Appunti di Teoria dei Gruppi

V. Lubicz

TEORIA DEI GRUPPI

V. Lubicz, Appunti di lezioni

- **DEFINIZIONI E PROPRIETÀ DEI GRUPPI**
  - DEFINIZIONE DI GRUPPO
  - GRUPPO FINITO O INFINITO
  - GRUPPO ABELIANO O NON ABELIANO
  - GRUPPO CONTINUO E GRUPPO DI LIE
- **RAPPRESENTAZIONI DI UN GRUPPO**
  - DEFINIZIONE DI RAPPRESENTAZIONE
  - RAPPRESENTAZIONI RIDUCIBILI E IRRIDUCIBILI
- **GENERATORI DEI GRUPPI DI LIE**
  - DEFINIZIONE DI GENERATORE E ALGEBRA DEL GRUPPO
  - RAPPRESENTAZIONE CONIUGATA
  - RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA
- **PRODOTTO DI RAPPRESENTAZIONI E DECOMPOSIZIONE IN RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI**
  - PRODOTTO DI RAPPRESENTAZIONI
  - IL METODO TENSORIALE PER SU(n)
  - LE RAPPRESENTAZIONI DI SU(2)

- LE RAPPRESENTAZIONI DI SU(3)
- OTTETTI MESONICI E BARIONICI
- IL DECUPLETTO BARIONICO

• <u>APPENDICE</u>: <u>DIMENSIONE DELLE RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI SU(3)</u>

TEORIA DEI GRUPPI

- Il concetto di simmetria gioca un ruolo fondamentale in fisica e nella fisica delle particelle in particolare. Esempi: simmetrie e leggi di conservazione, simmetria di sapore nel modello a quark, simmetrie di gauge non abeliane nel Modello Standard, ecc...
- Un insieme di trasformazioni di simmetria su un sistema fisico ha la proprietà matematica di essere associato con un gruppo.

ⓐ DEFINIZIONI E PROPRIETÀ DEI GRUPPI:

* DEFINIZIONE DI GRUPPO

Un gruppo G è un insieme di elementi $(a, b, c, \dots)$ per i quali è definita una legge di composizione (moltiplicazione) che possiede le seguenti proprietà:

1) Chiusura: se $a \in G$, $b \in G$ allora $a \cdot b \in G$
2) Associativa: $(ab)c = a(bc)$
   tuttavia gli elementi non necessariamente commutano
3) Identità: esiste un elemento identità e (o 1) tale che $ae = ea = a$, $\forall a \in G$
4) Inverso: $\forall a \in G$ esiste $a^{-1} \in G$ tale che
   $$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

* <u>GRUPPO FINITO O INFINITO</u>: un gruppo si dice finito (infinito) se ha un numero finito (infinito) di elementi. Il numero di elementi di un gruppo finito è chiamato <u>ordine</u> del gruppo

- <u>Esempi</u>:
  - Il gruppo più semplice è il gruppo che consiste di un solo elemento, <u>$G = (e)$</u>
  - Il successivo gruppo più semplice consiste di 2 elementi:

    <u>$G = (e, a)$</u> con $a \cdot a = e$ $\qquad$ <u>Z_2</u>, gruppo ciclico di ordine 2

    In generale si definisce $Z_n = (a, a^2, \ldots, a^n = e)$

* <u>GRUPPO ABELIANO O NON ABELIANO</u>: se tutti gli elementi di un gruppo commutano, il gruppo è detto commutativo o Abeliano.

- Un <u>esempio</u> di gruppo infinito Abeliano è l'insieme di tutti gli interi rispetto all'addizione: $n, m \in G \Rightarrow n + m \in G$,

$$e = 0, \quad n^{-1} = -n$$

- Il più piccolo gruppo non Abeliano è il gruppo di permutazioni di 3 oggetti: <u>S_3</u>

S_3: gruppo simmetrico di ordine 3. Il gruppo contiene 6 elementi:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il prodotto $b \cdot a$ (prima la permutazione a e poi la permutazione b):

$$b \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f$$

Se consideriamo il prodotto nell'ordine inverso:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = d$$

Dunque: $ba = f$, $ab = d \Rightarrow ba \neq ab$.

In generale si può definire il gruppo $\underline{\underline{S_n}}$, gruppo simmetrico di ordine n.

* <u>GRUPPO CONTINUO E GRUPPO DI LIE</u>.

- Se un gruppo ha un <u>numero finito di elementi</u>, possiamo indicare un elemento del gruppo con $\underline{a_\theta}$ dove θ assume un numero finito di valori. Possiamo generalizzare questa idea ad un gruppo infinito numerabile, con un numero infinito di valori discreti di θ, o a <u>un gruppo con un continuo di elementi</u> in cui il parametro

θ può variare con continuità. In quest'ultimo caso un elemento del gruppo è indicato con $\underline{a(\theta)}$. Possiamo poi generalizzare ulteriormente al caso in cui θ sta per più di un parametro continuo: $\underline{a(\vec{\theta}) = a(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}$.

- Consideriamo il prodotto di due elementi del gruppo

$$\boxed{a(\theta) \cdot a(\varphi) = a(\xi)} \quad \underline{\text{dove}} \quad \boxed{\xi = \xi(\theta, \varphi)}$$

Se $\xi(\theta,\varphi)$ è una funzione continua di θ e φ il gruppo è detto <u>continuo</u>. Se $\xi(\theta,\varphi)$, oltre ad essere continua, è una funzione analitica (infinitamente differenziabile) di θ e φ, allora il gruppo è detto <u>gruppo di Lie</u>.

