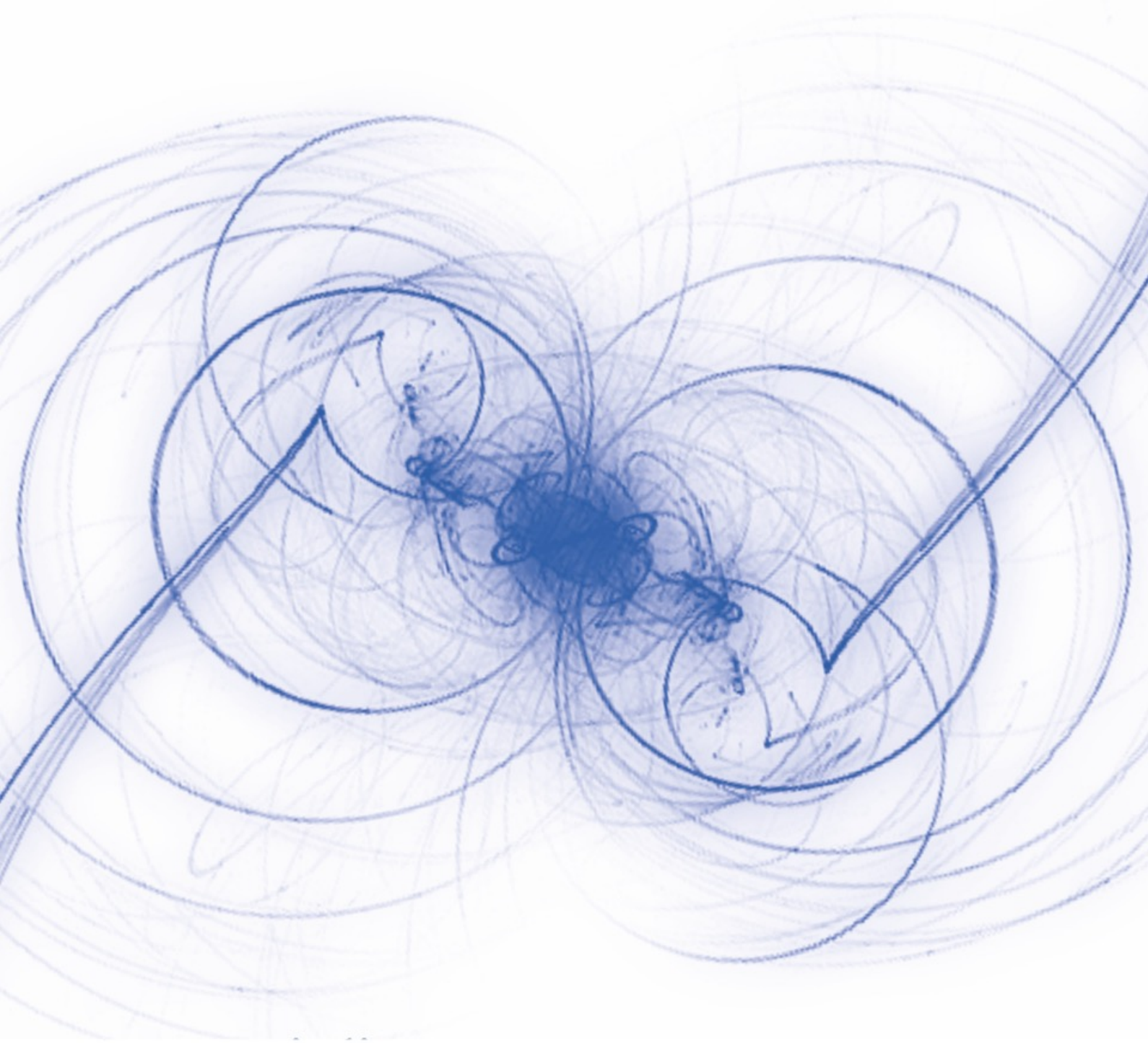


Vittorio Lubicz



Appunti di
Meccanica Quantistica
- Entanglement -

Indice

20 Entanglement, stati misti e matrice densità	1
20.1 Sistemi composti, stati prodotto e stati entangled	1
20.2 Entanglement e stati misti	4
20.3 Matrice densità	8
20.4 Autovalori della matrice densità, stati puri e stati misti	11
20.4.1 Matrici densità per una particella di spin $1/2$	14
20.5 Stati entangled e matrici densità ridotte	17
20.5.1 Matrici densità e matrici densità ridotte per stati entangled di due particelle di spin $1/2$	20
20.6 Matrice densità ed ensemble statistici	25
20.7 Entropia quantistica ed entropia di entanglement	27
20.8 Entanglement e correlazioni quantistiche	30
21 Entanglement e realismo locale: EPR, Bell e il problema della misura	34
21.1 L'esperimento di Einstein, Podolsky e Rosen	34
21.2 Le disuguaglianze di Bell	37
21.3 Entanglement a tre particelle, stati GHZ e realismo locale	42
21.4 Teorema di non clonazione e teletrasporto quantistico	45
21.4.1 Il teorema di non clonazione	45
21.4.2 Il teletrasporto quantistico	46
21.5 Il problema della misura	49

Capitolo 20 | Entanglement, stati misti e matrice densità

Nei capitoli precedenti abbiamo sviluppato il formalismo della meccanica quantistica e ne abbiamo illustrato le principali applicazioni ai sistemi di una e più particelle. Disponiamo ora di tutti gli strumenti necessari per affrontare uno degli aspetti più caratteristici della teoria: l'entanglement.

L'entanglement è una proprietà dei sistemi composti che non trova alcun analogo nella fisica classica e che distingue profondamente la meccanica quantistica da ogni teoria classica della natura. La sua comprensione richiede gli strumenti sviluppati nei capitoli precedenti: il formalismo degli spazi di Hilbert, gli operatori, la teoria della misura e la composizione dei sistemi quantistici.

In questo capitolo introdurremo il concetto di entanglement, gli stati misti e il formalismo della matrice densità, che costituisce lo strumento matematico naturale per descrivere i sottosistemi di un sistema entangled.

20.1 Sistemi composti, stati prodotto e stati entangled

Consideriamo un **sistema composto da due sottosistemi, A e B** , ad esempio un sistema costituito da due particelle. Come è consuetudine, ci riferiremo al sottosistema A come al sistema di *Alice* e al sottosistema B come al sistema di *Bob*. Possiamo interpretare Alice e Bob come due osservatori che effettuano ciascuno misure sul proprio sottosistema.

Indichiamo con $\mathcal{S}_A$ ed $\mathcal{S}_B$ gli spazi vettoriali degli stati dei sistemi di Alice e Bob e con N_A e N_B le loro dimensioni. Indichiamo poi con $|a\rangle, |a'\rangle, \dots$ una base di stati di $\mathcal{S}_A$. Un generico stato $|\varphi_A\rangle$ del sistema di Alice può allora essere scritto nella forma

$$|\varphi_A\rangle = \sum_a \varphi_a |a\rangle, \quad \text{con} \quad \varphi_a = \langle a | \varphi_A \rangle, \quad (20.1)$$

dove la sommatoria è estesa agli N_A stati di base di Alice. Analogamente, un generico stato $|\chi_B\rangle$ del sistema di Bob può essere scritto come

$$|\chi_B\rangle = \sum_b \chi_b |b\rangle, \quad \text{con} \quad \chi_b = \langle b | \chi_B \rangle, \quad (20.2)$$

dove $|b\rangle, |b'\rangle, \dots$ rappresentano una base di stati per il sistema di Bob e la sommatoria è estesa agli N_B stati di base.

