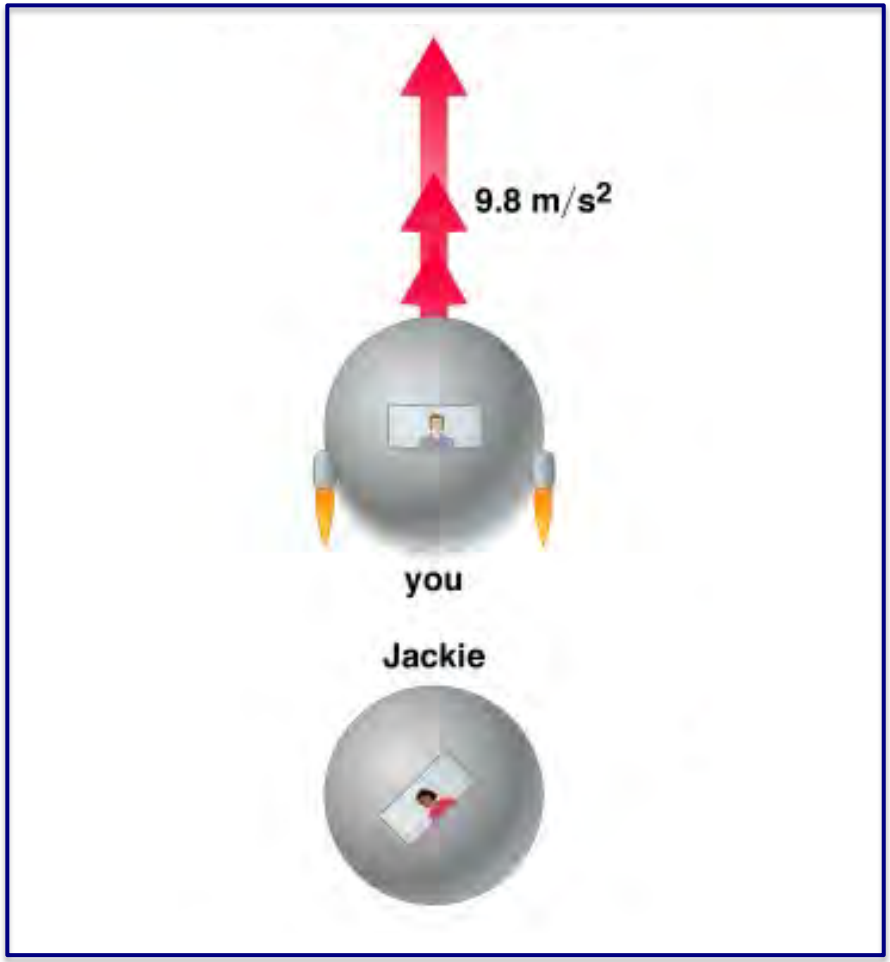
Il principio di equivalenza

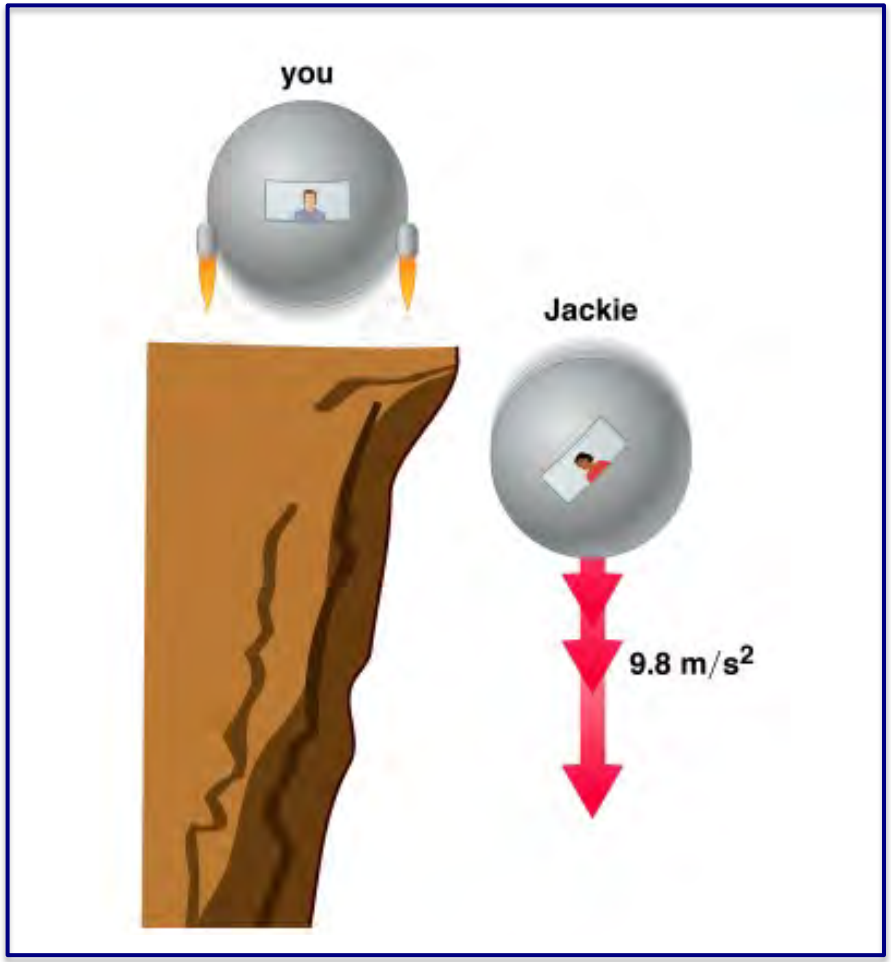




Le due situazioni sono distinguibili

Il principio di equivalenza

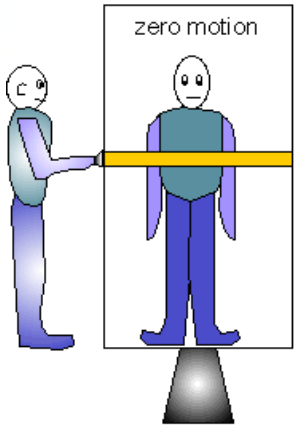




Le due situazioni sono indistinguibili

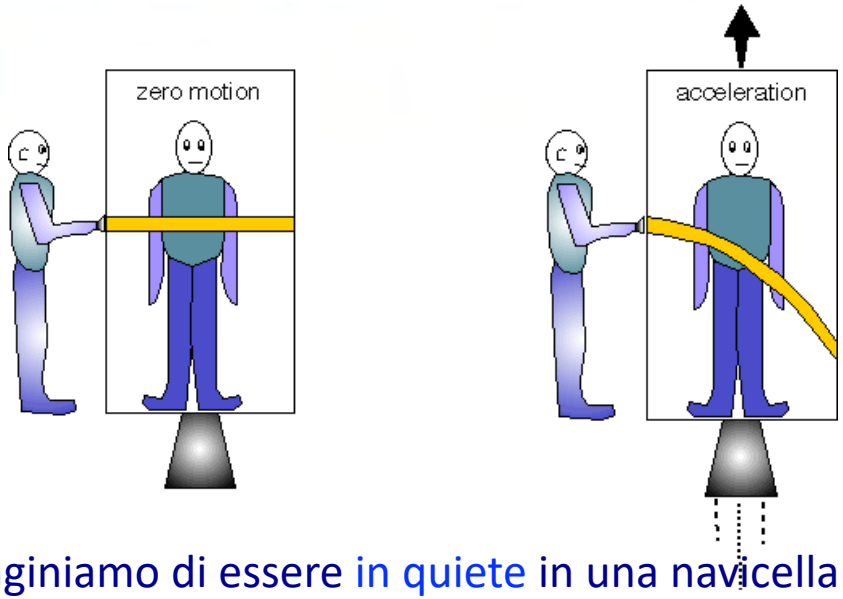
4. La deflessione della luce

La deflessione della luce



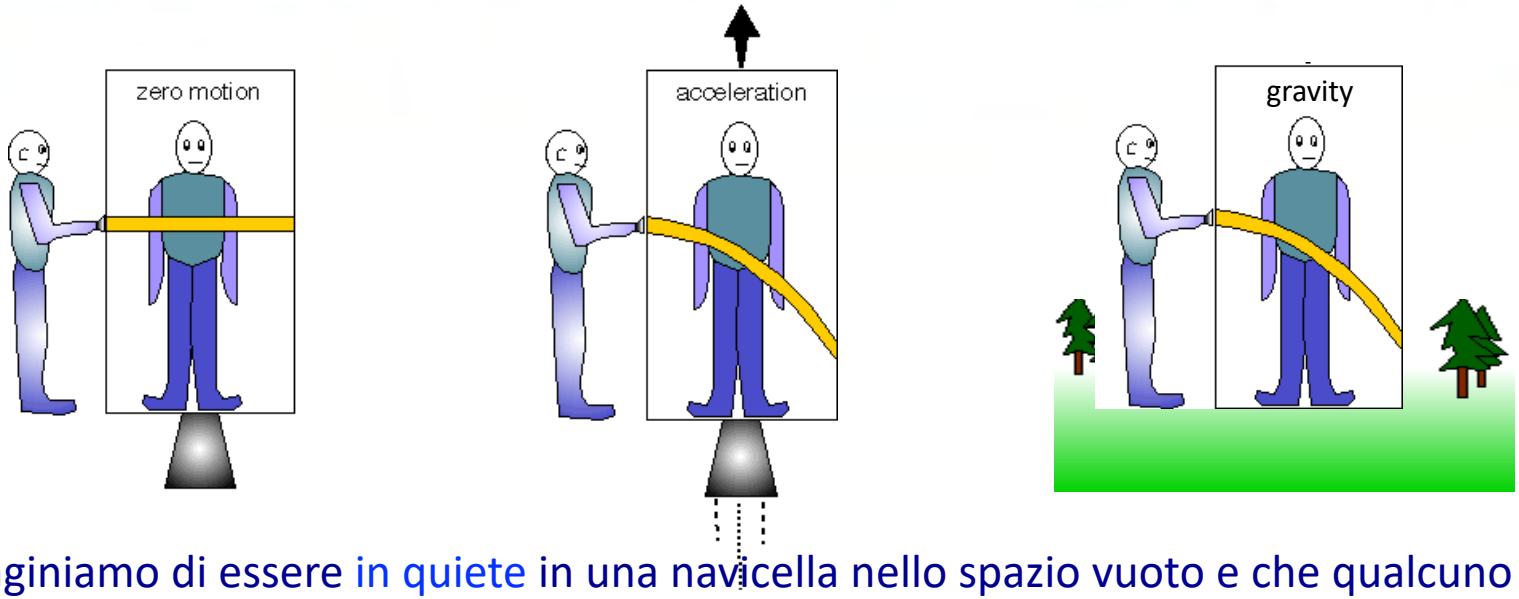
- Immaginiamo di essere in quiete in una navicella nello spazio vuoto e che qualcuno al di fuori invii un fascio di luce verso la parete opposta della navicella. All'interno della navicella vedremmo la luce propagarsi in linea orizzontale