• <u>Esempi di gruppi di Lie:</u>

- Gruppo delle <u>traslazioni in 1 dimensione</u>

$$a(\theta): \quad x' = x + \theta$$

Abeliano

$$a(\varphi)a(\theta): \quad x'' = x' + \varphi = x + \theta + \varphi \equiv a(\xi)$$

$$\Rightarrow \xi(\theta,\varphi) = \theta + \varphi$$

- Gruppo delle trasformazioni

$$a(\theta_1, \theta_2): \quad x' = \theta_1 x + \theta_2 \qquad \text{(2 parametri)}$$

$a(\vec{\varphi})a(\vec{\theta})$: $\quad x'' = \varphi_1 x' + \varphi_2 = \varphi_1(\theta_1 x + \theta_2) + \varphi_2 \equiv a(\vec{\xi})$

$$\Rightarrow \quad \xi_1(\vec{\theta},\vec{\varphi}) = \varphi_1\theta_1, \quad \xi_2(\vec{\theta},\vec{\varphi}) = \varphi_1\theta_2 + \varphi_2$$

Nota: il gruppo non è Abliano: $\xi_2(\vec{\varphi},\vec{\theta}) \neq \xi_2(\vec{\theta},\vec{\varphi})$

- Gruppo delle trasformazioni lineari generali $GL(n)$.

$$x' = Vx, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

È caratterizzato da $2n^2$ parametri (reali).
Se v_{ij} sono reali il gruppo si indica con $GL(nR)$ ed è caratterizzato da n^2 parametri.

- Un sottogruppo importante di $GL(nR)$ è il gruppo ortogonale in n dimensioni, $O(n)$, composto da quegli elementi di $GL(nR)$ che lasciano invariante la norma

$$x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

La condizione $x'^2 = x^* V^T V x^* = x^2$ implica $V^T V = 1$, $\Rightarrow V_{ji}V_{jk} = \delta_{ik}$, ossia $\frac{1}{2}n(n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ condizioni reali. Il gruppo è caratterizzato dunque da $n(n-1)/2$ parametri.

Il gruppo delle rotazioni $SO(n)$ o $R(n)$ è costituito dalle matrici ortogonali con determinante uguale ad 1. Ha lo stesso numero di parametri di $O(n)$. Tuttavia $R(n)$ in un numero di dimensioni dispari non include le riflessioni $x' = -x$. (In generale, per una matrice ortogonale $\det O = \pm 1$).

- Un sottogruppo importante di $GL(n)$ è il gruppo delle <u>trasformazioni unitarie</u> $U(n)$

La condizione $U^+ U = 1 \Rightarrow U^*_{ji} U_{jk} = \delta_{ik}$ corrisponde a $2\frac{n\cdot(n-1)}{2} + n = n^2$ condizioni reali. Il gruppo è caratterizzato dunque da <u>n^2 parametri reali</u>.

- Il gruppo <u>speciale unitario</u> $SU(n)$ è costituito dalle matrici unitarie con <u>$\det U = 1$</u>. (In generale $|\det U| = 1$ per una matrice unitaria). $SU(n)$ è caratterizzato da <u>n^2-1 parametri</u> reali.

I gruppi $U(n)$ ed $SU(n)$ giocano un ruolo particolarmente importante in fisica perché in meccanica quantistica le trasformazioni fisiche sugli stati sono rappresentate da matrici unitarie:

$|\psi\rangle \to U|\psi\rangle$, $\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^+U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$

$\Rightarrow U^+U = 1$

Ogni matrice unitaria può essere scritta come

$$U = e^{i\varphi}\, \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}^{+}\mathcal{U} = 1, \quad \det \mathcal{U} = 1$$

⊙ $\boxed{\text{RAPPRESENTAZIONI DI UN GRUPPO}}$

* DEFINIZIONE DI RAPPRESENTAZIONE

- Una rappresentazione è una specifica realizzazione della moltiplicazione degli elementi di un gruppo in termini di matrici. È dunque un "mapping" degli elementi astratti del gruppo in un insieme di matrici:

$$\boxed{a \rightarrow D(a), \text{ tale che se } a \cdot b = c \text{ allora } D(a)D(b) = D(c)}$$

(Così, a rigore, le precedenti definizioni dei gruppi lineari sono date in termini delle loro rappresentazioni).

• Esempi:

- Rappresentazioni del gruppo Z_2:

$$\left.\begin{array}{l} + \; D(e) = 1, \quad D(a) = -1 \\ + \; D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 = e \\ D(a)^2 = D(e) \end{array}$$

- Rappresentazione del gruppo S_3

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ecc...}$$

In precedenza abbiamo visto che

$$b \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f$$

In termini della rappresentazione:

$$D(b) \cdot D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D(f)$$

* RAPPRESENTAZIONI RIDUCIBILI E IRRIDUCIBILI

- Una rappresentazione è detta riducibile se può essere posta in una forma diagonale a blocchi, cioè se esiste una trasformazione di similitudine tale che

$$\boxed{S D(a) S^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(a) & & 0 \\ & D_2(a) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \forall a \in G}$$

In questo caso si scrive

$$\boxed{D(a) = D_1(a) + D_2(a) + \dots}$$

Una rappresentazione non riducibile è detta irriducibile

- Possiamo considerare le matrici $D(a)$ come trasformazioni lineari su un insieme di

Vettori (stati) di base:

$$\psi_i \to \psi_i' = D(a)_{ij}\psi_j$$

- La <u>dimensione</u> di una rappresentazione è la dimensione dello spazio vettoriale su cui agisce

- Consideriamo un <u>sistema fisico invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni</u> G. Se il gruppo possiede una rappresentazione unitaria $U(a)$, questo vuol dire che

$$H' = UHU^{-1} = H \qquad (\Rightarrow [U,H]=0)$$

Indichiamo con φ_n gli autostati di H:

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n$$

Applicando a questa equazione l'operatore U:

$$UH\varphi_n = (UHU^{-1})U\varphi_n = H(U\varphi_n)$$
$$UH\varphi_n = UE_n\varphi_n = E_n(U\varphi_n)$$

dunque

$$H(U\varphi_n) = E_n(U\varphi_n)$$

$\Rightarrow$ Gli stati ottenuti applicando la trasformazione U sullo stato φ_n hanno la stessa energia dello stato φ_n.

In generale, inoltre, questi stati rappresentano stati di base di una <u>rappresentazione unitaria irriducibile</u> e sono chiamati <u>multipletti</u>.