Consideriamo lo **stato del sistema composto** in cui il sistema di Alice si trova nello stato $|\varphi_A\rangle$ ed il sistema di Bob nello stato $|\chi_B\rangle$. Formalmente, questo stato è rappresentato dal **prodotto tensoriale** $|\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle$ dei vettori di stato di Alice e di Bob, ed appartiene allo spazio vettoriale $\mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_B$ del sistema composto. La dimensione di $\mathcal{S}_{AB}$ è pari al prodotto $N_A \cdot N_B$ delle dimensioni di $\mathcal{S}_A$ ed $\mathcal{S}_B$. Seguendo la notazione già adottata nei capitoli precedenti, nel seguito, laddove non vi siano ambiguità, indicheremo il prodotto tensoriale degli stati come $|\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle$ più semplicemente con il simbolo $|\varphi_A\rangle |\chi_B\rangle$ o anche $|\varphi_A \chi_B\rangle$.

Dalle eq. (20.1) e (20.2) segue che lo stato $|\varphi_A \chi_B\rangle$ è espresso da

$$|\varphi_A \chi_B\rangle = \left(\sum_a \varphi_a |a\rangle \right) \left(\sum_b \chi_b |b\rangle \right) = \sum_{ab} \varphi_a \chi_b |ab\rangle \quad , \quad (20.3)$$

dove dunque gli stati $|ab\rangle \equiv |a\rangle|b\rangle$ rappresentano una base nello spazio $\mathcal{S}_{AB}$ del sistema composto.

Uno stato come $|\varphi_A \chi_B\rangle$ di eq. (20.3), in cui il sistema di Alice si trova nello stato $|\varphi_A\rangle$ ed il sistema di Bob nello stato $|\chi_B\rangle$, è detto **stato prodotto** o anche **stato separabile**.

Un generico **stato** $|\psi_{AB}\rangle$ **del sistema composto** ha tuttavia la forma

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{ab} \psi_{ab} |ab\rangle \quad , \quad \text{con} \quad \psi_{ab} = \langle ab | \psi \rangle \quad , \quad (20.4)$$

dove gli $N_A \cdot N_B$ coefficienti ψ_{ab} non sono esprimibili, in generale, come prodotto di coefficienti $\varphi_a \chi_b$ come in eq. (20.3).

Il fatto che gli stati separabili (20.3) rappresentino solo un sottoinsieme degli stati (20.4) del sistema composto è evidente già da un conteggio dei parametri indipendenti. Gli $N_A N_B$ coefficienti complessi ψ_{ab} di eq. (20.4) dipendono infatti da $(2N_A N_B - 2)$ parametri reali indipendenti, dove il termine -2 tiene conto del fatto che i coefficienti sono soggetti alla condizione di normalizzazione, $\sum_{ab} |\psi_{ab}|^2 = 1$, e che una fase moltiplicativa nel vettore di stato $|\psi_{AB}\rangle$ può essere scelta in modo arbitrario. Allo stesso modo, troviamo che i coefficienti che definiscono lo stato separabile di eq. (20.3) dipendono invece da $(2N_A - 2) + (2N_B - 2)$ parametri reali, che definiscono i coefficienti complessi φ_a e χ_b . Si verifica facilmente che il numero di parametri reali indipendenti che definiscono uno stato separabile (20.3) è minore di quello necessario a definire uno stato generico (20.4). La differenza vale infatti

$$\begin{aligned} (2N_A N_B - 2) - [(2N_A - 2) + (2N_B - 2)] &= 2(N_A N_B - N_A - N_B + 1) = \\ &= 2(N_A - 1)(N_B - 1) > 0 \end{aligned} \quad (20.5)$$

Dunque, **lo spazio degli stati del sistema composto è più ricco dell'insieme dei soli stati prodotto, che possono essere preparati indipendentemente da Alice e Bob**. Lo spazio degli stati include anche stati non separabili, ossia stati del sistema composto che non sono esprimibili come prodotto degli stati $|\varphi_A\rangle$ e $|\chi_B\rangle$ di Alice e Bob. Questi stati sono detti **stati entangled** e il fenomeno che rappresentano è chiamato **entanglement**. Come vedremo, un sistema in uno stato entangled ha proprietà puramente quantistiche, profondamente diverse da quelle di un sistema classico. L'entanglement, inoltre, non è una caratteristica che uno stato possiede oppure no: **alcuni stati sono infatti più entangled di altri**.

Come semplice esempio di sistema composto, consideriamo un sistema costituito da **due particelle di spin $1/2$** , che assumiamo essere in possesso una di Alice e l'altra di Bob. Un generico stato $|\varphi_A\rangle$ della particella di Alice può essere scritto nella forma

$$|\varphi_A\rangle = \varphi_1 |+\rangle + \varphi_2 |-\rangle , \quad (20.6)$$

dove $|+\rangle$ e $|-\rangle$ rappresentano gli autostati di S_z corrispondenti rispettivamente ad autovalori $\pm\hbar/2$, e φ_1, φ_2 sono due coefficienti complessi. Analogamente, uno stato $|\chi_B\rangle$ della particella di Bob è esprimibile come

$$|\chi_B\rangle = \chi_1 |+\rangle + \chi_2 |-\rangle . \quad (20.7)$$

Lo **stato prodotto** $|\varphi_A \chi_B\rangle$ del sistema composto dalle due particelle di Alice e Bob è allora dato da

$$\begin{aligned} |\varphi_A \chi_B\rangle &= (\varphi_1 |+\rangle + \varphi_2 |-\rangle) (\chi_1 |+\rangle + \chi_2 |-\rangle) = \\ &= \varphi_1 \chi_1 |++\rangle + \varphi_1 \chi_2 |+-\rangle + \varphi_2 \chi_1 |-+\rangle + \varphi_2 \chi_2 |--\rangle , \end{aligned} \quad (20.8)$$

in accordo con l'eq. (20.3). Tuttavia, un **generico stato** $|\psi_{AB}\rangle$ delle due particelle ha la forma di eq. (20.4):

$$\boxed{|\psi_{AB}\rangle = \psi_{11} |++\rangle + \psi_{12} |+-\rangle + \psi_{21} |-+\rangle + \psi_{22} |--\rangle} . \quad (20.9)$$

Il confronto tra le eq. (20.8) e (20.9) mostra esplicitamente la **condizione** che deve essere soddisfatta affinché **lo stato $|\psi_{AB}\rangle$ sia esprimibile come prodotto di stati di singola particella**: i coefficienti ψ_{ab} devono soddisfare

$$\boxed{\psi_{11} \psi_{22} = \psi_{12} \psi_{21}} \quad \text{Stato separabile .} \quad (20.10)$$

Viceversa, se la condizione (20.10) non è soddisfatta, ossia se i coefficienti ψ_{ab} soddisfano

$$\boxed{\psi_{11} \psi_{22} \neq \psi_{12} \psi_{21}} \quad \text{Stato entangled} \quad (20.11)$$

allora lo stato $|\psi_{AB}\rangle$ di eq. (20.9) è uno stato entangled.