La deflessione della luce



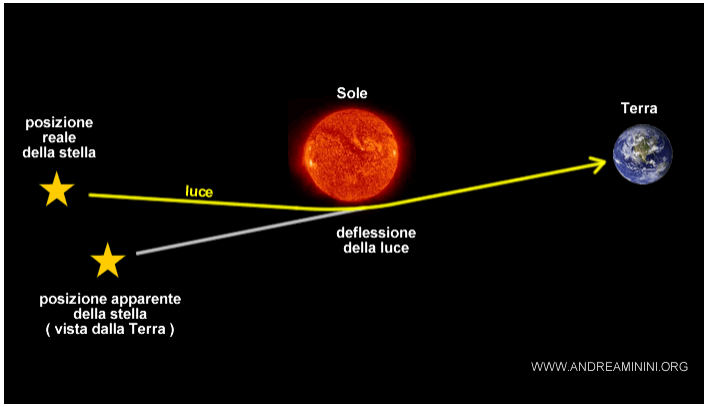
- Immaginiamo di essere in quiete in una navicella nello spazio vuoto e che qualcuno al di fuori invii un fascio di luce verso la parete opposta della navicella. All'interno della navicella vedremmo la luce propagarsi in linea orizzontale
- Se invece la navicella si muove con accelerazione verso l'alto, allora rispetto a noi il fascio di luce seguirà una traiettoria curva verso il basso

La deflessione della luce



- Immaginiamo di essere in quiete in una navicella nello spazio vuoto e che qualcuno al di fuori invii un fascio di luce verso la parete opposta della navicella. All'interno della navicella vedremmo la luce propagarsi in linea orizzontale
- Se invece la navicella si muove con accelerazione verso l'alto, allora rispetto a noi il fascio di luce seguirà una traiettoria curva verso il basso
- Ma per il principio di equivalenza, il sistema accelerato è indistinguibile da un sistema in un campo gravitazionale. Anche In un campo gravitazionale, dunque, la luce segue una traiettoria curva e "cade" verso il basso.

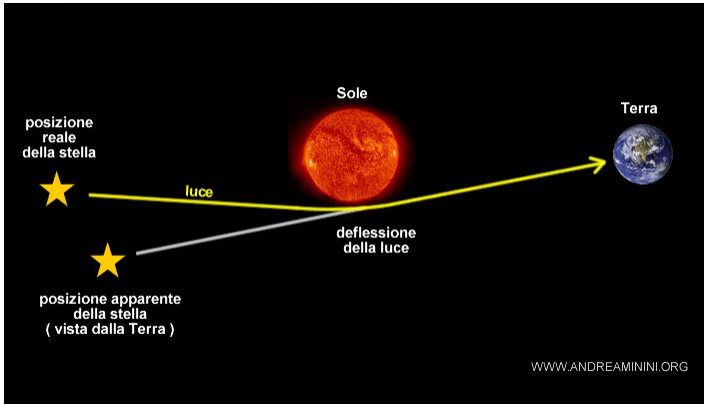
La deflessione della luce



- La prima osservazione di deflessione della luce venne osservata nel 1919 da Arthur Eddington durante un'eclissi solare totale, per vedere il mutamento nella posizione apparente delle stelle quando si trovavano a passare in prossimità del Sole nella sfera celeste.

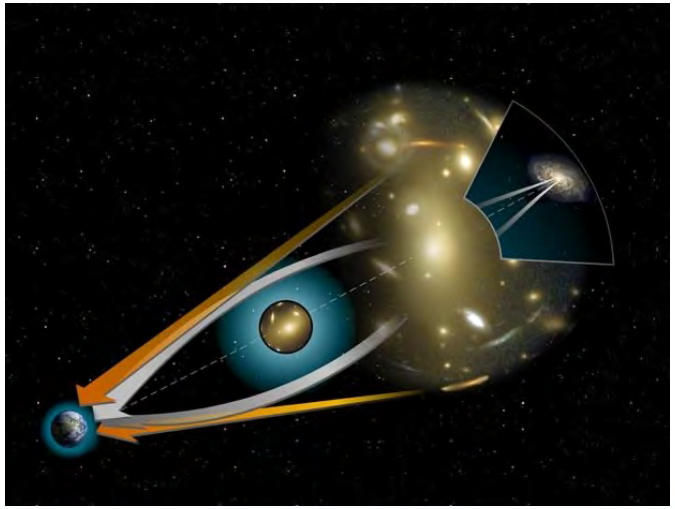
Il risultato fu in accordo con le previsioni della relatività generale e finì sulle prime pagine dei giornali, dando risonanza ad Einstein e alla sua teoria in tutto il mondo

La deflessione della luce



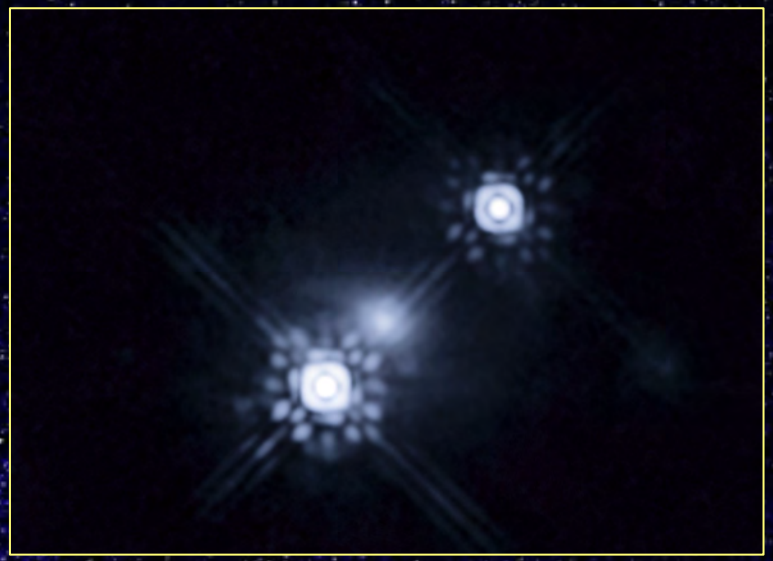
- La prima osservazione di deflessione della luce venne osservata nel 1919 da Arthur Eddington durante un'eclissi solare totale, per vedere il mutamento nella posizione apparente delle stelle quando si trovavano a passare in prossimità del Sole nella sfera celeste.

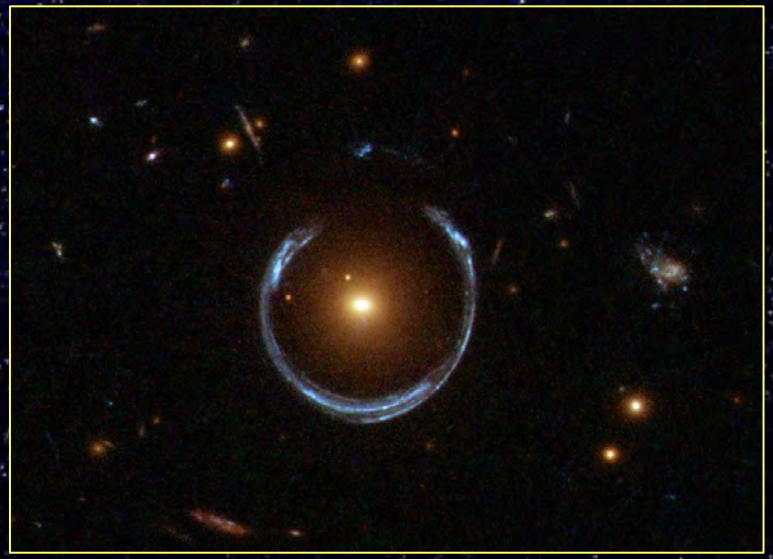
Il risultato fu in accordo con le previsioni della relatività generale e finì sulle prime pagine dei giornali, dando risonanza ad Einstein e alla sua teoria in tutto il mondo