Se la rappresentazione U è riducibile, infatti, può essere posta nella forma

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \qquad U_1, U_2 \text{ unitarie}$$

e i generici vettori ψ nella forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad \psi_1, \psi_2 \text{ vettori colonna.}$$

Sotto la trasformazione U si ha

$$\psi \to \psi' = U\psi = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\psi_1 \\ U_2\psi_2 \end{pmatrix}$$

e dunque i vettori $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ non si mescolano mai tra di loro per effetto della trasformazione e possono avere differenti energie.

Viceversa, <u>i vettori di base di rappresentazioni irriducibili sono sempre mescolati tra loro dalle trasformazioni del gruppo</u> e dunque <u>devono avere la stessa energia</u> (se il sistema è invariante rispetto alle trasformazioni del gruppo). [<u>Es.</u>: sistema invariante per rotazioni. Gli stati corrispondenti a uno stesso valore di j sono componenti di uno stesso multipletto (stati di base di una rappr. irriduc.)]

GENERATORI DEI GRUPPI DI LIE

- DEFINIZIONE DI GENERATORI E ALGEBRA DEL GRUPPO
- Consideriamo i gruppi di Lie che possiedono rappresentazioni unitarie (di particolare importanza dunque in meccanica quantistica).
Per gli elementi del gruppo vicini all'identità possiamo scrivere

[Assumiamo sempre implicita una sommatoria su indici ripetuti]

$$a(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{X}} \simeq 1 + i\theta_k X_k + \dots$$

le quantità

$$\boxed{X_k = -i\left(\frac{\partial a}{\partial \theta_k}\right)_{\vec{\theta}=0}}$$

sono chiamate i generatori del gruppo.
Per $a(\theta)$ unitario i generatori sono un insieme di operatori hermitiani linearmente indipendenti

* Esempi - gruppo $SO(2)$ delle rotazioni nel piano
($n(n-1)/2$ parametri $= 1$ per $n=2$)

$$a(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \overset{\theta \ll 1}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} = 1 + \theta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - i\theta\sigma_2 \Rightarrow \underline{X = -\sigma_2}$$

(Infatti $a(\theta) = e^{-i\theta\sigma_2}$).

- Gruppo $SU(2)$: $a(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ matrici di Pauli
(n^2-1 parametri $= 3$ per $n=2$)

$$\Rightarrow X_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad X_2 = \frac{1}{2}\sigma_2, \quad X_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$$

- È possibile dimostrare che i commutatori dei generatori di un gruppo di Lie sono combinazioni lineari dei generatori: (vedi p. es. Cheng, Li, pag 88)

$$\boxed{[X_j, X_k] = i C_{jk}^{l} X_l}$$

Queste equazioni definiscono la cosiddetta <u>algebra di Lie</u> del gruppo. Le costanti C_{jk}^{l} sono chiamate <u>costanti di struttura del gruppo</u>

<u>Esempio</u>: <u>SU(2)</u>: $X_j = \frac{1}{2}\sigma_j$

$$\left[\frac{\sigma_j}{2}, \frac{\sigma_k}{2}\right] = i\varepsilon_{jkl}\frac{\sigma_l}{2} \Rightarrow \underline{C_{jk}^{l} = \varepsilon_{jkl}}$$

I generatori del gruppo delle rotazioni spaziali SO(3) sono gli operatori di momento angolare che soddisfano

$$[J_j, J_k] = i\varepsilon_{jkl} J_l \Rightarrow$$

I gruppi SU(2) e SO(3) hanno la stessa algebra di Lie

[I gruppi SU(2) ed SO(3) sono "omomorfi", ossia esiste un mapping, in questo caso da due in uno, di SU(2) su SO(3). Ad una rotazione spaziale di angolo 2π, cui corrisponde l'identità di SO(3), corrispondono le matrici $\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ di SU(2)].

- A partire dalle rappresentazioni matriciali di un gruppo si possono ottenere rappresentazioni matriciali dei generatori:

$$a(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{X}} \Rightarrow \boxed{D(a(\vec{\theta})) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{T}}}$$

dove $\boxed{[T_j, T_k] = i\, C_{jk}^{l}\, T_l}$

Esempio: diverse rappresentazioni matriciali (irriducibili) del momento angolare sono

- $J_1 = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$,

$$J_3 = \frac{\sigma_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [j = 1/2]$$

- $J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$,

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [j = 1]$$

ecc... In tutti i casi $[J_j, J_k] = i\varepsilon_{jkl} J_l$.

- Per il gruppo $\underline{\underline{SU(3)}}$ i generatori nella rappr. fondamentale sono rappresentati dalle cosiddette matrici di Gell-Mann,

$\lambda_1, \dots, \lambda_8$ - L'algebra del gruppo SU(3) si scrive usualmente nella forma

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$$

(Vedi Cheng, Li pagg. 97 e 98 per l'espressione delle λ_a e delle costanti di struttura f_{abc}) - Essendo matrici hermitiane 3×3 a traccia nulla esistono due generatori diagonali, λ_3 e λ_8 -

RAPPRESENTAZIONE CONIUGATA

- Se le matrici $D(a)$ formano una rappresentazione del gruppo, allora anche le matrici $D(a)^*$ formano una rappresentazione, detta <u>rappresentazione complessa coniugata</u> - Infatti:

se $D(a) \cdot D(b) = D(a \cdot b) \Rightarrow D(a)^* D(b)^* = D(ab)^*$

Per le rappresentazioni unitarie

$$\boxed{D(a) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{T}}} \Rightarrow \boxed{D(a)^* = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{T}^*}}$$

Quindi le matrici $-T_j^*$ formano anche una rappresentazione dei generatori, la <u>rappresentazione coniugata</u> -

- Se T_j e $-T_j^*$ sono rappresentazioni equivalenti, ossia esiste una trasformazione di similitudine tale che

$$\boxed{S T_j S^{-1} = -T_j^* \qquad \forall j}$$

allora la <u>rappresentazione</u> T_j è detta <u>reale</u>.