Per il sistema di due particelle di spin $1/2$ qui considerato, esempi di **stati entangled** sono i cosiddetti quattro **stati di Bell**,

$$\begin{cases} |\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle \pm |--\rangle) \\ |\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle \pm |-+\rangle), \end{cases} \quad (20.12)$$

che, come è immediato verificare, soddisfano la condizione (20.11).¹ Viceversa, per lo stato ad esempio

$$|\psi_{sep}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |-+\rangle), \quad (20.13)$$

risulta verificata la condizione (20.10) e questo stato rappresenta dunque un esempio di stato separabile. Si riconosce infatti facilmente che

$$|\psi_{sep}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \otimes |+\rangle, \quad (20.14)$$

e rappresenta dunque il prodotto dello stato $|\varphi_A\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ della particella di Alice per lo stato $|\chi_B\rangle = |+\rangle$ della particella di Bob.

20.2 Entanglement e stati misti

Discutiamo ora una caratteristica generale e molto peculiare dell'entanglement, relativa allo stato dei sottosistemi del sistema composto. Per illustrarla, riferiamoci ancora ai sistemi di particelle di spin $1/2$.

Consideriamo una particella di spin $1/2$ che si trovi nel generico stato $|\varphi_A\rangle$ di eq. (20.6), e calcoliamo i valori medi delle tre componenti dello spin. Per semplicità, ci riferiremo sempre nel seguito di questo capitolo agli operatori di spin $1/2$ in unità di $\hbar/2$, ossia $\vec{\sigma} = \vec{S}/(\hbar/2)$. Utilizzando la rappresentazione matriciale, troviamo:

$$\begin{aligned} \langle\sigma_x\rangle &= \langle\varphi_A|\sigma_x|\varphi_A\rangle = \begin{pmatrix} \varphi_1^* & \varphi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \varphi_1^*\varphi_2 + \varphi_2^*\varphi_1 = 2\operatorname{Re}(\varphi_1^*\varphi_2), \\ \langle\sigma_y\rangle &= \langle\varphi_A|\sigma_y|\varphi_A\rangle = \begin{pmatrix} \varphi_1^* & \varphi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = -i(\varphi_1^*\varphi_2 - \varphi_2^*\varphi_1) = 2\operatorname{Im}(\varphi_1^*\varphi_2), \\ \langle\sigma_z\rangle &= \langle\varphi_A|\sigma_z|\varphi_A\rangle = \begin{pmatrix} \varphi_1^* & \varphi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2. \end{aligned} \quad (20.15)$$

¹Riconosciamo come lo stato di Bell $|\psi_{-}\rangle$ sia lo stato di singoletto, con spin totale $s = 0$ e $\sigma_z = 0$, lo stato $|\psi_{+}\rangle$ sia lo stato di tripletto con $s = 1$ e $\sigma_z = 0$, mentre i due stati $|\phi_{\pm}\rangle$ siano due combinazioni lineari degli stati di tripletto con $s = 1$ e $\sigma_z = \pm 1$.

È semplice mostrare che questi valori medi non possono essere simultaneamente tutti nulli. Calcolando infatti la somma dei quadrati dei tre valori medi si ottiene

$$\begin{aligned}\langle\sigma_x\rangle^2 + \langle\sigma_y\rangle^2 + \langle\sigma_z\rangle^2 &= 4\operatorname{Re}(\varphi_1^*\varphi_2)^2 + 4\operatorname{Im}(\varphi_1^*\varphi_2)^2 + (|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2)^2 = \\ &= 4|\varphi_1^*\varphi_2|^2 + |\varphi_1|^4 + |\varphi_2|^4 - 2|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2 = (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)^2,\end{aligned}\quad (20.16)$$

ossia, per la condizione di normalizzazione dei coefficienti φ_1 e φ_2 ,

$$\boxed{\langle\sigma_x\rangle^2 + \langle\sigma_y\rangle^2 + \langle\sigma_z\rangle^2 = 1} \quad . \quad (20.17)$$

Essendo lo stato $|\varphi_A\rangle$ arbitrario, questo risultato vale in generale e mostra che **per una particella di spin 1/2, in qualunque stato, i valori medi delle tre componenti dello spin non possono essere tutti nulli.**

Consideriamo ora un sistema costituito da due particelle di spin 1/2, le particelle di Alice e Bob. È evidente che se le particelle si trovano in uno **stato prodotto**, del tipo $|\varphi_A \chi_B\rangle$, la condizione (20.17) continua ad essere valida per i valori medi degli spin $\vec{\sigma}_A$ e $\vec{\sigma}_B$ delle due particelle. Nello stato prodotto, infatti, per la particella di Alice che si trova nello stato $|\varphi_A\rangle$ valgono esattamente gli stessi risultati di eq. (20.15), e di conseguenza anche l'eq. (20.17). Alla stessa conclusione si giunge poi anche per la particella di Bob nello stato $|\chi_B\rangle$.

Consideriamo invece il caso in cui le due particelle di spin 1/2 si trovino in uno **stato entangled**, ad esempio nello stato di Bell $|\phi_+\rangle$ di eq. (20.12), e determiniamo in questo stato i tre valori medi $\langle\sigma_x^A\rangle$, $\langle\sigma_y^A\rangle$, $\langle\sigma_z^A\rangle$ dello spin della particella di Alice. Considerando nel calcolo che un operatore quale σ_i^A ($i = x, y, z$), relativo ad un'osservabile della sola particella di Alice, applicato ad uno stato prodotto agisce solo sullo stato di Alice², si trova

$$\begin{aligned}\langle\sigma_i^A\rangle &= \langle\phi_+|\sigma_i^A|\phi_+\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle++| + \langle--| \right) \sigma_i^A \left(|++\rangle + |--\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle+|\sigma_i^A|+\rangle \langle++\rangle + \langle+|\sigma_i^A|-\rangle \langle+-\rangle + \langle-|\sigma_i^A|+\rangle \langle-+\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle-|\sigma_i^A|-\rangle \langle--\rangle \right) = \frac{1}{2} \left(\langle+|\sigma_i^A|+\rangle + \langle-|\sigma_i^A|-\rangle \right).\end{aligned}\quad (20.18)$$

Poichè la somma dei due elementi diagonali che compare nell'eq. (20.18) coincide con la traccia della matrice di Pauli σ_i , che è nulla per tutte le matrici di Pauli, dall'eq. (20.18) si ottiene, per i **tre valori medi nello stato entangled**,

$$\boxed{\langle\sigma_x^A\rangle = 0, \quad \langle\sigma_y^A\rangle = 0, \quad \langle\sigma_z^A\rangle = 0} \quad . \quad (20.19)$$

²Formalmente, nello spazio $\mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_B$ degli stati di Alice e Bob, una generica osservabile L^A relativa alla particella di Alice è rappresentata dall'operatore prodotto $L^A \otimes I$, dove l'operatore L^A agisce sugli stati di Alice e l'operatore identità sugli stati di Bob.

Il risultato di eq. (20.19) può risultare sorprendente. In primo luogo, esso viola la condizione (20.17) che, come abbiamo visto, vale per una particella di spin $1/2$ *in qualunque stato*. Inoltre, se i valori medi di tutte e tre le componenti di spin σ_x^A , σ_y^A e σ_z^A sono nulli, allora **lo stesso risultato vale anche per qualunque componente di spin $\sigma_{\hat{n}}^A$** nella direzione di un generico versore $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Si ha infatti:

$$\langle \sigma_{\hat{n}}^A \rangle = \langle \vec{\sigma}^A \cdot \hat{n} \rangle = n_x \langle \sigma_x^A \rangle + n_y \langle \sigma_y^A \rangle + n_z \langle \sigma_z^A \rangle = 0 \quad . \quad (20.20)$$

Poichè una misura di spin per la particella di spin $1/2$ può solo produrre uno dei due risultati $\sigma = \pm 1$, l'eq. (20.20) implica che, **per la particella di Alice nello stato entangled $|\phi_+\rangle$, una misura dello spin in una qualunque direzione produce uno dei due possibili risultati sempre con uguale probabilità $1/2$** . In altri termini, **il risultato di una qualunque misura di spin della particella di Alice nello stato entangled è completamente indeterminato**. Come è semplice verificare, **lo stesso risultato vale naturalmente anche per la particella di Bob**.

