APPUNTI (SPARSI) DI RELATIVITÀ RISTRETTA

V. LUBICZ

MECCANICA RELATIVISTICA

- Generalizziamo le equazioni della meccanica newtoniana ad equazioni covarianti a vista.
- Consideriamo il moto di una particella con velocità $\vec{v}$ ($|\vec{v}|<c$). La velocità stessa non può essere parte di un quadrivettore perché trasforma non linearmente (fattore $1-\vec{\beta}_0\cdot\vec{v}$). La differenza dx^μ tra due eventi che definiscono posizione e tempo della particella è un quadrivettore. Allora $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$ è uno scalare. Si ha $ds^2>0$ (nel sistema di quiete $ds^2=c^2dt^2$) e

$$ds = \sqrt{ds^2} = \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{c^2dt^2 - d\vec{x}^2} =$$
$$= c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = c\,dt/\gamma$$

Allora

$$\boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}}$$ <u>Quadrivelocità</u> (è un quadrivettore) (adimensionale)

Calcoliamo le componenti

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{c\,dt}{c\,dt/\gamma} = \gamma$$

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{dx_i}{c\,dt/\gamma} = \gamma\frac{v_i}{c} = \gamma\beta_i$$

$$\Rightarrow \boxed{u^\mu = (\gamma, \gamma\vec{\beta})}$$

Nel limite NR, $cu^\mu \to (c, \vec{v})$. Calcoliamo il quadrato della quadrivelocità:

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx_\mu}{ds} = \frac{dx^\mu dx_\mu}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ le 4 componenti di u^μ non sono indipendenti.

(Alternativamente: $u^\mu u_\mu = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$).

- Analogamente possiamo introdurre la derivata seconda:

$$\boxed{w^\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{du^\mu}{ds}}$$

Quadriaccelerazione

Vediamo le componenti:

$$w^0 = \frac{du^0}{ds} = \frac{d\gamma}{c\,dt/\gamma} = \frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\right)$$

$$w^i = \frac{du^i}{dt} = \frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}(\gamma\vec{\beta})_i = \frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\right)_i$$

(Nel limite NR, $c^2 w^i \to a^i$) $\Rightarrow$ $\boxed{c w^\mu = \left(\gamma\frac{d\gamma}{dt}, \gamma\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt}\right)}$

Differenziando l'eq. (*) si ha:

$$\frac{d}{ds}(u^\mu u_\mu) = 0 = \frac{du^\mu}{ds}u_\mu + u^\mu\frac{du_\mu}{ds} = 2w^\mu u_\mu, \quad \text{ossia}$$

$$u^\mu w_\mu = 0$$

Quadrivelocità e quadriaccelerazione sono sempre ortogonali.

- Definiamo il quadrimpulso. Nel limite NR $\vec{p} = m\vec{v}$. Abbiamo visto che nel limite NR, le componenti spaziali della quadrivelocità sono $u^i \to v^i/c$. Possiamo allora definire

$$\boxed{p^\mu = mcu^\mu = (m\gamma c, m\gamma\vec{v})}$$ Quadrimpulso

Nel limite NR, allora, $\vec{p} = m\gamma\vec{v} \to m\vec{v} = \vec{p}_{NR}$.
Consideriamo il limite NR di p^0:

$$p^0 = m\gamma c = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq mc\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots\right) = mc\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$

Dunque $cp^0 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$

e coincide, a meno di una costante, con l'energia della particella. Nella meccanica classica, l'energia è definita a meno di una costante. Nella meccanica relativistica, invece, l'aggiunta di una costante cambia le proprietà di un oggetto tensoriale sotto trasformazioni di Lorentz. Allora

$$\boxed{E = cp^0 = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}}$$

In particolare, l'energia della particella a riposo è

$$\boxed{E = mc^2}$$

In termini di energia e impulso relativistici il quadrimpulso si scrive:

$$\boxed{p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)}$$

Calcoliamo il quadrato del quadrimpulso:

$$p^\mu p_\mu = mcu^\mu mcu_\mu = m^2c^2 u^\mu u_\mu = m^2c^2$$

(↑ invariante)

D'altra parte:

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{1}{c^2}(E^2 - \vec{p}^2c^2)$$

da cui

$$E^2 - c^2\vec{p}^2 = m^2c^4$$

ossia

$$\boxed{E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}}$$

che esprime la relazione relativistica tra energia e impulso di una particella.

Nel limite non relativistico, $cp \ll mc^2$, si ha

$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}} \simeq mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \ldots$$

Nel limite opposto ultrarelativistico, $cp \gg mc^2$ (o per particelle di massa nulla)

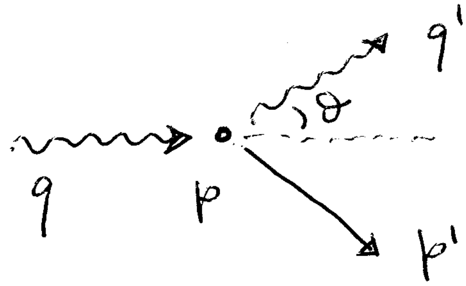
$$E \simeq cp$$

In meccanica relativistica, dunque, energia e impulso sono componenti di uno stesso quadrivettore. Ne seguono immediatamente le formule di trasformazione nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Per un boost lungo l'asse x con velocità V_0

$$\begin{cases} p_x' = \gamma_0\left(p_x - \frac{V_0}{c^2}E\right) \\ p_y' = p_y \\ p_z' = p_z \\ E' = \gamma_0\left(E - V_0 p_x\right) \end{cases} \quad , \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-V_0^2/c^2}}$$

Inoltre le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso esprimono insieme la legge di conservazione del quadrimpulso.