- È possibile dimostrare che <u>tutte le rappresentazioni irriducibili di SU(2) sono reali</u>. Nel caso della rappresentazione fondamentale, ad esempio, $S = \sigma_2$. Si ha infatti

$$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_1 = -\sigma_1^*, \quad \sigma_2 \sigma_2 \sigma_2 = \sigma_2 = -\sigma_2^*$$

$$\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = -\sigma_3 = -\sigma_3^*$$

- <u>RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA</u>:

Dall'identità di Jacobi

$$[X_j,[X_k,X_l]] + [X_l,[X_j,X_k]] + [X_k,[X_l,X_j]] = 0$$

e dall'algebra del gruppo si ottiene

$$C_{jm}^{n} C_{kl}^{m} + C_{lm}^{n} C_{jk}^{m} + C_{km}^{n} C_{lj}^{m} = 0 \qquad (*)$$

Da questa segue anche che le matrici

$$\boxed{(T_j)_{mk} = +i C_{jk}^{m}}$$

forniscano una rappresentazione dei generatori del gruppo detta <u>rappresentazione aggiunta</u>.

Si ha infatti

$$[T_j, T_k] = i C_{jk}^{m} T_m$$

$$\Rightarrow (T_j)_{nm} (T_k)_{ml} - (T_k)_{nm} (T_j)_{ml} = i C_{jk}^{m} (T_m)_{nl}$$

$$\Rightarrow -C_{jm}^{n} C_{kl}^{m} + C_{km}^{n} C_{jl}^{m} = -C_{jk}^{m} C_{ml}^{n}$$

che coincide con la (*) per l'antisimmetria delle costanti di struttura. ($C_{jk}^{m} = -C_{kj}^{m}$).

- La rappresentazione aggiunta ha evidentemente dimensione pari al numero di generatori del gruppo (n^2-1 per $SU(n)$).

PRODOTTO DI RAPPRESENTAZIONI E DECOMPOSIZIONE IN RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI. ~~METODO TENSORIALE PER SU(N)~~

* PRODOTTO DI RAPPRESENTAZIONI:

- Consideriamo 2 rappresentazioni irriducibili di un gruppo, $D^{(\alpha)}$ e $D^{(\beta)}$ di dimensione n_α e n_β rispettivamente. Indichiamo con $\varphi_i^{(\alpha)}$ ($i=1,\dots,n_\alpha$) e $\varphi_j^{(\beta)}$ ($j=1,\dots,n_\beta$) i corrispondenti vettori di base:

$$\varphi_i^{(\alpha)\prime} = D_{ik}^{(\alpha)} \varphi_k^{(\alpha)}, \qquad \varphi_j^{(\beta)\prime} = D_{jl}^{(\beta)} \varphi_l^{(\beta)}$$

- Possiamo considerare il prodotto $\varphi_i^{(\alpha)}\varphi_j^{(\beta)}$ e vedere come si trasforma

$$\varphi_i^{(\alpha)\prime}\varphi_j^{(\beta)\prime} = D_{ik}^{(\alpha)} D_{je}^{(\beta)} \varphi_k^{(\alpha)}\varphi_e^{(\beta)} \equiv D_{ij,ke}^{(\alpha\times\beta)} \varphi_k^{(\alpha)}\varphi_e^{(\beta)}$$

I numeri $D_{ij,ke}^{(\alpha\times\beta)}$ sono elementi di matrice della rappresentazione $D^{(\alpha\times\beta)}$ che è chiamata <u>prodotto di Kronecker</u> delle rappresentazioni $D^{(\alpha)}$ e $D^{(\beta)}$.

Si scrive:

$$\boxed{D^{(\alpha\times\beta)} = D^{(\alpha)} \times D^{(\beta)}}$$

- La rappresentazione $D^{(\alpha\times\beta)}$ è in generale riducibile e può essere decomposta in una somma di rappresentazioni riducibili:

$$\boxed{D^{(\alpha\times\beta)} = D^{(\gamma_1)} + D^{(\gamma_2)} + \dots}$$

- <u>Esempio</u>: sistema composto di due particelle di spin 1/2 - Per ciascuna particella gli stati di base sono rappresentati da un doppietto di SU(2)

$$\varphi_1 = \text{spin } +1/2\,, \qquad \varphi_2 = \text{spin } -1/2$$

Per il sistema composto dalle due particelle possiamo costruire quattro stati linearmente indipendenti, prodotti di Kronecker degli stati di singola particella:

$$\varphi_1\varphi_1,\quad \varphi_1\varphi_2,\quad \varphi_2\varphi_1,\quad \varphi_2\varphi_2$$

Questi sono stati di base per la rappresentazione $D^{(2\times 2)} = D^{(2)} \times D^{(2)}$ di $SU(2)$.

- Sappiamo tuttavia che sotto trasformazioni di $SU(2)$ (rotazioni di spin) le combinazioni lineari che si trasformano tra di loro, e che costituiscono dunque rappresentazioni irriducibili, sono

$$\cdot\ \varphi_1\varphi_1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1\varphi_2+\varphi_2\varphi_1),\ \varphi_2\varphi_2 \qquad \text{Tripletto}$$

$$\cdot\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1\varphi_2-\varphi_2\varphi_1) \qquad \text{Singoletto}^{(*)}$$

ossia la rappresentazione prodotto di due doppietti di $SU(2)$ si decompone in un tripletto e in un singoletto. In simboli si scrive anche

$$2\times 2 = 3+1$$

I coefficienti delle combinazioni (*) sono detti di <u>Clebsch-Gordan</u>

- Discutiamo di seguito un metodo generale per decomporre le rappresentazioni prodotto in $SU(n)$ in somme di rappresentazioni irriducibili.

* IL METODO TENSORIALE PER SU(n):

- Consideriamo le trasformazioni indotte da matrici unitarie $n \times n$ con determinante uguale ad 1. Queste matrici formano la cosiddetta rappresentazione fondamentale di SU(n) e agiscono su vettori dello spazio complesso ad n dimensioni

$$\psi_i \to \psi_i' = U_{ij}\psi_j \qquad , \qquad U^+U = 1\,,\ \det U = 1$$

- Le trasformazioni per la rappresentazione fondamentale coniugata sono date da

$$\psi_i^* \to \psi_i'^* = U_{ij}^*\psi_j^* = \psi_j^* U_{ji}^+$$

- Risulta conveniente introdurre indici alti e indici bassi con la convenzione

$$\psi^i \equiv \psi_i^* \quad , \quad U^i{}_j \equiv U_{ij}^* \quad , \quad U_i{}^j \equiv U_{ij}$$

- Le leggi di trasformazione della rappresentazione fondamentale e della sua coniugata si scrivono allora

$$\boxed{\psi_i \to \psi_i' = U_i{}^j\psi_j} \,, \quad \boxed{\psi^i \to \psi'^i = U^i{}_j\psi^j}$$

Con questa notazione la sommatoria è sempre su una coppia di indici alto e basso (contrazione).