Il fatto che l'eq. (20.19), ottenuta per una particella nello stato entangled, violi la condizione (20.17), che vale invece per una particella di spin $1/2$ *in qualunque stato*, indica che una particella che è parte di un sistema entangled si trova in un nuovo tipo di stato, diverso da quelli che abbiamo sinora considerato. Questo nuovo tipo di stato è chiamato **stato misto**.

Per comprendere le proprietà di uno stato misto, consideriamo nuovamente l'eq. (20.18). Osserviamo che la derivazione di tale equazione non dipende dall'operatore σ_i^A considerato. Ne segue, pertanto, che la stessa equazione (20.18) vale per qualunque osservabile relativa alla particella di Alice nello stato entangled $|\phi_+\rangle$, ossia il valore medio di una generica osservabile L per la particella è determinato dall'espressione

$$\langle L \rangle = \frac{1}{2} \langle + | L | + \rangle + \frac{1}{2} \langle - | L | - \rangle . \quad (20.21)$$

È semplice realizzare che questo risultato è quello che ci si aspetta per il valore medio di una qualunque osservabile quando **l'unica informazione** che si possiede sulla particella è che questa si trova con probabilità $1/2$ nello stato $|+\rangle$ e con probabilità $1/2$ nello stato $|-\rangle$ ³.

Più in generale, consideriamo **un sistema fisico per il quale sappiamo soltanto che si trova con probabilità w_1 nello stato $|\phi_1\rangle$, con probabilità**

³È importante osservare che il risultato di eq. (20.21) per il valore medio di L è diverso da quello che si otterrebbe se la particella si trovasse ad esempio nello stato

$$|\varphi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle , \quad (20.22)$$

per il quale la probabilità di trovare la particella negli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ è pure uguale a $1/2$, come si può verificare esplicitamente calcolando il valore medio di L nello stato (20.22) e confrontando il risultato con quello di eq. (20.21).

w_2 nello stato $|\phi_2\rangle$, ecc. Gli stati $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$ per il resto sono arbitrari, ossia non devono necessariamente essere ortogonali tra loro e il loro numero non è fissato a priori. Le probabilità w_i sono invece, naturalmente, soggette alla condizione di normalizzazione

$$\boxed{\sum_i w_i = 1} . \quad (20.23)$$

Nella situazione considerata, si dice che il sistema si trova in uno **stato misto**. Uno stato misto si differenzia dunque da uno **stato puro** $|\varphi\rangle$, per il quale possiamo invece pensare che le probabilità w_i sono tutte nulle ad eccezione di un'unica probabilità che vale $w_\varphi = 1$. **Mentre**, come sappiamo, in meccanica quantistica **uno stato puro fornisce la massima conoscenza che è possibile avere sullo stato di un sistema, per uno stato misto la conoscenza che abbiamo del sistema è evidentemente ridotta**.

Discutiamo la determinazione del valore medio di una generica osservabile L in uno stato misto. Poichè in questo stato il sistema si trova, per ipotesi, con probabilità w_i in ciascuno degli stati $|\phi_i\rangle$, ed in ciascuno di questi stati il valore medio di L è determinato dal valore di aspettazione $\langle\phi_i| L |\phi_i\rangle$, ne segue che il **valore medio delle misure nello stato misto** è determinato dalla media pesata

$$\boxed{\langle L \rangle = \sum_i w_i \langle\phi_i| L |\phi_i\rangle} . \quad (20.24)$$

L'eq. (20.21), che abbiamo derivato per un'osservabile della particella di Alice nello stato entangled $|\phi_+\rangle$, rappresenta appunto un caso particolare dell'eq. (20.24), con $|\phi_1\rangle = |+\rangle$, $|\phi_2\rangle = |-\rangle$ e $w_1 = w_2 = 1/2$.

Quanto abbiamo appena dedotto per le due particelle di spin 1/2 nello stato entangled rappresenta una caratteristica generale dell'entanglement. Ossia, **i sottosistemi in uno stato entangled sono descritti da stati misti, e la conoscenza che se ne possiede è dunque ridotta**. Questo fenomeno non ha analogo in fisica classica, dove invece la conoscenza completa dello stato di un sistema composto implica sempre anche una conoscenza completa dei sottosistemi che lo costituiscono. In uno stato entangled, invece, sebbene il sistema composto si trovi in uno stato puro e, come per tutti gli stati puri della meccanica quantistica, ne possediamo una conoscenza completa, i sottosistemi sono tuttavia indeterminati. In particolare, **in uno stato massimamente entangled**, come risulta essere ad esempio lo stato $|\phi_+\rangle$ che abbiamo considerato, **i sottosistemi sono descritti da stati massimamente misti e sono completamente indeterminati, ossia su questi non si conosce nulla**. Questo è precisamente quanto espresso dall'eq. (20.20).

20.3 Matrice densità

Nella trattazione dell'entanglement e degli stati misti in meccanica quantistica risulta particolarmente utile avvalersi di un nuovo strumento matematico, un operatore chiamato **matrice densità**. Come vedremo, questo formalismo consente anche di definire, tramite l'entropia quantistica, una **misura quantitativa dell'entanglement**, ossia di quanto è entangled uno stato.

Per arrivare alla definizione della matrice densità, consideriamo un sistema che si trovi in uno stato misto, definito dunque da certi stati $|\phi_i\rangle$ e relative probabilità w_i , e utilizziamo l'eq. (20.24), che esprime il valore medio di una generica osservabile L in questo stato. Possiamo riscrivere questo valore medio considerando un insieme di stati di base $|a\rangle, |a'\rangle, \dots$ per il sistema considerato ed utilizzando due volte in eq. (20.24) la relazione di completezza:

$$\langle L \rangle = \sum_{a, a'} \sum_i w_i \langle \phi_i | a \rangle \langle a | L | a' \rangle \langle a' | \phi_i \rangle = \sum_{a, a'} \langle a' | \left(\sum_i w_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \right) | a \rangle \langle a | L | a' \rangle. \quad (20.25)$$

Questa equazione è particolarmente utile. Mostra infatti che **tutta l'informazione sullo stato misto del sistema è contenuta negli elementi di matrice dell'operatore**

$$\boxed{\rho = \sum_i w_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|}, \quad (20.26)$$

che è chiamato **matrice densità**⁴. In termini della matrice densità, l'eq. (20.25) si scrive dunque

$$\langle L \rangle = \sum_{a, a'} \langle a' | \rho | a \rangle \langle a | L | a' \rangle = \sum_{a'} \langle a' | \rho L | a' \rangle, \quad (20.27)$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{\langle L \rangle = \text{Tr}(\rho L)}, \quad (20.28)$$

dove Tr indica l'operazione di traccia (ossia, nella rappresentazione matriciale, la somma degli elementi diagonali della matrice). L'eq. (20.28) indica dunque che **in uno stato misto il valore medio delle misure di una qualunque osservabile L può essere calcolato come la traccia del prodotto della matrice densità ρ con l'operatore L** . Osserviamo anche che, essendo la traccia di una matrice indipendente dalla scelta degli stati di base, anche il valore medio determinato dall'eq. (20.28) è indipendente, come deve essere, dalla base scelta.