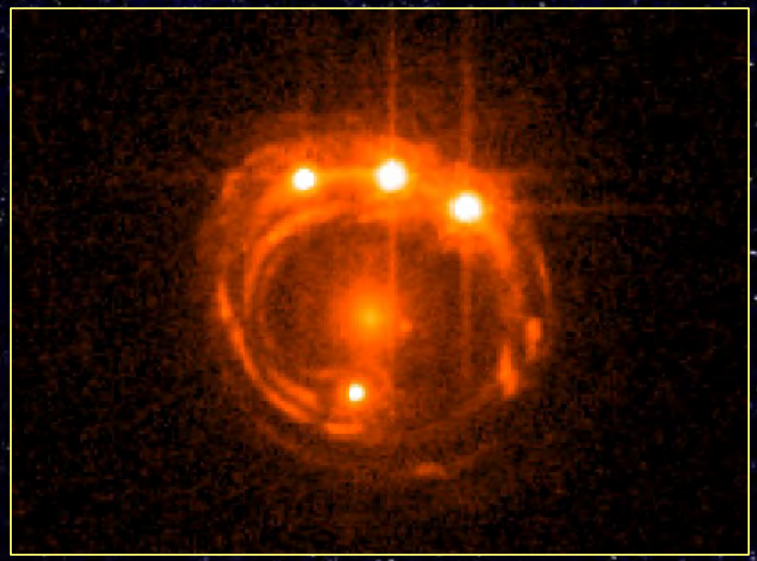


- Uno degli effetti più rilevanti della deflessione della luce è il fenomeno delle lenti gravitazionali. Si manifesta quando tra una sorgente luminosa, ad esempio un quasar, e la Terra si interpone una galassia. La galassia funge come da lente per i raggi che vengono emessi dal quasar e la deviazione fa sì che dalla Terra risultano visibili due o più immagini dell'oggetto

Lenti gravitazionali

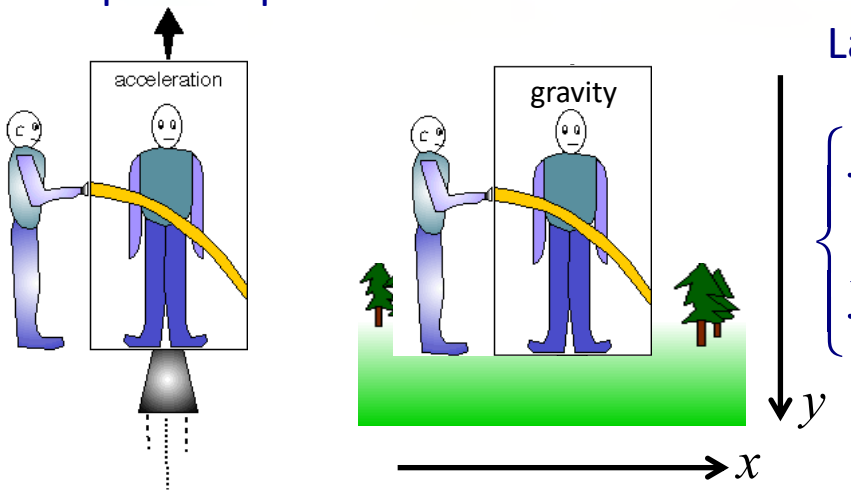






La deflessione della luce

- L'entitá della deflessione gravitazionale della luce può essere stimato utilizzando solo il principio di equivalenza



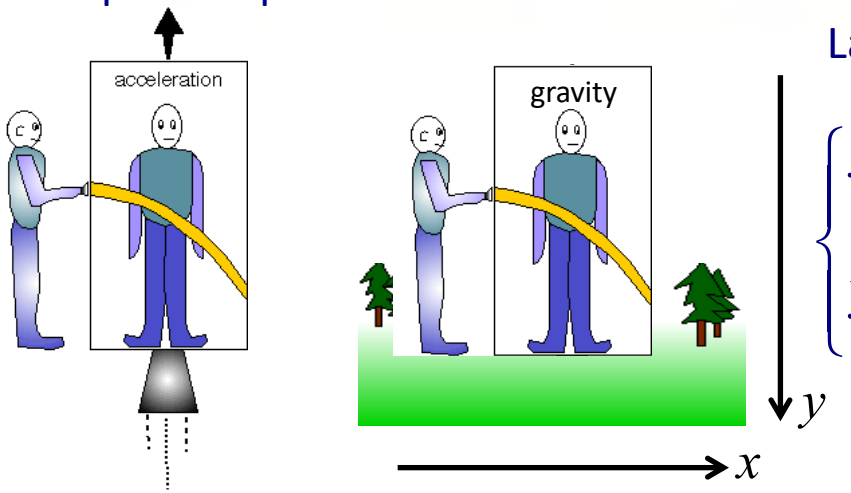
La traiettoria del fascio di luce è definita da:

$$\begin{cases} x = ct \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{g x^2}{2c^2} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g x}{c^2}}$$

È la tangente
dell' angolo di deviazione ϑ

La deflessione della luce

- L'entitá della deflessione gravitazionale della luce può essere stimato utilizzando solo il principio di equivalenza

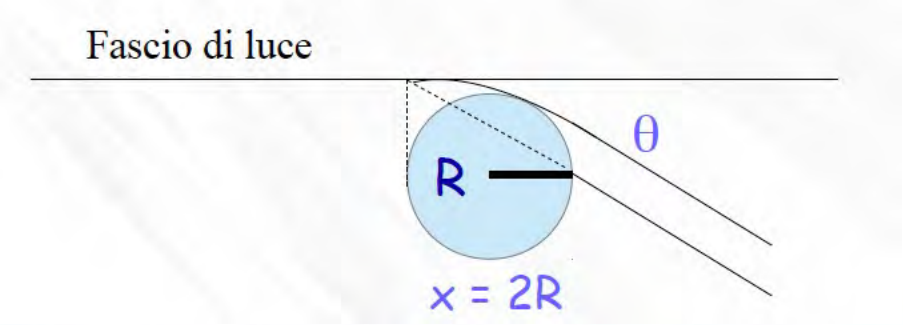


La traiettoria del fascio di luce è definita da:

$$\begin{cases} x = ct \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{g x^2}{2c^2} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g x}{c^2}}$$

È la tangente dell' angolo di deviazione ϑ

Assumiamo per semplicità che la deflessione avvenga solo su una distanza x=2R



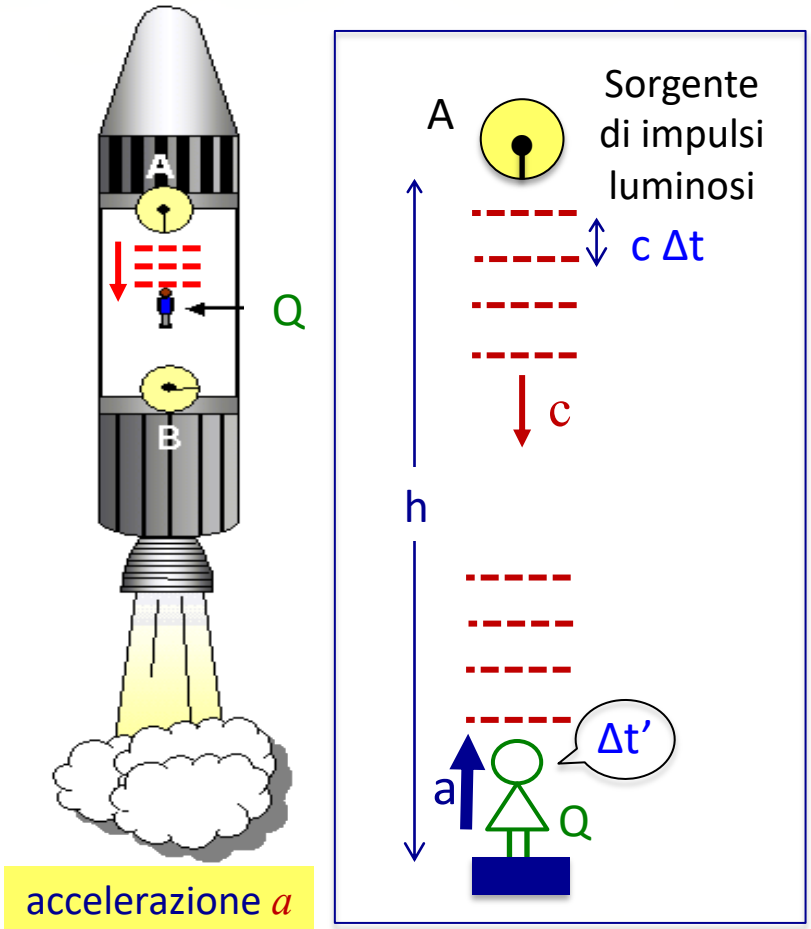
Allora: $$\vartheta \simeq \frac{dy}{dx} \simeq \frac{2Rg}{c^2} \simeq \frac{2GM}{Rc^2}$$

Per il Sole: $\vartheta \simeq 4 \times 10^{-6}\ \text{rad} \simeq 0.9''$

Solo un fattore 2 di differenza rispetto al calcolo esatto di RG: $\vartheta_{RG} \simeq 1.75''$