- La somma $\psi^i\varphi_i$ è invariante: $(\psi^i\varphi_i)' = U^i{}_j U_i{}^k \psi^j\varphi_k = (U^+U)_{jk}\psi^j\varphi_k = \psi^j\varphi_j$
- Possiamo poi definire tensori di rango più elevato come quelle quantità che trasformano

come il prodotto diretto di vettori

$$\boxed{\psi^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = (U^{i_1}{}_{k_1} \dots U^{i_p}{}_{k_p})(U_{j_1}{}^{l_1} \dots U_{j_q}{}^{l_q})\, \psi^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}}$$

Questi tensori rappresentano vettori di base per la rappresentazione prodotto.

- Rispetto a trasformazioni $SU(n)$ il tensore delta di Kronecker $\underline{\underline{\delta^i_j}}$ $\underline{\underline{\text{è invariante}}}$. Infatti

$$\delta^i_j \to U^i{}_k U_j{}^l \delta^k_l = U^i{}_k U_j{}^k = U_{jk} U^+_{ki} = (UU^+)_{ji} = \delta^i_j$$

Quindi, in generale, contraendo indici con la delta di Kronecker si ottengono tensori di rango più basso:

$$U^+_{k_1 i_1} U_{i_1 l_1} = \delta^{l_1}_{k_1}$$

$$\delta^{j_1}_{i_1} \psi^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \delta^{j_1}_{i_1} (U^{i_1}{}_{k_1} U^{i_2}{}_{k_2} \dots U^{i_p}{}_{k_p})(U_{j_1}{}^{l_1} U_{j_2}{}^{l_2} \dots U_{j_q}{}^{l_q}) \cdot \psi^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} =$$

$$= \delta^{l_1}_{k_1} (U^{i_2}{}_{k_2} \dots U^{i_p}{}_{k_p})(U_{j_2}{}^{l_2} \dots U_{j_q}{}^{l_q})\, \psi^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}$$

ossia il tensore $\delta^{j_1}_{i_1} \psi^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ trasforma come $\psi^{i_2 \dots i_p}_{j_2 \dots j_q}$.
Possiamo pensare alla moltiplicazione per $\delta^{j_1}_{i_1}$ come alla "traccia" sulla coppia di indici i_1, j_1.

- Un tensore con tutti gli indici contratti, $\psi^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ è uno scalare invariante rispetto a trasformazioni $SU(n)$.

- Un altro tensore invariante rispetto a $SU(n)$ è il tensore completamente antisimmetrico di Levi-Civita:

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i_1 \dots i_n) \text{ permut. pari di } (1,2,\dots n) \\ -1 & \text{" " dispari "} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha infatti:

$$\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = U_{i_1}{}^{j_1} \dots U_{i_n}{}^{j_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} = (\det U)\, \varepsilon_{i_1 \dots i_n} =$$

$$= \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \quad , \quad \text{e analogo per } \varepsilon'^{j_1 \dots j_n}$$

(La seconda uguaglianza può essere compresa nel modo seguente. Se due indici p.es. i_1 e i_2 sono uguali il risultato è nullo, perchè è il prodotto di un tensore simmetrico in j_1, j_2, $U_{i_1}{}^{j_1} U_{i_2}{}^{j_2}$, per uno antisimmetrico. Se tutti gli indici $i_1, \dots, i_n$ sono diversi il risultato è proprio $\det U$ a meno di un segno pari a $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$).

- Anche il tensore di Levi-Civita può quindi essere utilizzato per costruire tensori di rango più basso.

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \psi'^{i_1 \dots i_n i_{n+1} \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} = \overbrace{\left(\varepsilon_{i_1 \dots i_n} U^{i_1}{}_{k_1} \dots U^{i_n}{}_{k_n}\right)}^{\varepsilon_{k_1 \dots k_n} (\det U)} \left(U^{i_{n+1}}{}_{k_{n+1}} \dots U^{i_p}{}_{k_p}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(U_{j_1}{}^{l_1} \dots U_{j_q}{}^{l_q}\right) \psi^{k_1 \dots k_p}{}_{l_1 \dots l_q} =$$

$$= \varepsilon_{k_1 \dots k_n} \left(U^{i_{n+1}}{}_{k_{n+1}} \dots U^{i_p}{}_{k_p}\right) \left(U_{j_1}{}^{l_1} \dots U_{j_q}{}^{l_q}\right) \psi^{k_1 \dots k_p}{}_{l_1 \dots l_q}$$

Pertanto il tensore $\varepsilon_{i_1 \dots i_m} \psi^{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ trasforma come $\psi^{i_{m+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$. Ne segue anche, in particolare, che $\varepsilon_{i_1 \dots i_m} \psi^{i_1 \dots i_m}$ è uno scalare invariante per $SU(n)$.

- Da quanto detto segue che, mediante contrazioni con i tensori δ^i_j e $\varepsilon_{i_1 \dots i_m}$, è possibile costruire combinazioni lineari di tensori $\psi^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ che trasformano come tensori di rango più basso. Iterando questa procedura, è possibile allora <u>decomporre il tensore</u> $\psi^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ <u>in termini di tensori che appartengono a rappresentazioni irriducibili di $SU(n)$</u>.

In particolare, il tensore $\psi^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ appartiene ad una <u>rappresentazione irriducibile</u> di $SU(n)$ se

1) la traccia per ciascuna coppia di indici alti e bassi i_ℓ e j_m è nulla (e dunque il tensore non può essere ridotto di rango mediante l'applicazione di $\delta^{j_m}_{i_\ell}$).