<u>Esempio</u>: <u>effetto Compton</u>: $e+\gamma \to e'+\gamma'$



$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (mc, \vec{0})$$

$$p' = \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}\,'\right) \qquad [p^2 = p'^2 = m^2c^2]$$

$$q = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k}\right)$$

$$q' = \left(\frac{\hbar\omega'}{c}, \hbar\vec{k}'\right) \qquad [q^2 = q'^2 = 0]$$

$$\boxed{p + q = p' + q'}$$

Dalla conservazione del quadrimpulso

$$p'^2 = \cancel{m^2c^2} = (p+q-q')^2 = p^2+q^2+q'^2+2p\cdot q-2pq'-2qq' =$$

$$= mc^2 + 2m\cancel{c}\frac{\hbar\omega}{\cancel{c}} - 2m\cancel{c}\frac{\hbar\omega'}{\cancel{c}} - 2\frac{\hbar^2\omega\omega'}{c^2} + 2\hbar^2 k\cdot k'\cos\theta =$$

$$= \cancel{m^2c^2} + 2m\hbar(\omega-\omega') - 2\frac{\hbar^2}{c^2}\omega\omega'(1-\cos\theta)$$

da cui
$$\omega-\omega' = \frac{\hbar}{mc^2}\omega\omega'(1-\cos\theta)$$

o anche
$$\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\omega} = \frac{\hbar}{mc^2}(1-\cos\theta)$$

Ricordando che $\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, si trova

$$\boxed{\lambda'-\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)}$$

- Consideriamo infine la generalizzazione della legge di Newton, $\vec{f} = d\vec{p}/dt$. Per analogia con la definizione ordinaria di forza, si può definire la quadriforza g^μ e scrivere l'<u>equazione del moto</u>

$$\boxed{g^\mu = \frac{dp^\mu}{ds} = mc\frac{du^\mu}{ds} = mcw^\mu}$$ <u>Quadriforza</u>

(Essendo proporzionale alla quadriaccelerazione, la quadriforza è ortogonale alla quadrivelocità: $g^\mu u_\mu = 0$).

Possiamo esprimere le componenti della quadriforza in termini del vettore forza tridimensionale ordinario, $\vec{f} = d\vec{p}/dt$ (nota tuttavia che $\vec{p} = m\gamma\vec{v} \neq \vec{p}_{NR} = m\vec{v}$).

Per le componenti spaziali si ha:

$$\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{d\vec{p}}{c\,dt/\gamma} = \frac{\gamma}{c}\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\gamma}{c}\vec{f}$$

Per la componente spaziale è conveniente utilizzare

$$0 = g^\mu u_\mu = g^0 u^0 - \vec{g}\cdot\vec{u} = \gamma g^0 - \gamma\,\vec{g}\cdot\vec{\beta}$$

$$\Rightarrow g^0 = \vec{g}\cdot\vec{\beta}$$

Allora

$$\boxed{g^\mu = \left(\frac{\gamma}{c^2}\vec{f}\cdot\vec{v},\ \frac{\gamma}{c}\vec{f}\right)} \quad \text{con} \quad \boxed{\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad (*)$$

In particolare, nel limite NR: $c\vec{g} \to \vec{f}$.

Studiamo l'"equazione del moto" per la componente temporale.

$$g^0 = \frac{dp^0}{ds} = \frac{d(E/c)}{c\,dt/\gamma} = \frac{\gamma}{c^2}\frac{dE}{dt} \overset{(*)}{=} \frac{\gamma}{c^2}\vec{f}\cdot\vec{v}$$

ossia

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}}$$

<u>legge della potenza</u>

$(dE = \vec{f}\cdot\vec{v}\,dt = \vec{f}\cdot d\vec{s})$

In meccanica NR è una conseguenza di $\vec{f} = d\vec{p}/dt$

Studiamo più in dettaglio la relazione tra forza ed accelerazione tridimensionali - Calcoliamo le componenti spaziali della quadriaccelerazione:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{d(\gamma\vec{\beta})}{c\,dt/\gamma} = \frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}(\gamma\vec{\beta}) = \frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{\beta}}{dt} + \vec{\beta}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{\beta}}{dt} + \vec{\beta}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-2\vec{\beta}\cdot}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{c}\left(\gamma\frac{d\vec{\beta}}{dt} + \gamma^3\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)\right) = \qquad \left[\frac{d\vec{\beta}}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{a}}{c}\right]$$

$$= \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{a} + \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\vec{\beta}\right)$$

Ma $\vec{g} = mc\vec{w} = \frac{\gamma}{c}\vec{f}$, ossia $\vec{f} = \frac{mc^2}{\gamma}\vec{w}$ - Allora

$$\boxed{\vec{f} = m\gamma\left(\vec{a} + \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\vec{\beta}\right)} \qquad (\circ)$$

Osserviamo anche che

$$\vec{f}\cdot\vec{\beta} = m\gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{a}) + m\gamma^3\beta^2(\vec{\beta}\cdot\vec{a}) =$$

$$= m\gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{a})(1+\beta^2\gamma^2) = m\gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\gamma^2(1-\cancel{\beta^2}+\cancel{\beta^2})$$

$$= m\gamma^3(\vec{\beta}\cdot\vec{a})$$

Sostituendo nella $(\circ)$ troviamo

$$\vec{f} = m\gamma\vec{a} + (\vec{f}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$$ ossia

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m\gamma} - \frac{(\vec{f}\cdot\vec{\beta})}{m\gamma}\vec{\beta}} \qquad (\square)$$

In meccanica relativistica, dunque, $\vec{f}$ ed $\vec{a}$ non sono in generale paralleli e dunque il concetto di massa inerziale come rapporto tra forza ~~massa~~ ed accelerazione ($\vec{f} = \mu\vec{a}$) alle alte velocità perde di senso.