5. La dilatazione del tempo

Il tempo in un sistema accelerato



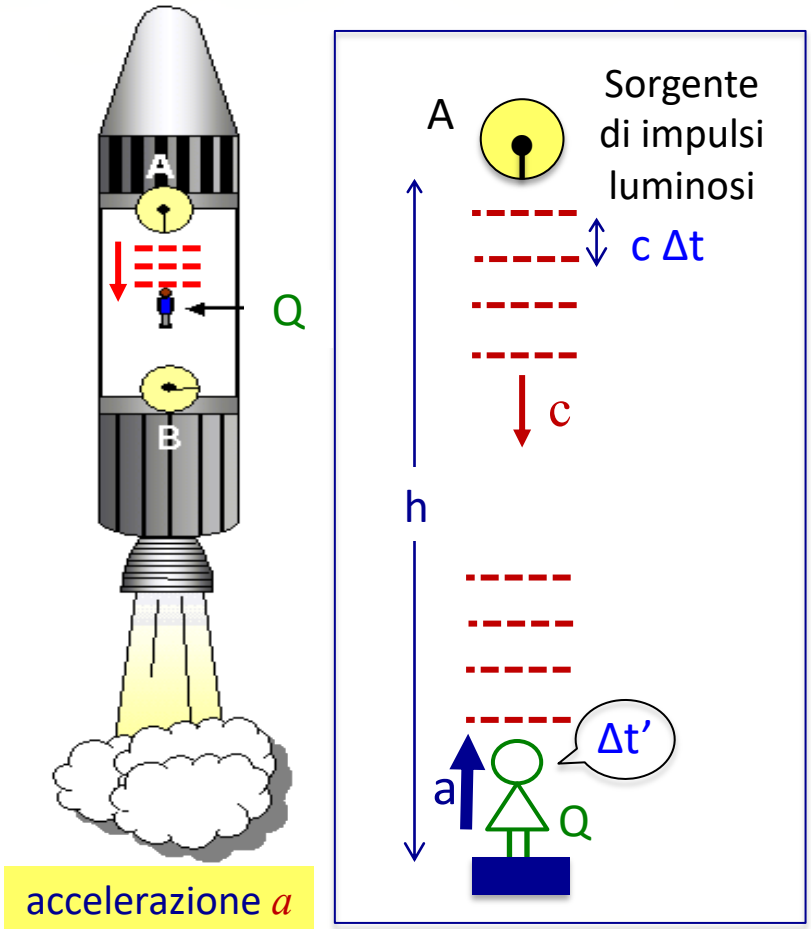
- L'orologio A emette impulsi luminosi ogni intervallo Δt
- Quando gli impulsi raggiungono l'osservatore Q, questo ha acquistato una velocità

$$v = a\,t = a\,h/c$$

- È come andare incontro alle onde del mare
- Q incontra i fronti d'onda separati da un intervallo Δt', con

$$c\Delta t = c\Delta t' + v\Delta t' = c\left(1 + v/c\right)\Delta t' = c\left(1 + ah/c^2\right)\Delta t'$$

Il tempo in un sistema accelerato



- L'intervallo di tempo Δt segnato dall' orologio e quello osservato Δt' sono legati da

$$\Delta t = \left(1 + \frac{ah}{c^2}\right)\Delta t'$$

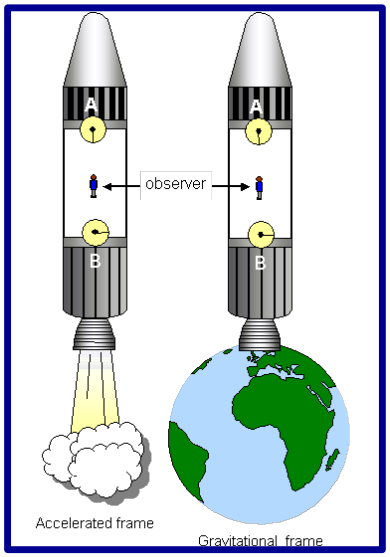
Per l'osservatore il tempo più in alto scorre più velocemente

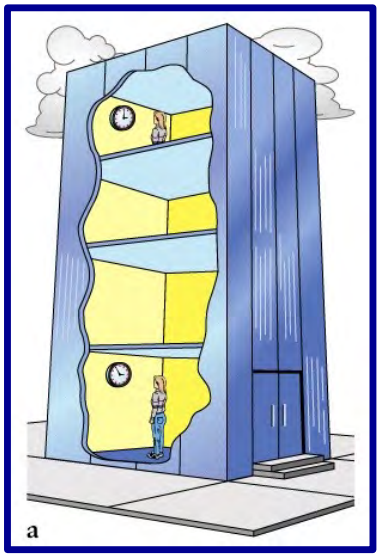
- È un effetto piccolo. Se $a=10\ m/s^2$, $h=10\ m$

$$\rightarrow \quad ah/c^2 \approx 10^{-15}$$

Un milionesimo di miliardesimo

La dilatazione gravitazionale del tempo





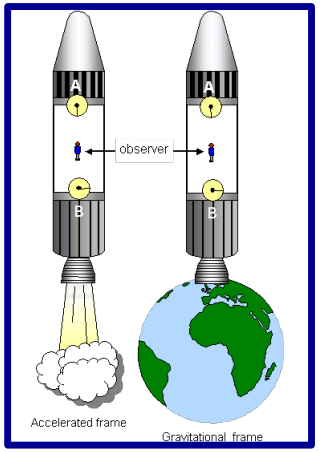
Il tempo scorre più lentamente "in basso", dove il campo gravitazionale è più intenso

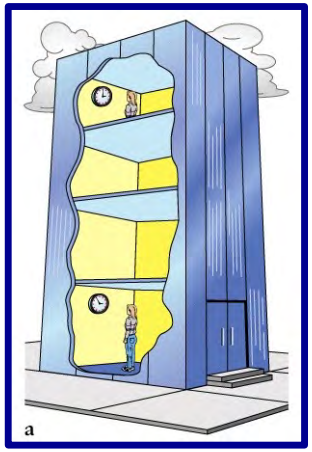
- Il fenomeno della dilatazione del tempo, che abbiamo discusso per un sistema accelerato, vale allora anche in un campo gravitazionale

È l'accelerazione di gravità, l'intensità del campo gravitazionale

$$\Delta t(h) = \left(1 + \frac{g\,h}{c^2}\right)\Delta t(0)$$

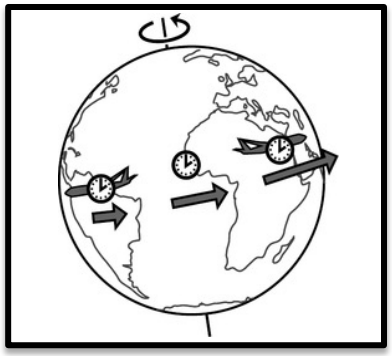
La dilatazione gravitazionale del tempo



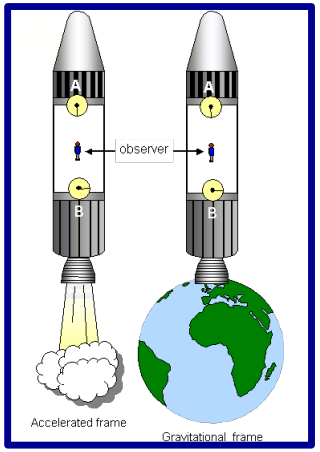


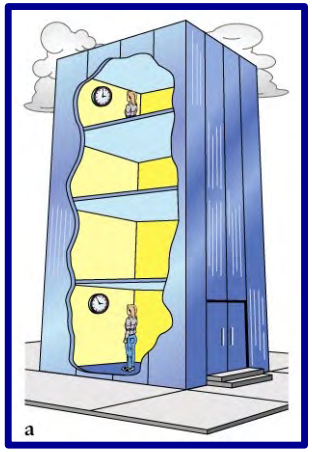
Il fenomeno è verificato in numerosi esperimenti

Negli orologi atomici in volo si deve tenere in conto dell' altezza oltre che della velocità



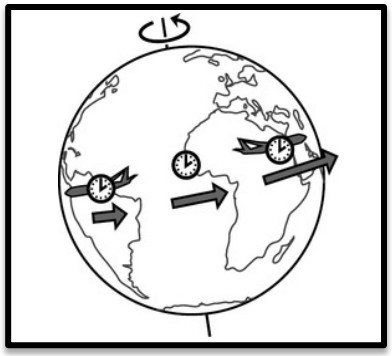
La dilatazione gravitazionale del tempo





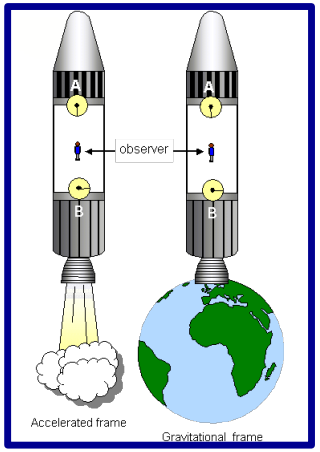
Il fenomeno è verificato in numerosi esperimenti

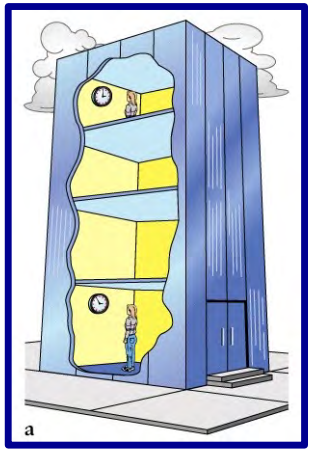
Negli orologi atomici in volo si deve tenere in conto dell' altezza oltre che della velocità



Anche nel GPS si deve tenere in conto sia della velocità relativa che dell'altezza dei satelliti

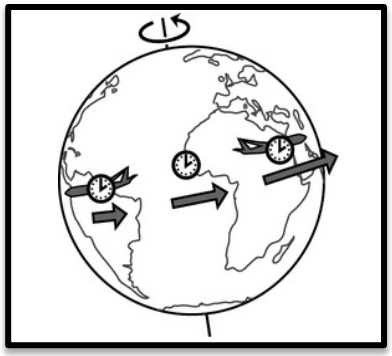
La dilatazione gravitazionale del tempo

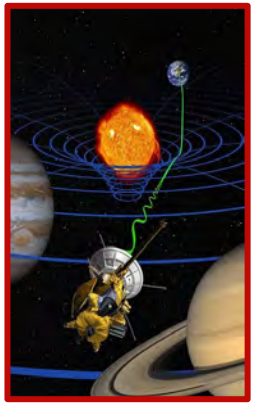




Il fenomeno è verificato in numerosi esperimenti

Negli orologi atomici in volo si deve tenere in conto dell' altezza oltre che della velocità