È semplice realizzare che l'eq. (20.28) vale anche per il calcolo del valore medio di una generica osservabile L in uno stato puro. Questo è evidente già dal fatto che

⁴Seppure con una denominazione un po' imprecisa, si usa infatti riferirsi con il nome di *matrice densità* sia all'operatore di eq. (20.26) che alla sua matrice rappresentativa in una data base

uno stato puro $|\varphi\rangle$ può essere sempre pensato come caso particolare di uno stato misto, per il quale una delle probabilità è $w_\varphi = 1$ e tutte le altre probabilità sono nulle.

Dall'eq. (20.26), segue che per uno **stato puro** $|\varphi\rangle$ la **matrice densità** è semplicemente espressa dal prodotto esterno

$$\boxed{\boxed{\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|}} . \quad (20.29)$$

Questo operatore è un **proiettore**, ossia soddisfa l'equazione

$$\boxed{\rho^2 = \rho} , \quad (20.30)$$

come si può verificare esplicitamente con un calcolo diretto:

$$\rho^2 = (|\varphi\rangle\langle\varphi|)^2 = |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \rho . \quad (20.31)$$

È importante osservare che, **per uno stato puro, la matrice densità contiene esattamente la stessa informazione del corrispondente vettore di stato**. La conoscenza della matrice densità implica infatti quella del vettore di stato e viceversa. Noto il vettore di stato $|\varphi\rangle$, infatti, l'eq. (20.29) determina la corrispondente matrice densità ρ . D'altra parte, nota la matrice densità ρ è semplice determinare il vettore di stato $|\varphi\rangle$. È sufficiente infatti applicare ρ ad un qualunque vettore di stato $|\alpha\rangle$ non ortogonale allo stato $|\varphi\rangle$ per ottenere lo stato $|\varphi\rangle$ stesso, a meno di un fattore di normalizzazione facilmente calcolabile:

$$\rho|\alpha\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|\alpha\rangle = c_\alpha|\varphi\rangle . \quad (20.32)$$

Dunque, **per uno stato puro, la descrizione mediante la matrice densità è completamente equivalente a quella mediante il vettore di stato**. Il formalismo della matrice densità, tuttavia, si applica tanto ai sistemi che si trovano in stati puri quanto ai sistemi descritti da stati misti.

Dimostriamo **tre importanti proprietà** della matrice densità:

$$\boxed{\boxed{\begin{aligned} &\bullet \rho^+ = \rho \\ &\bullet \text{Tr } \rho = 1 \\ &\bullet 0 \leq \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \leq 1 , \quad \text{per ogni } |\alpha\rangle \end{aligned}}} . \quad (20.33)$$

La prima delle eq. (20.33) afferma che **la matrice densità è un operatore hermitiano**. Per dimostrarlo, osserviamo in primo luogo che per un generico prodotto esterno vale

$$\boxed{\left(|\alpha\rangle\langle\beta|\right)^+ = |\beta\rangle\langle\alpha|} . \quad (20.34)$$

Infatti, data una generica coppia di stati $\langle\varphi|$ e $|\chi\rangle$, si ha

$$\langle\varphi|(|\alpha\rangle\langle\beta|)^+|\chi\rangle = \langle\chi|(|\alpha\rangle\langle\beta|)|\varphi\rangle^* = \langle\chi|\alpha\rangle^* \langle\beta|\varphi\rangle^* = \langle\varphi|\beta\rangle \langle\alpha|\chi\rangle = \langle\varphi|(|\beta\rangle\langle\alpha|)|\chi\rangle \quad (20.35)$$

da cui, per l'arbitrarietà degli stati esterni $\langle\varphi|$ e $|\chi\rangle$, segue l'eq. (20.34). L'hermitianità di ρ segue allora dalla definizione stessa (20.26) della matrice densità e dal fatto che le probabilità w_i sono reali e, per l'eq. (20.34), gli operatori $|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ sono hermitiani.

Per verificare la seconda delle proprietà (20.33), dimostriamo preliminarmente la seguente relazione che vale in generale per la traccia di un prodotto esterno di vettori di stato, e che ci tornerà frequentemente utile nel seguito:

$$\boxed{\text{Tr } |\beta\rangle\langle\alpha| = \langle\alpha|\beta\rangle} . \quad (20.36)$$

Considerando infatti un insieme di stati di base $|a\rangle$, si ha:

$$\text{Tr } |\beta\rangle\langle\alpha| = \sum_a \langle a|\beta\rangle \langle\alpha|a\rangle = \sum_a \langle\alpha|a\rangle \langle a|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle , \quad (20.37)$$

che dimostra quanto volevamo. Dall'eq. (20.36) segue anche che un generico proiettore Λ_α sullo stato $|\alpha\rangle$, espresso da

$$\boxed{\Lambda_\alpha \equiv |\alpha\rangle\langle\alpha|} , \quad (20.38)$$

ha traccia unitaria se lo stato $|\alpha\rangle$ è ben normalizzato:

$$\boxed{\text{Tr } |\alpha\rangle\langle\alpha| = \langle\alpha|\alpha\rangle = 1} . \quad (20.39)$$

Possiamo allora dimostrare facilmente la seconda delle proprietà (20.33), che afferma che **la matrice densità ha traccia pari a 1**. Dalle eq. (20.26) ed (20.39) segue infatti:

$$\text{Tr } \rho = \sum_i w_i \text{Tr } |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \sum_i w_i \langle\phi_i|\phi_i\rangle = \sum_i w_i = 1 , \quad (20.40)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla condizione di normalizzazione (20.23) delle probabilità w_i . In particolare, nel caso di uno stato puro $|\varphi\rangle$, la proprietà della matrice densità di avere traccia pari a 1 coincide con la condizione di normalizzazione del vettore di stato: $\text{Tr } \rho = \langle\varphi|\varphi\rangle = 1$. Notiamo anche che l'uguaglianza a 1 della traccia della matrice densità è consistente con l'eq. (20.28), dalla quale, scegliendo come operatore L l'operatore identità, risulta $\text{Tr } \rho = \langle I \rangle = 1$.

La terza proprietà di eq. (20.33) ci dice infine che **il valore di aspettazione della matrice densità su qualunque stato è compreso tra 0 ed 1**. La dimostrazione segue sempre dalla definizione (20.26) della matrice densità. Per ogni

stato $|\alpha\rangle$ si ha infatti:

$$\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \sum_i w_i \langle\alpha|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\alpha\rangle = \sum_i w_i |\langle\phi_i|\alpha\rangle|^2 . \quad (20.41)$$

Poichè tanto le probabilità w_i quanto le probabilità $|\langle\phi_i|\alpha\rangle|^2$ sono numeri reali compresi tra 0 ed 1, dall'eq. (20.41) segue evidentemente $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \geq 0$. Inoltre, si ha pure

$$\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \sum_i w_i |\langle\phi_i|\alpha\rangle|^2 \leq \sum_i w_i = 1 , \quad (20.42)$$

che completa la dimostrazione della terza delle eq. (20.33).