Forza ed accelerazione sono paralleli solo in due casi:

1) $\vec{f} \parallel \vec{\beta}$ $\Rightarrow$ $\vec{f} = \lambda\vec{\beta}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\lambda\vec{\beta}}{m\gamma} - \frac{\lambda\beta^2\vec{\beta}}{m\gamma} = \frac{\lambda}{m\gamma}(1-\beta^2)\vec{\beta} = \frac{\vec{f}}{m\gamma^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f} = m\gamma^3\vec{a}}$$

2) $\vec{f}\cdot\vec{\beta} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m\gamma}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{f} = m\gamma\vec{a}}$

Nel limite NR, a meno di correzioni di $O(v^2/c^2)$, dalla $(\square)$ si ottiene

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}}$$

FORMULAZIONE COVARIANTE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL E DEL MOTO IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO

- Vogliamo scrivere le equazioni di Maxwell e la forza di Lorentz, cioè le leggi dell'elettromagnetismo, in forma covariante a vista.

- Il campo e.m. è descritto da due vettori tridimensionali, $\vec{E}$ e $\vec{B}$, quindi 6 componenti(*). Un quadrivettore non basta (4 componenti). L'oggetto più semplice con 6 componenti è un tensore antisimmetrico di rango due:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

(Il numero di componenti indipendenti è $n(n-1)/2$, ossia $4\cdot3/2 = 6$).

- La quadriforza, che entra nelle equazioni del moto è un quadrivettore ortogonale alla quadrivelocità: $g^{\mu}u_{\mu}=0$. A partire da $F^{\mu\nu}$ posso costruire un quadrivettore ortogonale alla quadrivelocità con $F^{\mu\nu}u_{\nu}$. Infatti $(F^{\mu\nu}u_{\nu})u_{\mu}=0$ per l'antisimmetria di $F^{\mu\nu}$. Posso allora provare a scrivere l'equazione del moto

$$\boxed{g^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{ds} = K F^{\mu\nu} u_{\nu}}$$

(*) che si trasformano tra loro nel cambiamento di sistema di riferimento

- Consideriamo le componenti spaziali $[u^\mu = (\gamma, \gamma\vec{\beta})]$

$$\frac{dp^i}{ds} = \frac{dp^i}{c\,dt/\gamma} = K\left(F^{i0}\gamma - F^{ij}\gamma\beta^j\right)$$

ossia

$$\frac{dp^i}{dt} = Kc\left(F^{i0} - F^{ij}\beta^j\right)$$

Confrontando questa equazione con l'equazione della forza di Lorentz,

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{B}\right)}$$

vediamo che possiamo identificare Kc con "e" (la carica della particella) e le 6 componenti di $F^{\mu\nu}$ con i vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ nel modo seguente:

$$\boxed{F^{0i} = -E^i}\;,\quad \boxed{F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k} \qquad (\circ)$$

ossia, esplicitamente,

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}}$$

In forma compatta si usa anche scrivere $\boxed{F^{\mu\nu} = (-\vec{E}, \vec{B})}$

Notiamo che la seconda delle eq. (•) può essere invertita nella forma

$$\boxed{B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}} \qquad (\bullet\bullet)$$

Infatti:

$$\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^l = -2\delta^{il}B^l = -2B^i$$

- Il tensore $F^{\mu\nu}$ trasforma come il prodotto di due quadrivettori, $\alpha^\mu\beta^\mu$. Sotto trasformazioni di parità dunque, $E^i = -F^{0i}$ trasforma come $\alpha^0\beta^i$, ossia come un vero vettore (polare). Invece $B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}$ trasforma come $\varepsilon^{ijk}\alpha^j\beta^k = (\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})^i$ ossia come un vettore assiale.

- Le <u>equazioni del moto</u> di una particella carica in un campo elettromagnetico, dunque, in forma quadridimensionale si scrivono

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu}$$

Le tre componenti spaziali esprimono la forza di Lorentz. Studiamo la componente temporale:

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{d(\overset{\text{energia}}{\mathcal{E}}/c)}{c\,dt/\gamma} = \frac{\gamma}{c^2}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e}{c} F^{0i} u_i =$$

$$= \frac{e}{c}(-E^i)(-\gamma\beta^i) = \frac{e}{c}\gamma E^i \beta^i = \frac{e}{c^2}\gamma E^i v^i$$

ossia

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\,\vec{E}\cdot\vec{v}}$$

che esprime per una carica in moto in un campo elettromagnetico. l'equazione della potenza. (Notiamo che il campo magnetico non compie nessun lavoro sulla carica in moto).