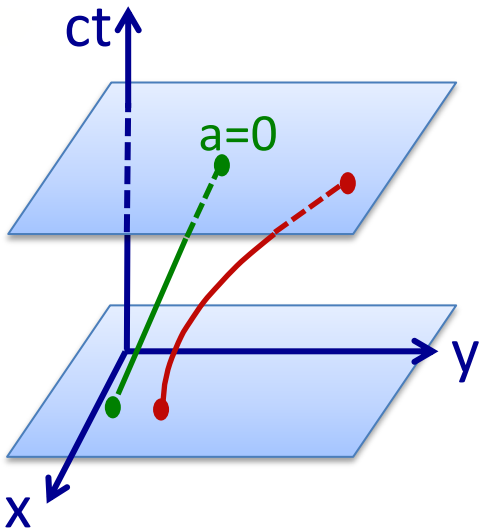


I segnali radio inviati dalle sonde spaziali verso la Terra arrivano in ritardo quando la loro traiettoria passa vicino al Sole

Anche nel GPS si deve tenere in conto sia della velocità relativa che dell'altezza dei satelliti

6. La curvatura dello spazio-tempo

La curvatura dello spazio-tempo

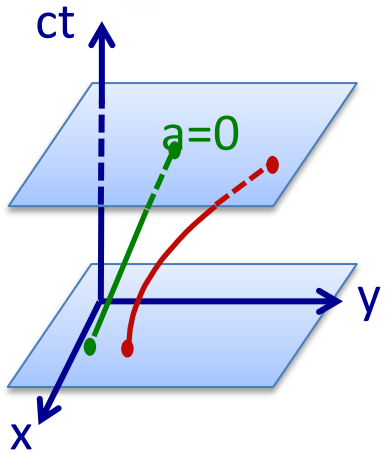


- Una particella in moto con velocità costante (a=0) percorre nello spazio-tempo una traiettoria rettilinea. Una particella in moto accelerato percorre una traiettoria curva.

Una particella in un campo gravitazionale, dunque, percorre nello spazio-tempo una traiettoria curva.

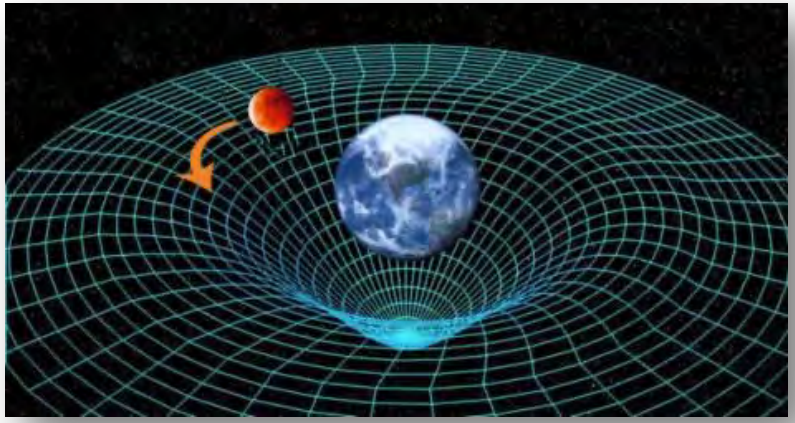
- Il principio di equivalenza debole afferma che in un campo gravitazionale i corpi si muovono tutti con la stessa accelerazione, ossia seguono tutti le stesse traiettorie di caduta libera nello spazio-tempo.

La curvatura dello spazio-tempo

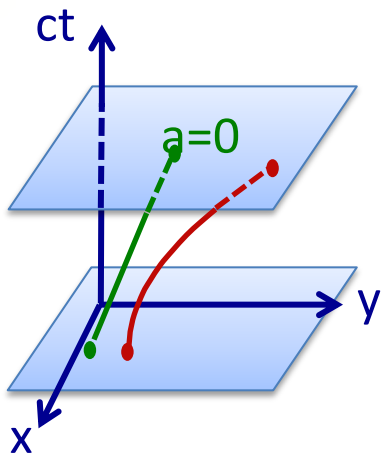


Einstein giunge allora alla conclusione che in un campo gravitazionale i corpi seguono tutti le stesse traiettorie perché è lo spazio-tempo stesso che si curva per effetto della materia.

- La gravitazione è interpretata come un effetto geometrico: le masse curvano lo spazio-tempo e un corpo in movimento segue una traiettoria «rettilinea» nello spazio-tempo curvo



La curvatura dello spazio-tempo

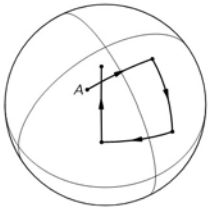


Einstein giunge allora alla conclusione che in un campo gravitazionale i corpi seguono tutti le stesse traiettorie perché è lo spazio-tempo stesso che si curva per effetto della materia

Il principio di equivalenza debole, ossia l'equivalenza di massa inerziale e massa gravitazionale, trova una sua spiegazione

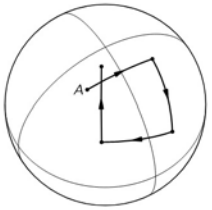
La curvatura dello spazio-tempo

- La curvatura dello spazio-tempo può essere verificata con la geometria. Ad esempio, sappiamo, che provando a disegnare un quadrato in uno spazio curvo questo non si “chiude”.



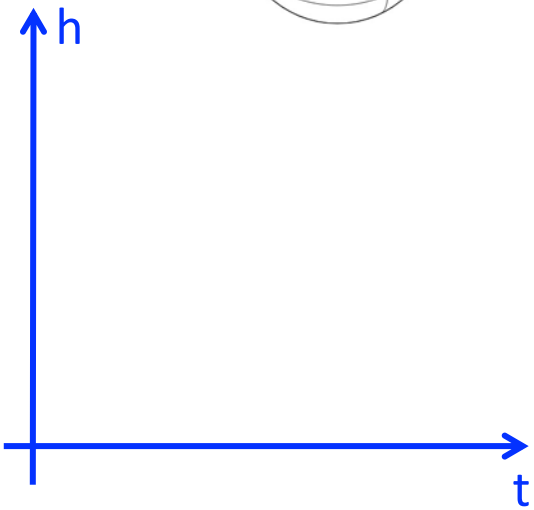
La curvatura dello spazio-tempo

- La curvatura dello spazio-tempo può essere verificata con la geometria. Ad esempio, sappiamo, che provando a disegnare un quadrato in uno spazio curvo questo non si "chiude".



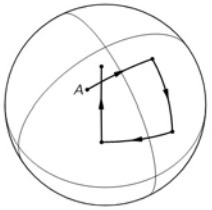
- Costruiamo un quadrato nello spazio-tempo:

– Assumiamo di trovarci in un campo gravitazionale e consideriamo il piano nello spazio-tempo definito dall' altezza h e dal tempo t



La curvatura dello spazio-tempo

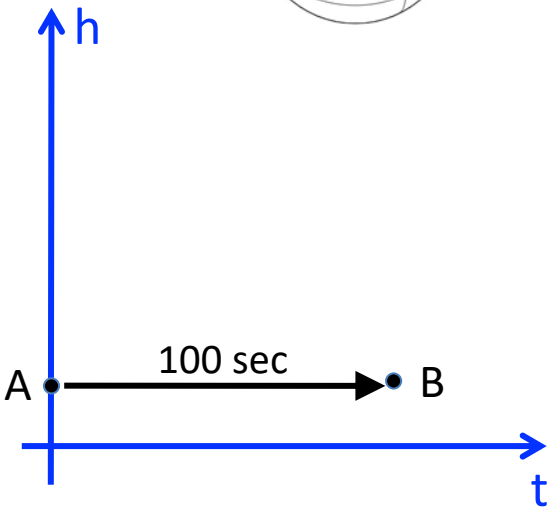
- La curvatura dello spazio-tempo può essere verificata con la geometria. Ad esempio, sappiamo, che provando a disegnare un quadrato in uno spazio curvo questo non si "chiude".



- Costruiamo un quadrato nello spazio-tempo:

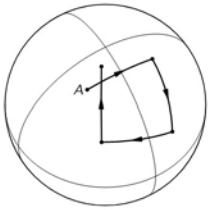
– Assumiamo di trovarci in un campo gravitazionale e consideriamo il piano nello spazio-tempo definito dall' altezza h e dal tempo t

– Per costruire la base del quadrato, prendiamo un oggetto in quiete all'altezza h_1 e seguiamo la sua linea di universo per 100 secondi. Nel piano h-t otteniamo la linea orizzontale AB

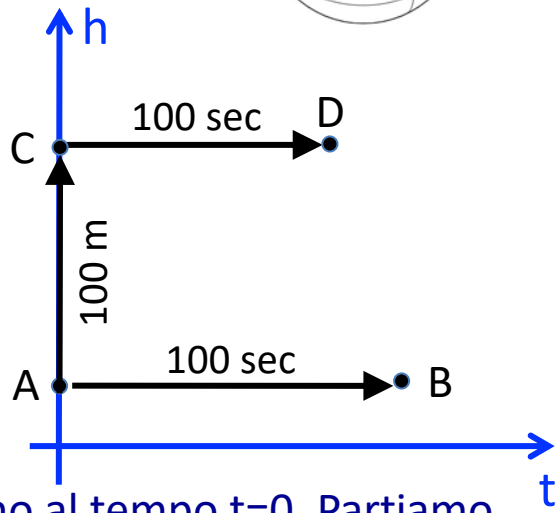


La curvatura dello spazio-tempo

- La curvatura dello spazio-tempo può essere verificata con la geometria. Ad esempio, sappiamo, che provando a disegnare un quadrato in uno spazio curvo questo non si "chiude".