L'eq. (20.41) ci fornisce anche un importante risultato. Poichè w_i rappresenta la probabilità che il sistema si trovi nello stato $|\phi_i\rangle$, e $|\langle\phi_i|\alpha\rangle|^2$ è la probabilità che lo stato $|\phi_i\rangle$ venga a trovarsi nello stato $|\alpha\rangle$, l'eq. (20.41) mostra che **il valore di aspettazione della matrice densità nel generico stato $|\alpha\rangle$ coincide con la probabilità $P(\alpha)$ che il sistema si trovi in questo stato.** Utilizzando anche l'eq. (20.39), si ha cioè:

$$P(\alpha) = \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \text{Tr}(\rho|\alpha\rangle\langle\alpha|) = \text{Tr}(\rho\Lambda_\alpha) \quad , \quad (20.43)$$

dove Λ_α è il proiettore sullo stato $|\alpha\rangle$. Vediamo anche, dunque, che **la probabilità che il sistema si trovi nello stato $|\alpha\rangle$ è data dalla traccia della matrice densità ρ del sistema moltiplicata per il proiettore Λ_α sullo stato considerato.** Risulta dunque anche evidente perchè i valori di aspettazione $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$ assumano solo valori compresi tra 0 ed 1.

Possiamo affermare che le eq. (20.28) e (20.43), che esprimono rispettivamente il valore medio di un'osservabile e la probabilità di una determinata misura in termini della matrice densità, rappresentano, nel formalismo della matrice densità, le equazioni fondamentali.

20.4 Autovalori della matrice densità, stati puri e stati misti

Consideriamo gli **autostati** $|\psi_n\rangle$ e gli **autovalori** p_n della matrice densità, definiti dunque dalle equazioni

$$\rho|\psi_n\rangle = p_n|\psi_n\rangle . \quad (20.44)$$

Dall'hermitianità di ρ segue che gli autovalori p_n sono reali e gli autostati $|\psi_n\rangle$ costituiscono una base.

Moltiplicando entrambi i membri dell'eq. (20.44) a destra per il bra $\langle\psi_n|$, sommando su tutti gli n ed utilizzando la relazione di completezza si ottiene

$$\boxed{\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|} \quad , \quad (20.45)$$

una rappresentazione che sappiamo vale in generale per qualunque operatore in termini dei suoi autostati e dei suoi autovalori (si veda l'eq. (??)). Confrontando l'eq. (20.45) con l'eq. (20.29) vediamo che, **se gli stati $|\phi_i\rangle$ sono ortogonali tra loro** (condizione che ricordiamo in generale non è richiesta), **allora le due rappresentazioni (20.45) ed (20.29) coincidono**, ossia gli stati $|\phi_i\rangle$ sono anche gli autostati della matrice densità e le probabilità w_i sono i corrispondenti autovalori. Alternativamente, possiamo anche affermare che **la matrice densità ρ di eq. (20.45) rappresenta lo stato misto in cui il sistema si trova con probabilità p_n in ciascuno degli stati $|\psi_n\rangle$** .

Le proprietà (20.33) della matrice densità implicano le seguenti condizioni sui suoi autovalori:

$$\boxed{0 \leq p_n \leq 1} \quad , \quad \boxed{\sum_n p_n = 1} \quad . \quad (20.46)$$

La prima condizione segue infatti dalla terza delle eq. (20.33), e dal fatto che ciascun autovalore può essere espresso come $p_n = \langle\psi_n|\rho|\psi_n\rangle$. La seconda delle eq. (20.46) segue dalla normalizzazione $\sum_n p_n = \text{Tr } \rho = 1$.

Le eq. (20.46) implicano, in particolare, che **se un autovalore della matrice densità è pari a 1, allora tutti gli altri sono 0**. Questo è precisamente il caso della **matrice densità di uno stato puro**, per la quale la sua espressione $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ coincide con la rappresentazione (20.45). **Per uno stato puro**, infatti, **lo stesso stato $|\varphi\rangle$ è anche autostato della matrice densità con autovalore $p_\varphi = 1$, e tutti gli altri autovalori sono nulli**, in accordo con il fatto che il sistema si trova con probabilità pari a 1 nello stato $|\varphi\rangle$.

Se invece gli autovalori della matrice densità sono tutti minori di 1, allora la matrice densità rappresenta uno stato misto, e le eq. (20.46) implicano che ci sono almeno due autovalori diversi da zero. Ossia il sistema si trova con probabilità diversa da zero in più di uno stato.

Dalle eq. (20.46) segue un'altra importante proprietà della matrice densità:

$$\boxed{\text{Tr } \rho^2 \leq 1} \quad . \quad (20.47)$$

Infatti, poichè ciascuno degli autovalori soddisfa $p_n^2 \leq p_n$, si ha

$$\text{Tr } \rho^2 = \sum_n p_n^2 \leq \sum_n p_n = 1 \quad . \quad (20.48)$$

Per uno stato puro, come abbiamo visto, la matrice densità ha un unico autovalore pari a 1 e tutti gli altri nulli e dunque $\text{Tr } \rho^2 = 1$, come segue anche dall'eq. (20.30). Dunque, per uno stato puro si ha

$$\boxed{\rho^2 = \rho} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{Tr } \rho^2 = 1} \quad \text{per uno stato puro.} \quad (20.49)$$

Per uno stato misto, invece, nessuna delle due proprietà (20.49) risulta soddisfatta, ossia si ha sempre

$$\boxed{\rho^2 \neq \rho} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{Tr } \rho^2 < 1} \quad \text{per uno stato misto.} \quad (20.50)$$

Se infatti non si avesse $\text{Tr } \rho^2 < 1$, allora, per l'eq. (20.47), si avrebbe $\text{Tr } \rho^2 = \sum_n p_n^2 = 1$, e dunque la matrice densità dovrebbe avere un autovalore pari a 1 e tutti gli altri nulli. Ma allora, per l'eq. (20.45), la matrice densità coinciderebbe con il proiettore $\rho = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, ossia il sistema si troverebbe nello stato puro $|\psi_k\rangle$, contraddicendo l'ipotesi che lo stato sia misto. D'altra parte, se $\text{Tr } \rho^2 < 1$ allora deve valere necessariamente anche la prima delle eq. (20.50), giacchè si ha sempre $\text{Tr } \rho = 1$. In conclusione, **le due equazioni (20.49) ed (20.50) ci forniscono un modo semplice e diretto per distinguere tra stati puri e stati misti**. In particolare, è sufficiente calcolare la traccia di ρ^2 per discriminare tra le due possibilità.