- Consideriamo ora le leggi di trasformazione per il campo elettromagnetico, che esprimono come si trasformano i campi elettrico e magnetico nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro:

$$\boxed{F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\,\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\,F^{\alpha\beta}}$$

Consideriamo esplicitamente il caso di un boost nella direzione dell'asse x, per il quale

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e studiamo prima le leggi di trasformazione del campo elettrico:

- $E'_x = F'^{10} = \Lambda^1{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_\beta F^{0\beta} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_\beta F^{1\beta} =$
  $= \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_1 F^{01} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_0 F^{10} = -\gamma^2\beta^2 E_x + \gamma^2 E_x =$
  $= \gamma^2(1-\beta^2) E_x = E_x$

- $E'_y = F'^{20} = \Lambda^2{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^2{}_2 (\Lambda^0{}_0 F^{20} + \Lambda^0{}_1 F^{21}) =$
  $= \gamma E_y - \gamma\beta B_z$

- $E'_z = F'^{30} = \Lambda^3{}_3 (\Lambda^0{}_0 F^{30} + \Lambda^0{}_1 F^{31}) = \gamma E_z + \beta B_y$

Consideriamo ora le trasformazioni del campo magnetico:

- $B'_x = F^{32} = \Lambda^3{}_\alpha \Lambda^2{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^3{}_3 \Lambda^2{}_2 F^{32} = B_x$

- $B'_y = F^{13} = \Lambda^1{}_\alpha \Lambda^3{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^3{}_3 (\Lambda^1{}_0 F^{03} + \Lambda^1{}_1 F^{13}) =$
  $= \gamma\beta E_z + \gamma B_y$

- $B'_z = F^{21} = \Lambda^2{}_\alpha \Lambda^1{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^2{}_2 (\Lambda^1{}_0 F^{20} + \Lambda^1{}_1 F^{21}) =$
  $= -\gamma\beta E_y + \gamma B_z$

Raccogliendo dunque i vari risultati:

$$\boxed{\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned}}$$

(Notare che i campi $\vec{E}', \vec{B}'$ sono valutati nel punto $x' = \Lambda x + a$, mentre $\vec{E}, \vec{B}$ sono valutati nel punto x).

- Il campo elettrico e il campo magnetico sono quindi relativi: le loro proprietà sono differenti in diversi sistemi di riferimento. In particolare se in un sistema si ha solo un campo elettrico o solo un campo magnetico, in generale in altri sistemi di riferimento sono presenti entrambi.

- In generale, per un boost con velocità $\vec{\beta}$ in direzione arbitraria, le leggi di trasformazione dei campi si scrivono:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \wedge \vec{B}) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \wedge \vec{E}) \end{aligned}}$$

- In termini del tensore antisimmetrico del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ è possibile definire il tensore duale:

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}}$$

Calcoliamone esplicitamente le componenti:

$$\tilde{F}^{0i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F^{jk} = -B^i \quad \text{(vedi (oo))}$$

$$\tilde{F}^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij0k} F_{0k} + \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk0} F_{k0} =$$

$$= \varepsilon^{ijk0} F_{k0} = + \varepsilon^{0ijk} F^{k0} = \varepsilon^{ijk} E^k \quad \text{(vedi (o))}$$

ossia

$$\boxed{\tilde{F}^{0i} = -B^i}, \quad \boxed{\tilde{F}^{ij} = \varepsilon^{ijk} E^k} \qquad (o)$$

$$\hookrightarrow \boxed{E^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \tilde{F}^{jk}}$$

o esplicitamente

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}}$$

In forma compatta si scrive pure $\tilde{F}^{\mu\nu} = (-\vec{B}, -\vec{E})$.

È utile osservare che in termini dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ il passaggio da $F^{\mu\nu}$ al tensore duale $\tilde{F}^{\mu\nu}$ comporta

$$\boxed{F^{\mu\nu} \to \tilde{F}^{\mu\nu} \implies (\vec{E} \to \vec{B}, \quad \vec{B} \to -\vec{E})}$$

- Utilizzando il tensore $F^{\mu\nu}$ e il suo duale è possibile definire due grandezze invarianti per trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale ad un altro:

$$\boxed{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \qquad \boxed{F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}}$$

<u>Scalare</u> — <u>Pseudo-scalare</u>

Esprimiamo questi invarianti in termini dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$
\begin{aligned}
- F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij} = \\
&= -2F^{0i} F^{0i} + F^{ij} F^{ij} = \quad (\text{eq}(\cdot)) \\
&= -2E^i E^i + \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ijl} B^k B^l = \\
&= -2E^i E^i + 2\delta^{kl} B^k B^l = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= -2F^{0i} \tilde{F}^{0i} + F^{ij} \tilde{F}^{ij} = \quad \begin{pmatrix} \text{eq}(\bullet) + \\ \text{eq}(0) \end{pmatrix} \\
&= -2E^i B^i - \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ijl} B^k E^l = \\
&= -2E^i B^i - 2\delta^{kl} B^k E^l = -4\vec{E} \cdot \vec{B}
\end{aligned}
$$

ossia

$$\boxed{F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)}, \qquad \boxed{F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = -4\,\vec{E}\cdot\vec{B}}$$

Dall'invarianza delle due espressioni deduciamo che se in qualche sistema di riferimento $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari, cioè $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$, allora essi sono perpendicolari in qualsiasi altro sistema di riferimento. Inoltre se in qualche sistema di riferimento $|\vec{E}|=|\vec{B}|$, cioè $\vec{B}^2-\vec{E}^2=0$, allora essi sono uguali in qualsiasi altro sistema. Se in qualche sistema di riferimento $E>B$ (o $E<B$), in qualunque altro sistema si avrà pure $E>B$ (o $E<B$). In particolare, se si ha anche $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$, posso sempre trovare un sistema di riferimento in cui $\vec{B}=\vec{0}$ ($E=0$). Viceversa, se $\vec{E}\cdot\vec{B}\neq 0$, posso sempre trovare un sistema di riferimento in cui $\vec{E}\parallel\vec{B}$.