- Costruiamo un quadrato nello spazio-tempo:



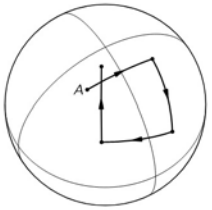
– Assumiamo di trovarci in un campo gravitazionale e consideriamo il piano nello spazio-tempo definito dall' altezza h e dal tempo t

– Per costruire la base del quadrato, prendiamo un oggetto in quiete all'altezza h_1 e seguiamo la sua linea di universo per 100 secondi. Nel piano h-t otteniamo la linea orizzontale AB

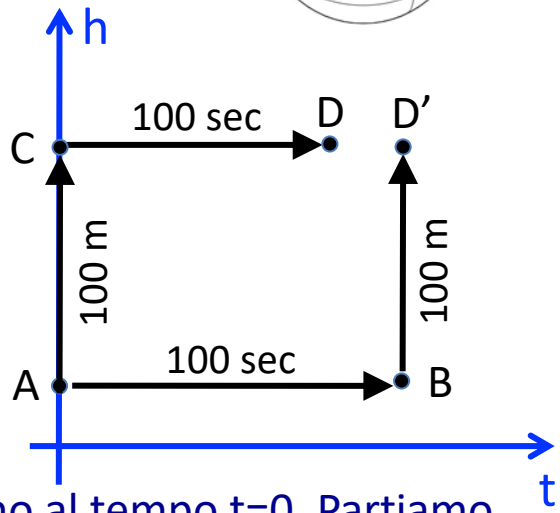
– Prendiamo ora un altro oggetto che si trova 100 m sopra al primo al tempo t=0. Partiamo dal punto C e seguiamo la sua linea di universo sempre per 100 secondi, come misurati da un orologio in C. L'oggetto va da C a D. Ma poiché il tempo scorre a differenti velocità alle due altezze, i punti B e D non sono simultanei

La curvatura dello spazio-tempo

- La curvatura dello spazio-tempo può essere verificata con la geometria. Ad esempio, sappiamo, che provando a disegnare un quadrato in uno spazio curvo questo non si "chiude".



- Costruiamo un quadrato nello spazio-tempo:



– Assumiamo di trovarci in un campo gravitazionale e consideriamo il piano nello spazio-tempo definito dall' altezza h e dal tempo t

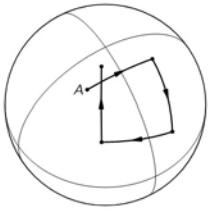
– Per costruire la base del quadrato, prendiamo un oggetto in quiete all'altezza h_1 e seguiamo la sua linea di universo per 100 secondi. Nel piano h-t otteniamo la linea orizzontale AB

– Prendiamo ora un altro oggetto che si trova 100 m sopra al primo al tempo t=0. Partiamo dal punto C e seguiamo la sua linea di universo sempre per 100 secondi, come misurati da un orologio in C. L'oggetto va da C a D. Ma poiché il tempo scorre a differenti velocità alle due altezze, i punti B e D non sono simultanei

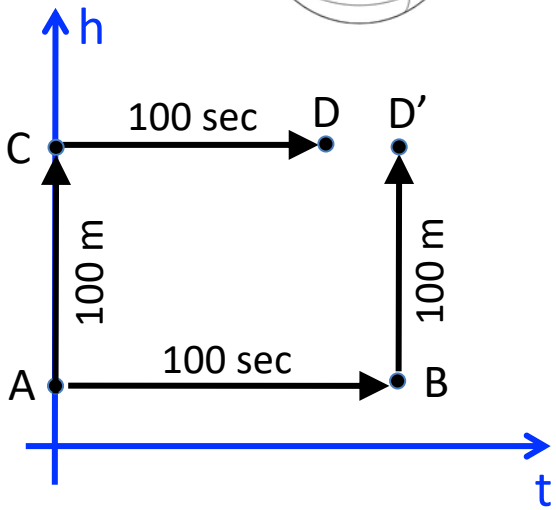
– Se completiamo il quadrato disegnando una linea al punto D' che si trova 100 m sopra D allo stesso tempo, il quadrato non si chiude.

La curvatura dello spazio-tempo

- La curvatura dello spazio-tempo può essere verificata con la geometria. Ad esempio, sappiamo, che provando a disegnare un quadrato in uno spazio curvo questo non si "chiude".



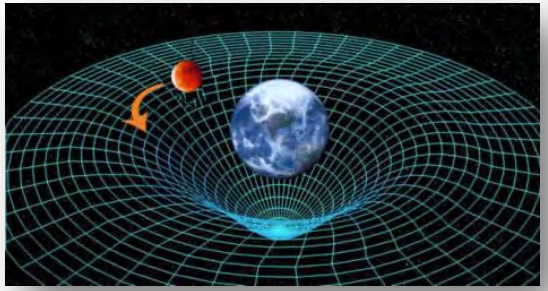
- Costruiamo un quadrato nello spazio-tempo:



➡ per effetto del campo gravitazionale

lo spazio-tempo è curvo

La curvatura non è dunque una curvatura solo dello spazio ma anche del tempo, ossia dello spazio-tempo



L'equazione di Einstein del campo

- Abbiamo già discusso come la geometria dello spazio-tempo cambia quando è presente della materia. La curvatura media, espressa in funzione dell'eccesso del raggio, è proporzionale alla massa interna a una sfera:

$$r_{\mathrm{ecc}} = r_{\mathrm{mis}} - \left(\frac{\mathrm{A}}{4\pi}\right)^{1/2} = \frac{G}{3c^2} M$$

- A questa legge si deve aggiungere che è vera in qualsiasi sistema in movimento (si noti che il contenuto di massa/energia varia per un sistema in moto). La formulazione della legge della gravitazione che ha validità generale e definisce tutte le componenti della curvatura è la

Equazione di Einstein del campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

L'equazione di Einstein del campo

- Abbiamo già discusso come la geometria dello spazio-tempo cambia quando è presente della materia. La curvatura media, espressa in funzione dell'eccesso del raggio, è proporzionale alla massa interna a una sfera:

$$r_{\text{ecc}} = r_{\text{mis}} - \left(\frac{\text{A}}{4\pi}\right)^{1/2} = \frac{G}{3c^2} M$$

- A questa legge si deve aggiungere che è vera in qualsiasi sistema in movimento (si noti che il contenuto di massa/energia varia per un sistema in moto). La formulazione della legge della gravitazione che ha validità generale e definisce tutte le componenti della curvatura è la

Equazione di Einstein del campo

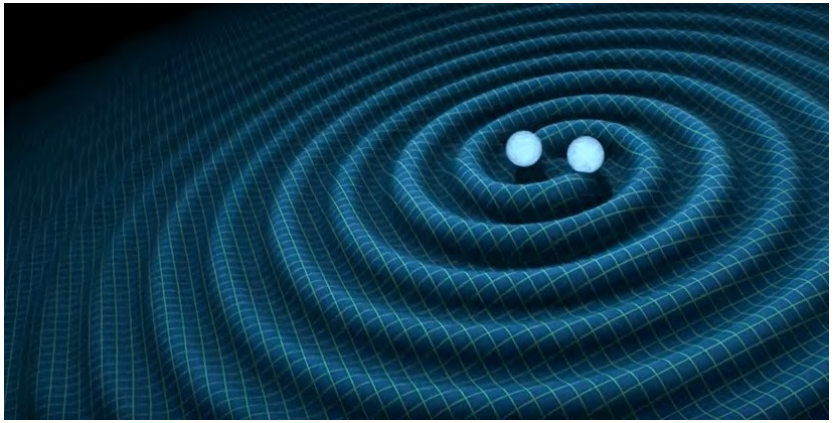
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- In assenza di materia e energia, l'equazione ci dice come si propaga la curvatura dello spazio-tempo, ossia il campo gravitazionale. Le soluzioni sono le onde gravitazionali.

7. Le onde gravitazionali

Le onde gravitazionali

- Previste da Einstein nel 1916
- Prima osservazione LIGO/VIRGO 14 settembre 2015 $\Longrightarrow$ GW150914



- In GW150914: fusione di 2 buchi neri. In GW170817: fusione di 2 stelle di neutroni
- In GW150914: 36 + 29 masse solari $\Longrightarrow$ 62 masse solari.