Le eq. (20.49) ed (20.50) indicano anche che **il valore della traccia di ρ^2 rappresenta una misura quantitativa del grado di mescolamento di uno stato, ossia di quanto lo stato è misto**. Abbiamo visto che il valore massimo $\text{Tr } \rho^2 = 1$ si ottiene per uno stato puro. Il valore minimo si determina invece minimizzando $\text{Tr } \rho^2 = \sum_n p_n^2$ rispetto alle probabilità p_n , con la condizione $\text{Tr } \rho = \sum_n p_n = 1$. Introducendo per questa condizione un moltiplicatore di Lagrange λ , si trova:

$$\frac{\partial}{\partial p_n} [\text{Tr } \rho^2 - \lambda (\text{Tr } \rho - 1)] = \frac{\partial}{\partial p_n} \left[\sum_k p_k^2 - \lambda \left(\sum_k p_k - 1 \right) \right] = 2p_n - \lambda = 0, \quad (20.51)$$

ossia $p_n = \lambda/2$ per ogni n . La condizione $\sum_n p_n = 1$ implica poi

$$\boxed{p_n = \frac{1}{N}} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{Tr } \rho^2 = \frac{1}{N}} \quad (20.52)$$

dove N è la dimensione dello spazio vettoriale. Il **valore minimo di $\text{Tr } \rho^2$** si ottiene quindi quando il sistema si trova con la stessa probabilità (20.52) in uno qualunque degli stati di base $|\psi_n\rangle$, autostati di ρ . In questo caso lo **stato** del sistema è **massimamente misto** e l'informazione che si ha sul sistema è la minima possibile. Dall'eq. (20.45), utilizzando la relazione di completezza, vediamo che **per lo stato massimamente misto la matrice densità è espressa da**

$$\boxed{\rho = \frac{1}{N} \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = \frac{1}{N} I} \quad , \quad (20.53)$$

ossia è proporzionale alla matrice identità. L'eq. (20.43) implica allora che la probabilità che il sistema si trovi in un qualunque stato $|\alpha\rangle$ è data da

$$\boxed{P(\alpha) = \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \frac{1}{N} \langle\alpha|\alpha\rangle = \frac{1}{N}} \quad , \quad (20.54)$$

ossia **nello stato massimamente misto il sistema si trova con la stessa probabilità in un qualunque stato $|\alpha\rangle$** .

È utile anche osservare che, essendo proporzionale alla matrice identità, **la matrice densità dello stato massimamente misto (20.53) ha la stessa rappresentazione qualunque sia la scelta degli stati di base**.

20.4.1 Matrici densità per una particella di spin 1/2

Come applicazione di quanto discusso sinora sulla matrice densità, consideriamo il sistema costituito da una singola particella di spin 1/2.

Consideriamo dapprima il caso in cui la particella si trovi in un generico **stato puro** $|\varphi\rangle$, che scriviamo nella forma

$$|\varphi\rangle = \varphi_1 |+\rangle + \varphi_2 |-\rangle . \quad (20.55)$$

Come abbiamo visto, poichè lo stato è puro, ossia la particella si trova con probabilità $w_\varphi = 1$ in questo stato, la corrispondente matrice densità è data dall'eq. (20.29) e vale quindi

$$\boxed{\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^* & \varphi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\varphi_1|^2 & \varphi_1\varphi_2^* \\ \varphi_1^*\varphi_2 & |\varphi_2|^2 \end{pmatrix}} . \quad (20.56)$$

È evidente che questa matrice è hermitiana ed inoltre, in virtù della condizione di normalizzazione dei coefficienti, si ha

$$\text{Tr } \rho = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = 1 . \quad (20.57)$$

Ad esempio, se lo stato è

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad (20.58)$$

che corrisponde, come è noto, all'autostato di σ_x con autovalore $+1$, ossia se i coefficienti di eq. (20.55) valgono $\varphi_1 = \varphi_2 = 1/\sqrt{2}$, la matrice densità di eq. (20.56) risulta essere

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} . \quad (20.59)$$

Possiamo verificare che questa matrice soddisfa

$$\rho^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \rho, \quad (20.60)$$

e dunque anche

$$\boxed{\text{Tr } \rho^2 = 1} , \quad (20.61)$$

come previsto in eq. (20.49) per uno stato puro.

Utilizziamo l'eq. (20.28) per calcolare, in termini della matrice densità, i valori medi delle componenti di spin della particella. Utilizzando la matrice densità di eq. (20.59) si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= \text{Tr}(\rho \sigma_x) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1, \\ \langle \sigma_y \rangle &= \text{Tr}(\rho \sigma_y) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} (i - i) = 0, \\ \langle \sigma_z \rangle &= \text{Tr}(\rho \sigma_z) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0, \end{aligned} \quad (20.62)$$

in accordo con il fatto che lo stato di eq. (20.58) considerato è autostato di σ_x corrispondente all'autovalore $+1$. Questi valori medi soddisfano evidentemente la condizione (20.17), che, come abbiamo visto, è sempre soddisfatta per una particella di spin $1/2$ in uno stato puro.

Utilizziamo quindi l'eq. (20.43) per calcolare, in termini della matrice densità (20.59), le probabilità che la particella si trovi negli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$, ossia abbia spin σ_z pari rispettivamente a $+1$ e -1 . I proiettori $\Lambda_{\pm}$ su questi stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ sono espressi da

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= |+\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_- &= |-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20.63)$$

Dall'eq. (20.43) si ha allora:

$$\begin{aligned} P(\sigma_z = +1) &= \text{Tr}(\rho \Lambda_+) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} (1 + 0) = \frac{1}{2}, \\ P(\sigma_z = -1) &= \text{Tr}(\rho \Lambda_-) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} (0 + 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (20.64)$$

Consideriamo ora invece la matrice densità per una particella di spin $1/2$ nel caso di uno **stato misto**. Consideriamo ad esempio **lo stato massimamente misto** della particella, in cui questa si trova con uguale probabilità $w_+ = w_- = 1/2$ nello stato $|+\rangle$ e nello stato $|-\rangle$. Come osservato nella sezione (20.3), questo è il caso in particolare di una particella che sia parte dello stato entangled $|\phi_+\rangle$ di eq. (20.12).

La corrispondente matrice densità si ottiene dall'eq. (20.26). Utilizzando anche i risultati (20.63) per i proiettori, si ha

$$\rho = \sum_i w_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \frac{1}{2} |+\rangle\langle+| + \frac{1}{2} |-\rangle\langle-| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20.65)$$

ossia

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I}, \quad (20.66)$$

come previsto in eq. (20.53) per lo stato massimamente misto. Il confronto di questa matrice con quella di eq. (20.59) rende dunque evidente, già di per sé, la differenza tra questo stato misto e lo stato puro di eq. (20.58).

Il calcolo del quadrato ρ^2 della matrice densità (20.66) fornisce

$$\rho^2 = \frac{1}{4} I = \frac{1}{2} \rho, \quad (20.67)$$

e si ha dunque

$$\boxed{\rho^2 \neq \rho} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{Tr } \rho^2 = \frac{1}{2} < 1}, \quad (20.68)$$

in accordo con l'eq. (20.50) valida per uno stato misto e con l'eq. (20.52) valida per lo stato massimamente misto.

Utilizzando l'eq. (20.28), possiamo poi calcolare, per lo stato misto, i valori medi delle componenti di spin. Dalla matrice densità di eq. (20.66) si ottiene

$$\begin{aligned} \langle\sigma_x\rangle &= \text{Tr}(\rho\sigma_x) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_x) = 0, \\ \langle\sigma_y\rangle &= \text{Tr}(\rho\sigma_y) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_y) = 0, \\ \langle\sigma_z\rangle &= \text{Tr}(\rho\sigma_z) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_z) = 0, \end{aligned} \quad (20.69)$$

essendo le matrici di Pauli tutte a traccia nulla. Questi risultati sono in accordo con quanto già ottenuto, per lo stesso stato misto, in eq. (20.19). Sono inoltre consistenti con il fatto che, come abbiamo visto in eq. (20.54), nello stato massimamente misto il sistema si trova con la stessa probabilità $p = 1/2$ in un qualunque stato.

Infatti, come già fatto per lo stato puro, possiamo utilizzare l'eq. (20.43) per calcolare le probabilità che la particella si trovi negli autostati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ di σ_z .