- Discutiamo la formulazione covariante delle equazioni di Maxwell.

Consideriamo le equazioni in forma tridimensionale:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ &\vec{\nabla}\wedge\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla}\wedge\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned}}$$

4 equazioni non omogenee collegano i campi alle densità di carica e corrente

4 equazioni omogenee determinano le proprietà intrinseche dei campi

- Proponiamoci in primo luogo di scrivere in forma covariante le equazioni non omogenee. Queste coinvolgono ρ e $\vec{j}$, che possono essere legate alle componenti di un quadrivettore. Consideriamo una carica dQ contenuta all'interno di un volume dV:

$$dQ = \rho\, dV$$

La carica elettrica è un invariante (se non lo fosse un sistema con carica nulla in un dato sistema di riferimento inerziale potrebbe risultare carico in un diverso sistema di riferimento).

Moltiplicando entrambi i membri della precedente equazione per dx^μ otteniamo

$$dQ\, dx^\mu = \rho\, dV\, dx^\mu = \rho\, dV\, dt \frac{dx^\mu}{dt} = \rho\, d^4x \frac{dx^\mu}{dx^0}$$

A primo membro di questa equazione si ha un quadrivettore (essendo dQ uno scalare). A secondo membro d^4x è un invariante. Infatti

$$d^4x' = \underbrace{\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|}_{\text{Jacobiano}} d^4x = |\det \Lambda|\, d^4x = d^4x$$

Pertanto

$$\boxed{j^\mu = c\rho \frac{dx^\mu}{dx^0} = (c\rho, \rho\vec{v}) = (c\rho, \vec{j})}$$

è un quadrivettore: <u>densità di corrente</u>. (Quadricorrente)

- A secondo membro delle equazioni di Maxwell non omogenee compaiono le componenti della densità di corrente j^μ. A primo membro compaiono i campi ($F^{\mu\nu}$) e in particolare le derivate prime spazio-temporali (∂^μ) dei campi. La combinazione $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ è appunto un quadrivettore. Possiamo verificare che le le equazioni di Maxwell non omogenee si scrivono infatti in forma covariante come

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

Eq. di Maxwell non omogenee

Infatti:

$\nu = 0$: $\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = \nabla_i E^i = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$

$\nu = i$: $\partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E^i}{\partial t} + \nabla_j \varepsilon^{jik} B^k =$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial E^i}{\partial t} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})^i = \frac{4\pi}{c} j^i$$

- L'espressione covariante delle equazioni omogenee si può derivare immediatamente osservando che queste si ottengono, a partire dalle non omogenee, ponendo ρ e $\vec{j}$ a zero e sostituendo $\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$. Ma questa sostituzione sappiamo corrispondere a $F^{\mu\nu} \to \tilde{F}^{\mu\nu}$. Le equazioni omogenee si scrivono pertanto

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$$

Eq. di Maxwell omogenee

Possiamo comunque effettuare la verifica esplicita:

$\underline{\nu = 0}$: $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} = \partial_i \tilde{F}^{i0} = \nabla^i B^i = \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$

$\underline{\nu = i}$: $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu i} = \partial_0 \tilde{F}^{0i} + \partial_j \tilde{F}^{ji} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B^i}{\partial t} + \nabla^j \varepsilon^{jik} E^k =$

$$= \underbrace{-\frac{1}{c}\frac{\partial B^i}{\partial t} - (\vec{\nabla}\wedge\vec{E})^i = 0}$$

– È opportuno osservare la semplicità ed eleganza delle equazioni di Maxwell scritte in forma covariante:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \,, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$$

L'evidente simmetria tra equazioni omogenee e non omogenee, inoltre, mostra bene il significato fisico delle equazioni omogenee: esse esprimono infatti la non esistenza di cariche magnetiche.

• Deriviamo ora, con il formalismo covariante, l'equazione di continuità, che esprime la conservazione della carica elettrica. Derivando l'equazione di Maxwell non omogenea, si ha

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\partial_\nu j^\nu$$

Ma il primo membro è identicamente nullo, perché è il prodotto di un tensore simmetrico

per uno antisimmetrico ($\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} =$
$= -\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$). Ne segue allora

$$\boxed{\partial_\nu j^\nu = 0} \qquad \text{Eq. di continuità}$$

che con notazione tridimensionale si esprime

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$$

Il significato fisico di questa equazione è manifesto integrando su un volume V:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV}_{\text{Carica nel volume } V} = -\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \underbrace{-\int_S \vec{j} \cdot \hat{n} \, dS}_{\text{Flusso uscente dalla superficie che racchiude } V}$$

- Le equazioni di Maxwell omogenee risultano automaticamente soddisfatte se si pone

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \qquad (*)$$

Infatti

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma A_\rho)$$
$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma + \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma) =$$
$$= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0 \qquad \text{(tens. simm. x tens. antisimm.)}$$

Vediamo come si esprimono $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in termini delle componenti del quadrivettore A^μ:

$$\cdot\ E^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\nabla^i A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t}$$

$$+\ B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F^{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\partial^j A^k - \partial^k A^j) =$$

$$= -\varepsilon^{ijk}\partial^j A^k = \varepsilon^{ijk}\nabla^j A^k = (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})^i$$