  L'energia mancante pari a 3 masse solari è stata emessa in forma di onde gravitazionali:

$$E = 3\ M_{Sole}\ c^2\ !!$$

Ma il flusso di energia ricevuto sulla Terra decresce come $1/r^2$ ($r \sim 10^9$ anni luce)

Le onde gravitazionali

- Sono state rivelate mediante interferometri

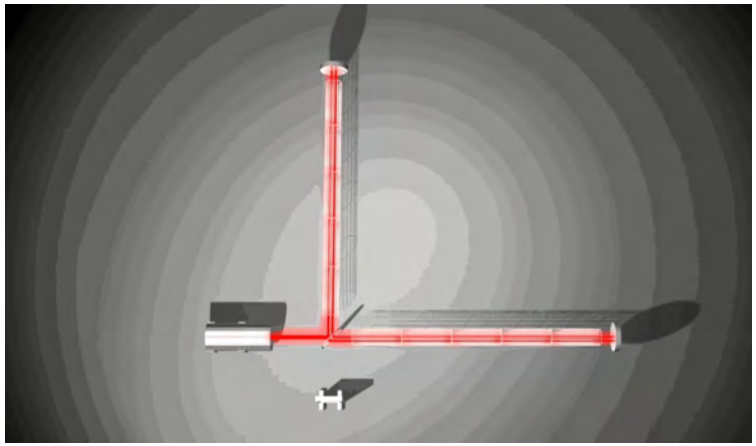
LIGO Hanford

LIGO Livingston

(L= 4 Km)

VIRGO

(L=3 Km)



$$\Delta L = hL \simeq 10^{-21} L = 10^{-16} \left(\frac{L}{Km} \right) cm$$

h ampiezza dell'onda

N.B. Le dimensioni di un atomo sono 10^{-8} cm

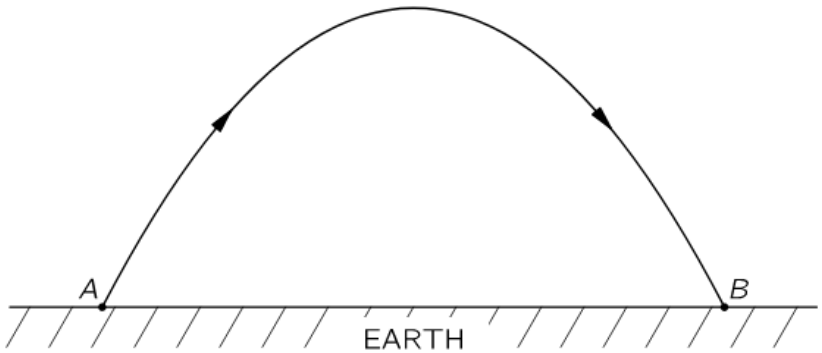
Le dimensioni di un protone sono 10^{-13} cm

8. Il moto nello spazio-tempo curvo

Il moto nello spazio-tempo curvo

Problema

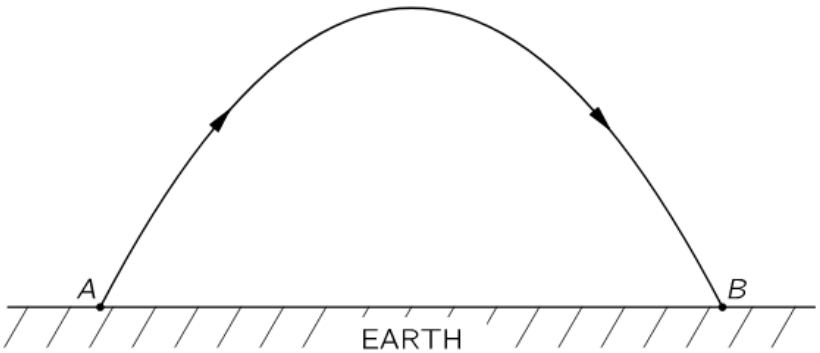
Come si fa ad andare da A a B sulla superficie terrestre, in un tempo dato tB-tA segnato da un orologio in quiete, in modo che il tempo segnato dall' orologio in movimento sia massimo?



Il moto nello spazio-tempo curvo

Problema

Come si fa ad andare da A a B sulla superficie terrestre, in un tempo dato tB-tA segnato da un orologio in quiete, in modo che il tempo segnato dall' orologio in movimento sia massimo?

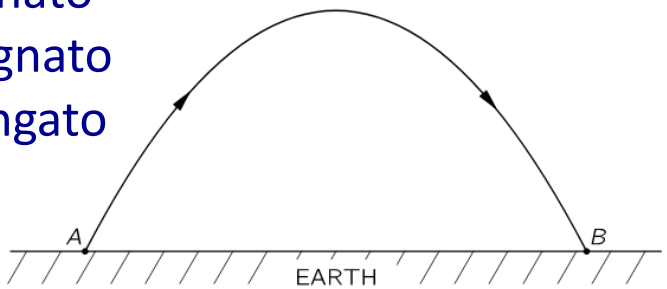


Più saliamo in alto, più il nostro orologio andrà velocemente e segnerà un tempo più lungo. Poichè tuttavia il tempo tB-tA è fissato, più saliamo in alto più dovremo muoverci velocemente e il nostro orologio rallenterà rispetto all'orologio fisso.

Dobbiamo dunque tenere in conto dei due effetti contrapposti

Soluzione

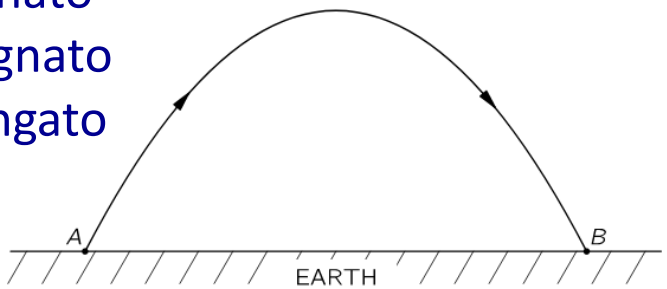
- In un intervallo di tempo *dt* segnato dall'orologio fisso, il tempo *dt'* segnato dall'orologio in movimento è allungato per effetto della gravità e accorciato per effetto della velocità. Il risultato combinato dei due effetti è:



$$dt' = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{gh}{c^2}\right)dt \simeq \left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)\left(1+\frac{gh}{c^2}\right)dt \simeq \left(1-\frac{v^2}{2c^2}+\frac{gh}{c^2}\right)dt$$

Soluzione

● In un intervallo di tempo *dt* segnato dall'orologio fisso, il tempo *dt'* segnato dall'orologio in movimento è allungato per effetto della gravità e accorciato per effetto della velocità. Il risultato combinato dei due effetti è:



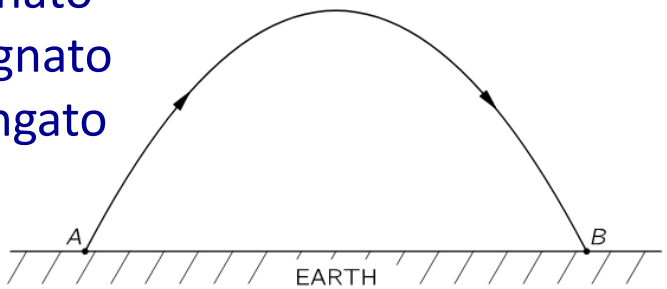
$$dt' = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{gh}{c^2}\right)dt \simeq \left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)\left(1+\frac{gh}{c^2}\right)dt \simeq \left(1-\frac{v^2}{2c^2}+\frac{gh}{c^2}\right)dt$$

● Dobbiamo allora richiedere che sia massimo il tempo in eccesso segnato dall'orologio in moto, ossia la quantità

$$\int d(t'-t) \simeq -\int\left(\frac{v^2}{2c^2}-\frac{gh}{c^2}\right)dt = -\frac{1}{mc^2}\int\left(\frac{mv^2}{2}-mgh\right)dt = -\frac{1}{mc^2}\int L\,dt = -\frac{1}{mc^2}S$$

Soluzione

● In un intervallo di tempo *dt* segnato dall'orologio fisso, il tempo *dt'* segnato dall'orologio in movimento è allungato per effetto della gravità e accorciato per effetto della velocità. Il risultato combinato dei due effetti è:



$$dt' = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{gh}{c^2}\right)dt \simeq \left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)\left(1+\frac{gh}{c^2}\right)dt \simeq \left(1-\frac{v^2}{2c^2}+\frac{gh}{c^2}\right)dt$$

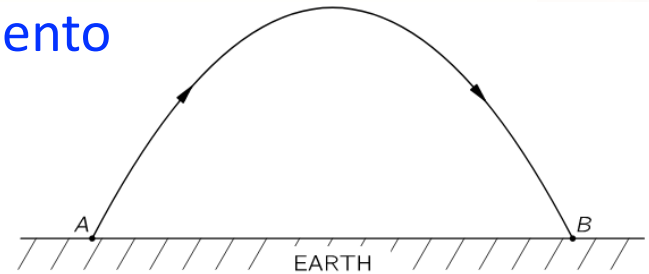
● Dobbiamo allora richiedere che sia massimo il tempo in eccesso segnato dall'orologio in moto, ossia la quantità

$$\int d(t'-t) \simeq -\int\left(\frac{v^2}{2c^2}-\frac{gh}{c^2}\right)dt = -\frac{1}{mc^2}\int\left(\frac{mv^2}{2}-mgh\right)dt = -\frac{1}{mc^2}\int L\,dt = -\frac{1}{mc^2}S$$

La traiettoria che massimizza il tempo proprio è quella che minimizza l'azione, ossia la soluzione dell'equazione del moto nel campo gravitazionale

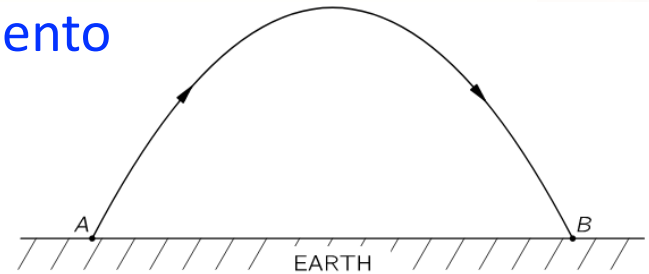
Soluzione

La curva che fa segnare all'orologio in movimento il tempo più lungo è una parabola, la stessa traiettoria percorsa da un oggetto in moto balistico libero in un campo gravitazionale



Soluzione

La curva che fa segnare all'orologio in movimento il tempo più lungo è una parabola, la stessa traiettoria percorsa da un oggetto in moto balistico libero in un campo gravitazionale