2) tutti gli indici alti e bassi sono separatamente simmetrizzati tra loro (e dunque il tensore non può essere ridotto di rango mediante l'applicazione di $\varepsilon_{i_1 \dots i_m}$ o $\varepsilon^{j_1 \dots j_m}$).

Indicheremo questi tensori con $\hat{\psi}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$.

Discutiamo ora l'applicazione del metodo tensoriale al caso dei gruppi <u>SU(2)</u> ed <u>SU(3)</u>.

* LE RAPPRESENTAZIONI DI SU(2):

- Nel caso del gruppo SU(2) il tensore di Levi-Civita ha rango due e può essere utilizzato per alzare o abbassare indici. Così ad esempio:

$$\varepsilon_{i_1 j_1}\,\varepsilon_{i_2 j_2}\cdots\psi^{j_1 j_2\cdots} = \varphi_{i_1 i_2\cdots}$$

Poiché ε_{ij} è invariante rispetto a trasformazioni di SU(2), la precedente equazione mostra che i tensori $\psi^{j_1 j_2\cdots}$ e $\varphi_{i_1 i_2\cdots}$, con indici rispettivamente alti e bassi, trasformano allo stesso modo (le rappresentazioni irriducibili di SU(2) sono reali).
È sufficiente quindi limitarsi a considerare <u>tensori con soli indici bassi</u>: $\psi_{i_1 i_2\cdots i_p}$.

- Un generico tensore $\psi_{i_1 i_2 i_3\cdots}$ può essere decomposto in una parte simmetrica rispetto allo scambio dei primi due indici ed una antisimmetrica:

$$\psi_{i_1 i_2 i_3\cdots} = \frac{1}{2}\left(\psi_{i_1 i_2 i_3\cdots} + \psi_{i_2 i_1 i_3\cdots}\right) + \frac{1}{2}\left(\psi_{i_1 i_2 i_3\cdots} - \psi_{i_2 i_1 i_3\cdots}\right)$$

$$= \psi_{\{i_1 i_2\} i_3\cdots} + \psi_{[i_1 i_2] i_3\cdots}$$

Con l'aiuto di ε_{ij} la parte antisimmetrica può essere espressa in termini di tensori di rango più basso.

$$\psi_{[i_1 i_2] i_3 \dots} = \varepsilon_{i_1 i_2} \varphi_{i_3 \dots}$$

- Le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ sono dunque rappresentate da tensori completamente simmetrici con indici bassi:

$$\boxed{\psi_{\{i_1 i_2 \dots i_p\}}}$$

- Il numero di tensori linearmente indipendenti di questo tipo è $p+1$. Il tensore infatti, è completamente specificato indicando il numero p_1 di indici uguali ad 1 (il numero di indici uguali a 2 è dunque $p_2 = p - p_1$) e p_1 può assumere i valori $0, 1, 2, \dots p$. Dunque la dimensione della rappresentazione è:

$$\boxed{d(p) = p+1}$$

(Talvolta si usa indicare con $2S$ il rango del tensore e dunque $d(S) = 2S+1 \dots$)

- Consideriamo ora alcuni esempi di decomposizione di rappresentazioni prodotto in termini di rappresentazioni irriducibili

⊙ $$\underbrace{\varphi_i \varphi'_j}_{2\times 2} = \frac{1}{2}(\varphi_i \varphi'_j + \varphi_j \varphi'_i) + \frac{1}{2}(\varphi_i \varphi'_j - \varphi_j \varphi'_i) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_i \varphi'_j + \varphi_j \varphi'_i)}_{p=2 \to d=3} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij} \underbrace{(\varepsilon^{kl} \varphi_k \varphi'_l)}_{p=0 \to d=1}$$

Le due rappresentazioni irriducibili sono dunque

$$\varphi_i \varphi'_j \begin{cases} \nearrow \ \psi_{\{ij\}} & , \quad d(2) = 3 \\ \searrow \ \varepsilon^{ij} \varphi_i \varphi'_j & , \quad d(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{2 \times 2 = 3 + 1}$$

In termini di composizione di momenti angolari:
$\left(j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{1}{2} \rightarrow j = 1, 0 \right)$

- $$\varphi_{\{ij\}} \varphi'_k \begin{cases} \nearrow \ \psi_{\{ijk\}} & , \quad d(3) = 4 \\ \searrow \ \varepsilon^{ik} \varphi_{\{ij\}} \varphi'_k & , \quad d(1) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{3 \times 2 = 4 + 2}$$

$\left(j_1 = 1, \ j_2 = 1/2 \rightarrow j = 3/2, \ 1/2 \right)$

- Dalla combinazione dei precedenti segue anche

$$2 \times 2 \times 2 = (3 + 1) \times 2 = (3 \times 2) + (1 \times 2)$$

ossia

$$\boxed{2 \times 2 \times 2 = 4 + 2 + 2}$$

$\left(j_1 = 1/2, \ j_2 = 1/2, \ j_3 = 1/2 \rightarrow \rightarrow j = 3/2, \ 1/2, \ 1/2 \right)$

* LE RAPPRESENTAZIONI DI SU(3)

- Nel caso di SU(3) il tensore di Levi-Civita ha tre indici e dunque non può essere usato per alzare o abbassare indici. Si devono dunque considerare tensori con indici sia alti che bassi:

$$\psi^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

- Per quanto detto, le rappresentazioni irriducibili sono rappresentate da tensori $\hat{\varphi}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ con p indici alti e q indici bassi separatamente simmetrizzati tra loro e a traccia nulla.
È possibile mostrare che la dimensione di questa rappresentazione è

$$\boxed{d(p,q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)}$$

(vedi Appendice).