Identifichiamo allora la componente temporale e le componenti spaziali di A^μ con il potenziale scalare e il potenziale vettore:

$$\boxed{A^\mu = (\varphi, \vec{A})}$$ Quadripotenziale

Le precedenti equazioni corrispondono infatti a

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi}\ ,\quad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}} \qquad (\star\star)$$

Esprimere il tensore del campo $F^{\mu\nu}$ in termini del quadripotenziale, eq($\star$), o equivalentemente $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in termini di φ ed $\vec{A}$, eq($\star\star$), rende automaticamente soddisfatte le equazioni di Maxwell omogenee. Nel formalismo tridimensionale

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) - \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\varphi) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$$

Sostituendo ora l'eq ($\star$) nelle equazioni di Maxwell non omogenee conduce all'equazione dei potenziali:

$$\boxed{\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu} \qquad (\star\star\star)$$

(con $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$). Questa equazione, dunque, unitamente alla ($\star$), è equivalente all'insieme completo di equazioni di Maxwell.

- Se è dato il quadripotenziale $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ allora il tensore del campo $F^{\mu\nu}$ (o equivalentemente $\vec{E}$ e $\vec{B}$) è univocamente determinato. Differenti potenziali, tuttavia, possono corrispondere ad uno stesso campo. Consideriamo infatti la "trasformazione di gauge"

$$\boxed{A^\mu_{(x)} \to A'^\mu_{(x)} = A^\mu_{(x)} + \partial^\mu f(x)}$$

dove f è una funzione arbitraria delle coordinate e del tempo. È immediato verificare che tale trasformazione lascia invariato il campo:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu f) =$$
$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

le equazioni dell'elettromagnetismo, dunque, sono invarianti per trasformazioni di gauge dei potenziali. Questa invarianza è chiamata <u>invarianza di gauge</u>.

- La non unicità dei potenziali permette sempre di sceglierli in maniera tale da soddisfare una condizione arbitraria supplementare, determinata da ragioni di convenienza. Per esempio

$A^0 = \varphi = 0$ gauge assiale

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ gauge di Coulomb

Queste condizioni non sono covarianti. Per esempio, $A^0 = 0$ in un sistema di riferimento implica in generale $A^0 \neq 0$ in un altro sistema di riferimento. Una scelta di gauge covariante è invece

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

<u>Gauge di Lorentz</u>

[In forma tridimensionale: $\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$]

Questa presenta il particolare vantaggio di disaccoppiare le equazioni dei potenziali (★★★):

$$\boxed{\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu} \quad \text{per } \partial_\mu A^\mu = 0$$

[In assenza di cariche e correnti questa si riduce alla ben nota

$\boxed{\Box A^\mu = 0}$ equazione delle onde)

- Mostriamo come partendo da un dato quadripotenziale A^μ sia sempre possibile effettuare una trasformazione di gauge che conduca ad un nuovo potenziale A'^μ che soddisfa la condizione di gauge di Lorentz. Si ha

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu (A^\mu + \partial^\mu f) = \partial_\mu A^\mu + \Box f$$

Affinché risulti $\partial_\mu A'^\mu = 0$, la funzione f deve essere la soluzione dell'equazione

$$\Box f = -\partial_\mu A^\mu$$

- Possiamo anche notare come la scelta della gauge di Lorentz non determini ancora in modo completamente univoco i potenziali. Se infatti A^μ soddisfa la condizione di Lorentz, la trasformazione di gauge

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \varphi \qquad \text{con } \Box \varphi = 0$$

conduce ad un nuovo potenziale che soddisfa ancora la gauge di Lorentz

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \Box \varphi = 0$$

CAMPO CREATO DA UNA CARICA IN MOTO UNIFORME

- Determiniamo il campo generato da una carica "e" in moto uniforme con velocità $\vec{v}$.
- Consideriamo il sistema di riferimento K' dove la carica è in quiete. In questo sistema

$$\boxed{A'^{\mu} = (\varphi', \vec{A}') = (\varphi', \vec{0})} \quad , \quad \boxed{\varphi' = \frac{e}{R'}}$$

con $R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

I campi elettrico e magnetico in questo sistema sono dati da

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi' = -\vec{\nabla}\varphi' \quad , \quad \vec{B}' = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}' = 0$$

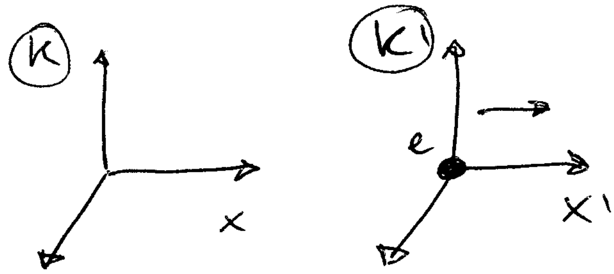
Poiché

$$\frac{\partial}{\partial x'}\varphi' = e\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = -e\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} = -\frac{eR'_x}{R'^3}$$

e analogamente per $\partial/\partial y'$ e $\partial/\partial z'$, otteniamo

$$\boxed{\vec{E}' = e\frac{\vec{R}'}{R'^3}} \quad , \quad \boxed{\vec{B}' = 0}$$

- Vogliamo ora determinare i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ nel sistema del laboratorio K, dove la carica si muove con velocità $\vec{v}$. Scegliamo $\vec{v}$ diretto lungo l'asse x:



Posizione della carica:
$K: x = vt,\ y = z = 0$
$K': x' = y' = z' = 0$

- Sappiamo che le relazioni tra i campi nei due sistemi di riferimento sono

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + \beta B'_z) \\ E_z = \gamma(E'_z - \beta B'_y). \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = B'_x \\ B_y = \gamma(B'_y - \beta E'_z) \\ B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y) \end{cases}$$

- [redacted] Nel sistema di riferimento K, i campi devono essere espressi in termini delle coordinate e del tempo in questo sistema, e sappiamo che la relazione tra le coordinate nei due sistemi sono espresse dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

Osserviamo subito che la distanza R' si [redacted] esprime[redacted] come:

$$R' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} = [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} =$$
$$= \gamma\,[(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{1/2}$$

ossia

$$\boxed{R' = \gamma R^*} , \qquad \text{con} \quad \boxed{R^* = \left[(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)\right]^{1/2}}$$

- Consideriamo allora le trasformazioni del campo elettrico:

$$E_x = E'_x = e\,\frac{x'}{R'^3} = e\,\frac{\gamma(x-vt)}{\gamma^3 R^{*3}} = e(1-\beta^2)\,\frac{x-vt}{R^{*3}}$$

$$E_y = \gamma E'_y = e\gamma\,\frac{y'}{R'^3} = e\gamma\,\frac{y}{\gamma^3 R^{*3}} = e(1-\beta^2)\,\frac{y}{R^{*3}}$$

$$E_z = \gamma E'_z = e\gamma\,\frac{z'}{R'^3} = e\gamma\,\frac{z}{\gamma^3 R^{*3}} = e(1-\beta^2)\,\frac{z}{R^{*3}}$$

Introducendo il vettore

$$\boxed{\vec{R} = (x-vt,\, y,\, z)}$$

che collega la posizione della carica al tempo t $(vt,0,0)$ con il punto di osservazione del campo (x,y,z) (al tempo t), possiamo scrivere il campo elettrico generato dalla carica in moto uniforme come

$$\boxed{\vec{E} = e(1-\beta^2)\,\frac{\vec{R}}{R^{*3}}}$$

- Per quanto riguarda il campo magnetico, le leggi di trasformazione forniscono

$$\begin{cases} B_x = B'_x = 0 \\ B_y = -\gamma\beta E'_z = -\beta E_z \\ B_z = \gamma\beta E'_y = \beta E_y \end{cases}$$

che possono essere riscritte in forma compatta come

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\beta} \wedge \vec{E}}$$

Notiamo che il campo elettrico e magnetico sono mutuamente perpendicolari come richiesto anche dall'invarianza di $\vec{E}\cdot\vec{B}$. Nel sistema di quiete della carica $\vec{B}=0$, e dunque $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$ in qualunque sistema di riferimento.

- Studiamo più in dettaglio il campo elettrico. Esprimiamo innanzitutto il raggio R^* in una forma più generale

$$R^{*2} = (x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2) =$$

$$= (1-\beta^2)\left[(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right] + \beta^2(x-vt)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{R^{*2} = (1-\beta^2)R^2 + (\vec{\beta}\cdot\vec{R})^2} \qquad (\square) \qquad [\vec{\beta} = (\beta,0,0)]$$

Introducendo l'angolo θ tra la direzione di moto della particella e il raggio vettore $\vec{R}$ si ha

$$R^{*2} = (1-\beta^2)R^2 + \beta^2R^2\cos^2\theta = R^2\left[1-\beta^2(1-\cos^2\theta)\right]$$

ossia

$$\boxed{R^{*2} = R^2(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2\vartheta)}$$

Per il campo elettrico si ha allora

$$\boxed{\vec{E} = \frac{e\vec{R}}{R^3}\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2\vartheta)^{3/2}}}$$

Per una fissata distanza R dalla carica, l'intensità del campo elettrico ha un minimo nella direzione parallela a quella del moto ($\vartheta = 0, \pi$) ed è massimo nella direzione perpendicolare ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$):

$$\boxed{E_{\parallel} = \frac{e}{R^2}(1-\beta^2)} \quad , \quad \boxed{E_{\perp} = \frac{e}{R^2}\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}}$$

Notiamo che con l'aumento della velocità ($\beta \to 1$) il campo $E_{\parallel}$ decresce mentre il campo $E_{\perp}$ cresce. In modo figurato si può dire che il campo elettrico di una carica in moto "si appiattisce" nella direzione del moto.

- Deriviamo ora, invece, l'espressione per i potenziali del campo nel sistema in cui la carica è in moto. Poiché i potenziali costituiscono un quadrivettore, le leggi di trasformazione si scrivono semplicemente

$$\begin{cases} \varphi = \gamma(\varphi' + \beta A'_x) \\ A_x = \gamma(A'_x + \beta\varphi') \\ A_y = A'_y \,, \quad A_z = A'_z \end{cases}$$

Nel sistema in cui la carica è in quiete si ha $\varphi' = e/R'$ ed $\vec{A}' = 0$. Pertanto:

$$\varphi = \gamma\varphi' = \frac{e\gamma}{R'} = \frac{e}{R^*}$$

$$A_x = \gamma\beta\varphi' = \frac{e\gamma\beta}{R'} = \frac{e\beta}{R^*}$$

$$A_y = A_z = 0$$

ossia

$$\boxed{\varphi = \frac{e}{R^*}} \,, \quad \boxed{\vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{R^*}} \qquad (*)$$