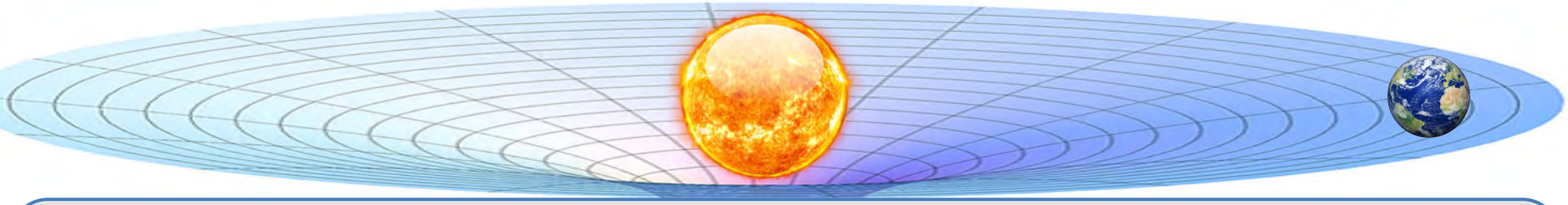


Questo risultato è generale:

LEGGE DEL MOTO IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE:

Un corpo si sposta da un punto ad un altro in modo che il tempo proprio tra le due condizioni terminali sia massimo

La relatività generale



NEWTON:

1) Ogni corpo attrae un altro con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza

2) Un corpo risponde ad una forza con un'accelerazione ad essa proporzionale

EINSTEIN:

1) Equazione di campo di Einstein: vicino ad una massa lo spazio-tempo si incurva e la curvatura media, espressa in funzione del raggio in eccesso, è proporzionale alla massa interna ad una sfera.
2) Equazione del moto di Einstein: i corpi si muovono lungo "linee rette" nello spazio-tempo curvo, in modo cioè che il loro tempo proprio tra le due condizioni terminali sia massimo

9. I viaggi nel tempo

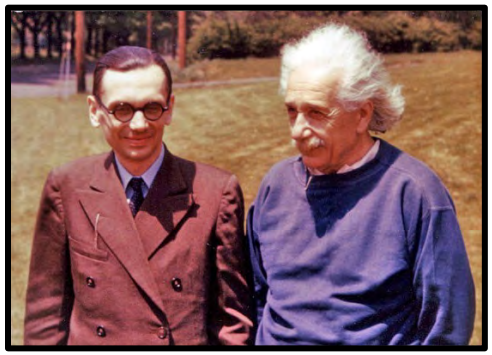
I viaggi nel tempo (2)

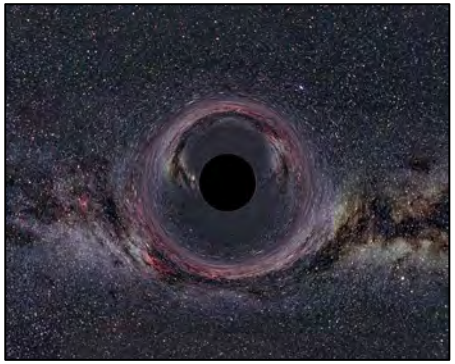
- Se la teoria della relatività pone un limite teorico alle velocità, che non possono superare quella della luce nel vuoto, non vi sono limiti all'intensità di un campo gravitazionale e, quindi, alla deformazione dello spazio-tempo

⇨ Sono possibili **VIAGGI NEL PASSATO**

- Nel 1949 Kurt Godel trovò una soluzione esatta delle equazioni di Einstein per un universo in rotazione.

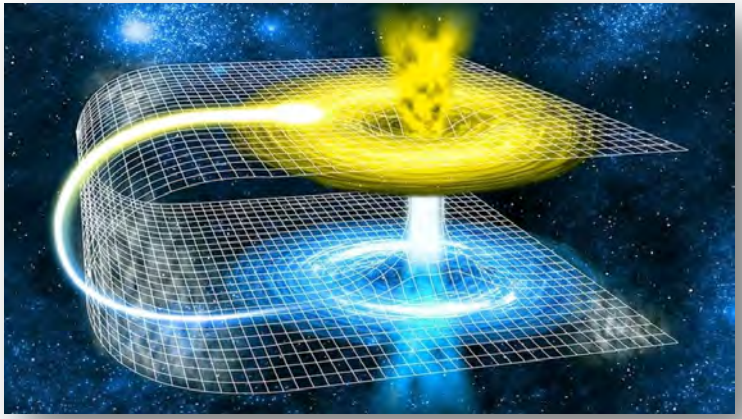
La soluzione di Godel prevede l'esistenza di curve temporali chiuse





I viaggi nel tempo (2)

- Oggi sono note altre soluzioni della relatività generale, per esempio wormhole, che forse potrebbero consentire viaggi nel tempo.
Ma non sappiamo se queste soluzioni sono "fisiche".

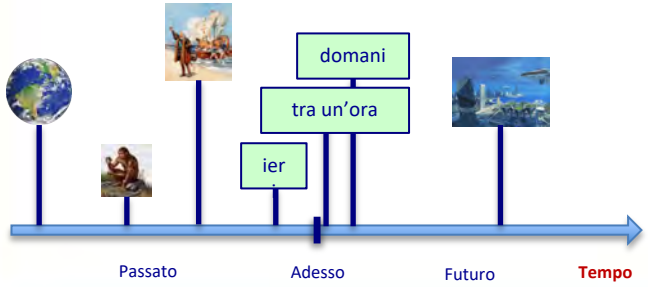


- I viaggi nel tempo passato danno origine a ben noti paradossi: il "paradosso del nonno", il "paradosso della conoscenza", …

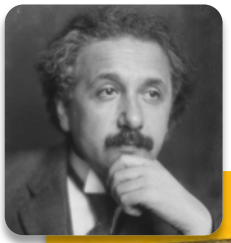
Sono state proposte alcune soluzioni: la "censura cosmica", i "multimondi", ma non sappiamo veramente la risposta a questa domanda…

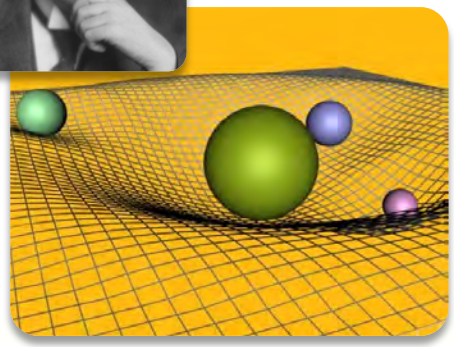
Viaggio nel Tempo della Fisica

CAPITOLO 1:
Il tempo assoluto

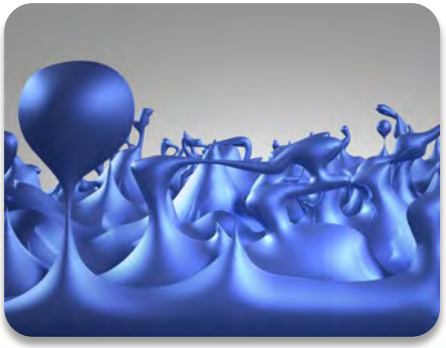


CAPITOLO 2:
Il tempo elastico





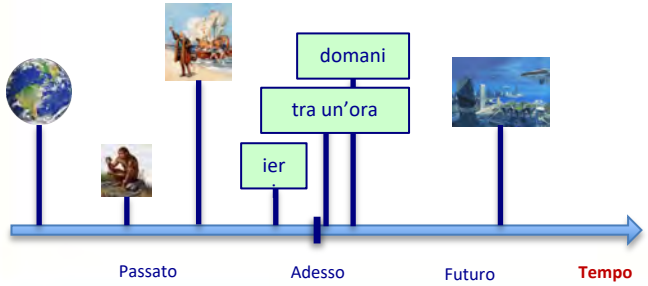
CAPITOLO 3:
Lo spazio-tempo quantistico



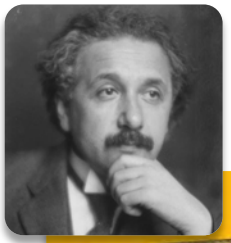
Abbiamo raccontato 2 capitoli nel viaggio nel Tempo della Fisica. C'è poi un capitolo 3, che tratteremo alla fine del corso. Cosa contiene il capitolo 3 non lo sappiamo ancora bene, ma proprio per questo è anche il più interessante.

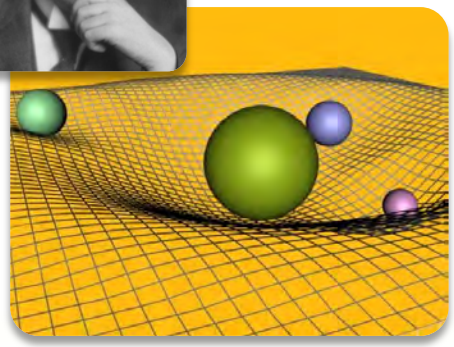
Viaggio nel Tempo della Fisica

CAPITOLO 1:
Il tempo assoluto

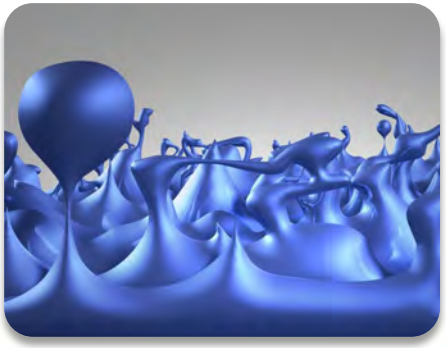


CAPITOLO 2:
Il tempo elastico





CAPITOLO 3:
Lo spazio-tempo quantistico



Questa storia, con i suoi capitoli, è rappresentativa di come procede la scienza. Piccoli effetti ci portano talvolta a cambiare profondamente la nostra visione del mondo