- Vediamo alcuni <u>esempi</u> di decomposizione in rappresentazioni irriducibili

⊙ $$\varphi^i \varphi'_j = \left(\varphi^i \varphi'_j - \frac{1}{3}\delta^i_j (\varphi^k \varphi'_k)\right) + \frac{1}{3}\delta^i_j (\varphi^k \varphi'_k)$$

le due rappresentazioni irriducibili sono dunque

$$\varphi^i \varphi'_j \begin{cases} \nearrow \ \varphi^i \varphi'_j - \frac{1}{3}\delta^i_j (\varphi^k \varphi'_k) \equiv \hat{\psi}^i_j & d(1,1) = 8 \\ \searrow \ \delta^j_i \varphi^i \varphi'_j \ , & d(0,0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{3 \times \bar{3} = 8 + 1} \qquad (\Rightarrow \text{mesoni})$$

⊙ $$\varphi_i \varphi'_j = \frac{1}{2}(\varphi_i \varphi'_j + \varphi_j \varphi'_i) + \frac{1}{2}(\varphi_i \varphi'_j - \varphi_j \varphi'_i) =$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi_i \varphi'_j + \varphi_j \varphi'_i) + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\varepsilon^{klm} \varphi_l \varphi'_m)$$

le due rappresentazioni irriducibili sono

$$\varphi_i \varphi'_j \begin{cases} \nearrow \ \psi_{\{ij\}} \,, & d(0,2) = 6 \\ \searrow \ \varepsilon^{ijk} \varphi_i \varphi'_j \,, & d(1,0) = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{3 \times 3 = 6 + \bar{3}}$

- $$\psi_{\{ij\}} \varphi_k \begin{cases} \nearrow \ \psi_{\{ijk\}} \,, & d(0,3) = 10 \\ \searrow \ \varepsilon^{ikl} \psi_{\{ij\}} \varphi_k \,, & d(1,1) = 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{6 \times 3 = 10 + 8}$

- Combinando i precedenti risultati si ottiene pure:

$$3 \times 3 \times 3 = (6 + \bar{3}) \times 3 = (6 \times 3) + (3 \times \bar{3})$$

ossia

$$\boxed{3 \times 3 \times 3 = 10 + 8 + 8 + 1}$$ ($\Rightarrow$ barioni)

- Vediamo un ultimo caso. Indichiamo solo le contrazioni:

$$\psi^i_k \psi'^j_l \rightarrow \underset{27}{\hat{\psi}^{ik}_{jl}} \,, \quad \underset{10}{\varepsilon_{ijm} \psi^i_k \psi'^j_l} \,, \quad \underset{\overline{10}}{\varepsilon^{klm} \psi^i_k \psi'^j_m} \,,$$

$$\underset{8}{\delta^l_i \psi^i_k \psi'^j_l} \,, \quad \underset{8}{\delta^k_j \psi^i_k \psi'^j_l} \,, \quad \underset{1}{\delta^l_i \delta^k_j \psi^i_k \psi'^j_l}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{8 \times 8 = 27 + 10 + \overline{10} + 8 + 8 + 1}$

* OTTETTI MESONICI E BARIONICI

- Nel limite in cui si trascurano le differenze di massa tra i quark u, d, s, le interazioni forti sono invarianti per trasformazioni $SU(3)$ di sapore, che mutano tra loro i tre quark leggeri:

$$q_i = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \qquad q_i \to U_i{}^j q_j$$

$$q^i = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix}, \qquad q^i \to U^i{}_j q^j$$

- In questo ~~approssimazione~~ limite, ci si aspetta che gli adroni possano essere classificati in multipletti di $SU(3)$, in prima approssimazione degeneri tra loro. Questo è infatti ciò che si verifica. I mesoni 0^- e 1^- e i barioni $1/2^+$ costituiscono degli ottetti, mentre i barioni $3/2^+$ entrano in un decupletto. Determiniamo esplicitamente le componenti di questi multipletti

- OTTETTO MESONICO 0^-:

Il tensore che trasforma come un ottetto $(p=1, q=1)$ è

$$\boxed{M^i_j = q^i q_j - \frac{1}{3}\delta^i_j (q^k q_k)}$$

Le sue componenti sono:

$$M^1_2 = q^1 q_2 = \bar{u}d = \pi^- \quad , \quad M^2_1 = \pi^+$$

$$M^1_3 = q^1 q_3 = \bar{u}s = K^- \quad , \quad M^3_1 = K^+$$

$$M^2_3 = q^2 q_3 = \bar{d}s = \bar{K}^0 \quad , \quad M^3_2 = K^0$$

$$M^1_1 = q^1 q_1 - \frac{1}{3}(q^k q_k) = \frac{2}{3}\bar{u}u - \frac{1}{3}\bar{d}d - \frac{1}{3}\bar{s}s =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\bar{u}u+\bar{d}d) + \frac{1}{2}(\bar{u}u-\bar{d}d)\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\bar{u}u+\bar{d}d) - \frac{1}{2}(\bar{u}u-\bar{d}d)\right]$$

$$-\frac{1}{3}\bar{s}s = \frac{1}{2}(\bar{u}u-\bar{d}d) + \frac{1}{6}(\bar{u}u+\bar{d}d-2\bar{s}s) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8$$

[Il pione neutro appartiene alla rappresentazione irriducibile di SU(2) (isospin) con $T=1, T_3=0$, (tripletto). Il tensore che trasforma secondo questa rappresentazione è $\Pi_{ij} \sim q_i q_j + q_j q_i$ o, in termini di quark-antiquark, $\Pi_{ij} \sim \varepsilon_{jk} q_i q^k + \varepsilon_{ik} q_j q^k$. Dunque $\pi^0 \sim \Pi_{12} \sim \varepsilon_{21} q_1 q^1 + \varepsilon_{12} q_2 q^2 = -(\bar{u}u - \bar{d}d)$].

$$M^2_2 = q^2 q_2 - \frac{1}{3}(q^k q_k) = -\frac{1}{3}\bar{u}u + \frac{2}{3}\bar{d}d - \frac{1}{3}\bar{s}s =$$

$$= -\frac{1}{2}(\bar{u}u - \bar{d}d) + \frac{1}{6}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s) = -\frac{\pi_0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}}$$

$$M^3_3 = q^3_3 - \frac{1}{3}(q^k q_k) = -\frac{1}{3}\bar{u}u - \frac{1}{3}\bar{d}d + \frac{2}{3}\bar{s}s = -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8$$

Nota: per definizione $M^k_k = M^1_1 + M^2_2 + M^3_3 = 0$.