- A partire dalle espressioni per i potenziali è possibile riottenere i risultati visti per i campi elettrico e magnetico. A tale scopo è utile osservare in primo luogo che i potenziali dipendono da x e t solo mediante la combinazione $\xi = x - vt$ che entra in R^*. Si ha pertanto:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\ , \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} = -v\frac{\partial}{\partial \xi}$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial x}$$

Allora, ricordando che $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi$, troviamo:

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \beta\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e\beta^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^*}\right) - e\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^*}\right) =$$

$$= -e(1-\beta^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{[(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{1/2}}\right) =$$

$$= e(1-\beta^2)\ \frac{x-vt}{(R^*)^3}$$

$$E_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -e\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R^*}\right) = e(1-\beta^2)\frac{y}{R^{*3}}$$

$$E_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -e\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R^*}\right) = e(1-\beta^2)\frac{z}{R^{*3}}$$

che coincidono con quanto ottenuto precedentemente.

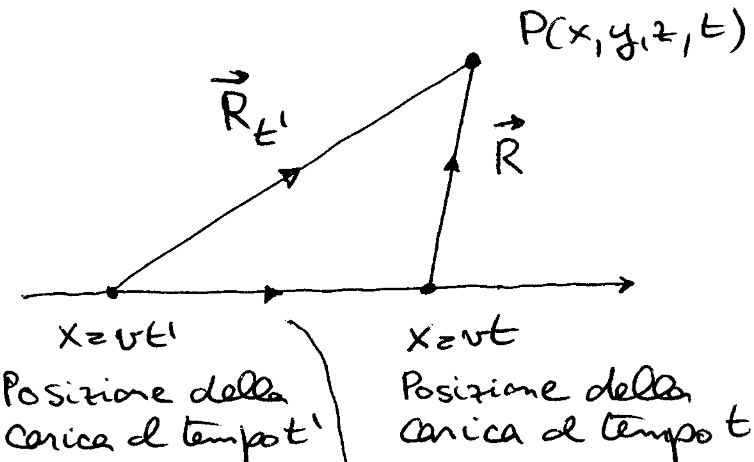
- Per quanto riguarda il campo magnetico si ha:

$$B^i = (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})^i = \varepsilon^{ijk}\nabla^j A^k = \varepsilon^{ijk}\nabla^j(\varphi\beta^k) =$$

$$= \varepsilon^{ijk}(\nabla^j\varphi)\beta^k = -\varepsilon^{ijk}E^j\beta^k = (\vec{\beta}\wedge\vec{E})^i$$

ossia di nuovo $\quad \vec{B} = \vec{\beta}\wedge\vec{E}$

- le espressioni ottenute per i potenziali possono essere scritte in una forma più generale, i cosiddetti potenziali di <u>Lienard - Wiechert</u>, partendo dalla seguente considerazione fisica. Poiché l'interazione elettromagnetica si propaga con velocità finita c, i campi osservati in un certo punto dello spazio (x, y, t) al tempo t sono quelli generati dalla carica in moto non allo stesso istante di tempo t ma ad un tempo precedente t', per il quale il tempo di propagazione del segnale luminoso dal punto di emissione fino al punto di osservazione coincide precisamente con la differenza $t - t'$.



$$\boxed{t = t' + \frac{R_{t'}}{c}}$$

$$\vec{v}(t-t') = \vec{v}\,\frac{R_{t'}}{c} = \vec{\beta} R_{t'}$$

Si ha evidentemente: $\boxed{\vec{R} = \vec{R}_{t'} - \vec{\beta} R_{t'}}$. $(\bullet)$

Esprimiamo allora i potenziali $(\star)$ non in termini di R^*, che è definito in termini della posizione della carica al tempo t, ma in termini di $R_{t'}$.

L'eq. (□) ci dice che

$$R^{*2} = (1-\beta^2)R^2 + (\vec{\beta}\cdot\vec{R})^2$$

Dalla (∘) abbiamo poi:

- $R^2 = (\vec{R}_{t'} - \vec{\beta}R_{t'})^2 = R_{t'}^2 + \beta^2 R_{t'}^2 - 2R_{t'}(\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'}) =$
  $= (1+\beta^2)R_{t'}^2 - 2R_{t'}(\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'})$
- $(\vec{\beta}\cdot\vec{R})^2 = (\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'} - \beta^2 R_{t'})^2 = (\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'})^2 + \beta^4 R_{t'}^2 - 2\beta^2 R_{t'}(\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'})$

Si ha allora

$$R^{*2} = (1-\cancel{\beta^4})R_{t'}^2 - 2(1-\cancel{\beta^2})R_{t'}(\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'}) + (\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'})^2 + \cancel{\beta^4 R_{t'}^2} - \cancel{2\beta^2 R_{t'}(\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'})} =$$

$$= R_{t'}^2 - 2R_{t'}(\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'}) + (\vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'})^2 = (R_{t'} - \vec{\beta}\cdot\vec{R}_{t'})^2$$

Sostituendo questo risultato nelle espressioni (★) dei potenziali si ottiene:

$$\boxed{\varphi = \frac{e}{\left(R_{t'} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}_{t'}}{c}\right)}} \qquad \boxed{\vec{A} = \frac{e\vec{v}}{c\left(R_{t'} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}_{t'}}{c}\right)}}$$

Questi sono i cosiddetti <u>potenziali di Lienard e Wiechert</u> e le espressioni così ottenute hanno validità generale per una carica in moto con velocità arbitraria, non necessariamente costante nel tempo.