In rappresentazione matriciale il tensore è dunque

$$\boxed{M^i_j = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}$$

$(M_{ji} \equiv M^i_j)$

$\left(\begin{matrix} \eta \simeq \eta_8 \,;\ \eta' \simeq \eta_1 \\ \theta \simeq 11^\circ \end{matrix}\right)$

- Il singoletto è poi

$$\boxed{M_1 = q^k q_k = \bar{u}u + dd + \bar{s}s \equiv \sqrt{3}\,\eta_1}$$

- OTTETTO MESONICO 1^-

- Dal punto di vista del flavour, l'ottetto vettoriale ha gli stessi numeri quantici di quello pseudoscalare. Le sue componenti sono dunque

$$\boxed{V^i_j = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} + \frac{\psi_8}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho_0}{\sqrt{2}} + \frac{\psi_8}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2\psi_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}$$

$\left(\begin{matrix} \omega \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d) \\ \varphi \simeq \bar{s}s \\ \theta \simeq 40^\circ \end{matrix}\right)$

Il singoletto è

$$\boxed{\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(q^k q_k) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + dd + \bar{s}s)}$$

- OTTETTO BARIONICO 1/2⁻

- Nel prodotto $3 \times 3 \times 3$ $(= q_i q_j q_k)$ entrano due ottetti, uno generato dal prodotto 6×3 $(\sim \varepsilon^{ikl}(q_i q_{\ell} + q_j q_i) q_k)$ ed uno dal prodotto $3 \times \bar{3}$ $(\sim \varepsilon^{ijk} q_i q_j q_l)$. I due ottetti differiscono dunque per le proprietà di simmetria rispetto ai primi due quark.

- I barioni che costituiscono l'ottetto $1/2^-$ sono una combinazione lineare dei due ottetti che entrano nel prodotto $3 \times 3 \times 3$.

- Dal punto di vista del contenuto di sapore, le componenti dell'ottetto barionico possono essere semplicemente ottenute da quelle dell'ottetto mesonico sostituendo l'antiquark $\bar{q}_k$ con i due quark $\varepsilon^{ijk} q_i q_j$, ossia

$$\bar{u} \to ds, \quad \bar{d} \to us, \quad \bar{s} \to ud$$

Pertanto:

$$\pi^+ = \bar{d}u \to uus = \Sigma^+ ,$$

$$K^+ = \bar{s}u \to uud = p$$

$$K^0 = \bar{s}d \to udd = n$$

$$\pi^- = \bar{u}d \to dds = \Sigma^-$$

$K^- = \bar{u}s \to dss = \Xi^-$

$\bar{K}^0 = \bar{d}s \to uss = \Xi^0$

$\pi^0 \propto \bar{u}u - \bar{d}d \to uds \begin{pmatrix} T=1 \\ T_3=0 \end{pmatrix} = \Sigma^0$

$\eta_8 \propto \bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s \to uds \begin{pmatrix} T=0 \\ T_3=0 \end{pmatrix} = \Lambda^0$

L'ottetto barionico è dunque:

$$\boxed{B^i_j = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma_0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}$$

* IL DECUPLETTO BARIONICO $3/2^+$

- Nel prodotto $3 \times 3 \times 3$ entra anche, come abbiamo visto, un decupletto, $\psi_{\{ijk\}}$, rappresentato da componenti completamente simmetriche rispetto allo scambio degli indici di sapore. Questo multipletto barionico si trova effettivamente realizzato in natura costituito da barioni con $J^P = 3/2^+$:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} ddd = \Delta^- & ddu = \Delta^0 & duu = \Delta^+ & uuu = \Delta^{++} \\ dds = \Sigma^- & dus = \Sigma^0 & uus = \Sigma^+ & \\ dss = \Xi^- & uss = \Xi^0 & & \\ sss = \Omega^- & & & \end{array}}$$

APPENDICE: DIMENSIONE DELLE RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI SU(3)

- Abbiamo osservato come un tensore $\psi^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ con p indici alti e q indici bassi trasforma come un vettore di base di una rappresentazione irriducibile di SU(3) (SU(n), in generale) quando gli indici alti e gli indici bassi sono separatamente simmetrizzati tra loro e le tracce sono tutte nulle. Ci proponiamo ora di calcolare la dimensione $d(p,q)$ della rappresentazione irriducibile
- È conveniente calcolare in primo luogo la dimensione $d(p,0)$ di un tensore $\psi^{i_1 \dots i_p}$ con p indici alti simmetrizzati. Poiché gli indici sono simmetrizzati, una componente del tensore è completamente specificata indicando i numeri p_1, p_2, p_3 di indici pari rispettivamente ad 1, 2, 3. Inoltre, in virtù della condizione $p_1 + p_2 + p_3 = p$, è sufficiente specificare in realtà solo i numeri p_1 e p_2 (di indici pari ad 1 e 2). È chiaro inoltre che fissato p_1 il

numero p_2 può assumere solo i valori tra 0 e $p-p_1$ compresi.
Si ha dunque:

$$d(p,0) = \sum_{p_1=0}^{p} \sum_{p_2=0}^{p-p_1} 1 = \sum_{p_1=0}^{p} (p-p_1+1) =$$

$$= (p+1)^2 - \frac{1}{2}p(p+1) = \left(\frac{1}{2}p+1\right)(p+1) =$$

$$= \frac{1}{2}(p+1)(p+2)$$

- Ovviamente, per un tensore $\psi_{\dot\alpha_1 \dots \dot\alpha_q}$ con q indici bassi simmetrizzati si ha analogamente:

$$d(0,q) = \frac{1}{2}(q+1)(q+2)$$

- Consideriamo ora un tensore con p indici alti simmetrizzati e q indici bassi simmetrizzati. La sua dimensione è evidentemente $d(p,0) \cdot d(0,q)$. Questo tensore può essere decomposto in un tensore con indici alti e bassi simmetrici e a traccia nulla più il tensore "traccia". Quest'ultimo ha evidentemente la dimensione di un tensore con $p-1$ indici alti e $q-1$ indici bassi simmetrizzati. Pertanto si deve avere:

$$d(p,0) \cdot d(0,q) = d(p,q) + d(p-1,0)\, d(0,q-1)$$

da cui segue direttamente

$$d(p,q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2) \qquad \text{c.v.d.}$$