Utilizzando l'espressione (20.66) per la matrice densità dello stato misto e i proiettori $\Lambda_{\pm}$ di eq. (20.63), si ottiene

$$\begin{aligned} P(\sigma_z = +1) &= \text{Tr}(\rho \Lambda_+) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Lambda_+) = \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, \\ P(\sigma_z = -1) &= \text{Tr}(\rho \Lambda_-) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Lambda_-) = \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (20.70)$$

in accordo con quanto atteso per lo stato massimamente misto.

20.5 Stati entangled e matrici densità ridotte

Come abbiamo visto, quando un sistema si trova in uno stato entangled, i suoi sottosistemi non si trovano in stati puri ma sono descritti da stati misti. Poichè, come abbiamo anche visto, gli stati misti sono rappresentati dalla matrice densità, ci proponiamo ora di applicare il formalismo della **matrice densità** alla **descrizione dei sottosistemi di un sistema composto**.

Consideriamo dunque un sistema composto da due sottosistemi, cui ci riferiremo sempre come ai sottosistemi di Alice e Bob. Indichiamo con $|a\rangle, |a'\rangle, \dots$ e $|b\rangle, |b'\rangle, \dots$ gli stati di base dei due sottosistemi e con gli stati prodotto $|ab\rangle, |a'b'\rangle, \dots$ gli stati di base del sistema composto. Proponiamoci quindi di calcolare, in termini della matrice densità ρ del sistema composto, il valore medio di un'osservabile L^A relativa al solo sottosistema di Alice. Per l'eq. (20.28) si ha:

$$\begin{aligned} \langle L^A \rangle &= \text{Tr}(\rho L^A) = \sum_{ab} \langle ab | \rho L^A | ab \rangle = \sum_{ab} \sum_{a'b'} \langle ab | \rho | a'b' \rangle \langle a'b' | L^A | ab \rangle = \\ &= \sum_{aa'} \sum_{bb'} \langle ab | \rho | a'b' \rangle \langle a' | L^A | a \rangle \langle b' | b \rangle = \sum_{aa'} \sum_b \langle ab | \rho | a'b \rangle \langle a' | L^A | a \rangle = \\ &= \sum_{aa'} \langle a | \left(\sum_b \langle b | \rho | b \rangle \right) | a' \rangle \langle a' | L^A | a \rangle. \end{aligned} \quad (20.71)$$

La quantità in parentesi tonde nell'ultimo termine dell'eq. (20.71) non dipende dall'osservabile L^A ma solo dalla matrice densità ρ del sistema composto. Questa quantità è un operatore, che agisce nel sottospazio degli stati del sistema di Alice, ed è chiamato **matrice densità ridotta** del sottosistema di Alice. La sua definizione è dunque:

$$\boxed{\rho^A = \sum_b \langle b | \rho | b \rangle \equiv \text{Tr}_B \rho}, \quad (20.72)$$

dove si è anche introdotta la cosiddetta **traccia parziale** Tr_B che indica, come mostrato in eq. (20.72), la traccia sul solo sottospazio del sistema di Bob⁵.

Sostituendo l'eq. (20.72) nella (20.71), si ottiene allora

$$\langle L^A \rangle = \sum_{aa'} \langle a | \rho^A | a' \rangle \langle a' | L^A | a \rangle = \sum_a \langle a | \rho^A L^A | a \rangle , \quad (20.73)$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{\boxed{\langle L^A \rangle = \text{Tr} (\rho^A L^A)}} . \quad (20.74)$$

Confrontando questo risultato con l'eq. (20.28), vediamo che **la matrice densità ridotta ρ^A rappresenta**, a tutti gli effetti, **la matrice densità del sottosistema di Alice**, che è parte del sistema composto. È anche evidente che, in modo del tutto simmetrico all'eq. (20.72), si può definire anche la **matrice densità ridotta ρ^B** del sistema di Bob,

$$\boxed{\boxed{\rho^B = \sum_a \langle a | \rho | a \rangle \equiv \text{Tr}_A \rho}} . \quad (20.75)$$

dove Tr_A indica la traccia parziale sul sottospazio del sistema di Alice.

È semplice verificare come le matrici densità ridotta siano ben normalizzate, ossia abbiano traccia pari a 1. Dall'eq. (20.72) si ha infatti:

$$\text{Tr} \rho^A = \sum_a \langle a | \rho^A | a \rangle = \sum_a \sum_b \langle a | \left(\langle b | \rho | b \rangle \right) | a \rangle = \sum_{ab} \langle ab | \rho | ab \rangle = \text{Tr} \rho = 1 , \quad (20.76)$$

o equivalentemente, con notazione compatta,

$$\boxed{\boxed{\text{Tr} \rho^A = \text{Tr}_A \text{Tr}_B \rho = \text{Tr} \rho = 1}} . \quad (20.77)$$

Più in generale, possiamo affermare che **le matrici densità ridotta soddisfano le stesse proprietà di una qualunque matrice densità**. In particolare, per le matrici densità ridotte valgono le stesse eq. (20.49) e (20.50), che consentono dunque di discriminare in questo caso se il sottosistema si trovi in uno stato puro oppure in uno stato misto.

Consideriamo il caso in cui il sistema composto si trovi in uno **stato prodotto** $|\varphi_A \chi_B\rangle$, in cui i sottosistemi di Alice e Bob si trovano negli stati $|\varphi_A\rangle$ e $|\chi_B\rangle$. In questo caso, la matrice densità ρ del sistema composto è espressa da

$$\boxed{\boxed{\rho = |\varphi_A \chi_B\rangle\langle\varphi_A \chi_B| = \left(|\varphi_A\rangle\langle\varphi_A| \right) \otimes \left(|\chi_B\rangle\langle\chi_B| \right)}} , \quad (20.78)$$

⁵Sebbene dall'eq. (20.72) possa non essere subito evidente che ρ^A è un operatore, osserviamo tuttavia che la matrice densità ρ è un operatore definito nello spazio $\mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_B$ del sistema composto, mentre i vettori di stato $|b\rangle$ appartengono al sottospazio $\mathcal{S}_B$. Pertanto, gli elementi di matrice $\langle b | \rho | b \rangle$ che entrano nell'eq. (20.72) rappresentano operatori nel sottospazio $\mathcal{S}_A$.

ed è data dunque, come ci si poteva aspettare, dal **prodotto tensoriale delle matrici densità** degli stati $|\varphi_A\rangle$ e $|\chi_B\rangle$. Queste matrici coincidono con le **matrici densità ridotte** dei due sottosistemi. Si ha infatti, ad esempio per ρ^A ,

$$\rho^A = \text{Tr}_B \rho = |\varphi_A\rangle\langle\varphi_A| \text{Tr}_B |\chi_B\rangle\langle\chi_B| = |\varphi_A\rangle\langle\varphi_A| \langle\chi_B|\chi_B\rangle = |\varphi_A\rangle\langle\varphi_A| \quad (20.79)$$

e analoga per ρ^B . Dunque, **nel caso in cui il sistema composto si trovi nello stato prodotto $|\varphi_A \chi_B\rangle$, si ha**

$$\boxed{\rho = \rho^A \otimes \rho^B} \quad \text{con} \quad \boxed{\rho^A = |\varphi_A\rangle\langle\varphi_A| \quad , \quad \rho^B = |\chi_B\rangle\langle\chi_B|} \quad . \quad (20.80)$$

Questo risultato implica, come vedremo, che in uno stato prodotto non vi è alcuna correlazione tra i sottosistemi di Alice e Bob.

Consideriamo ora il caso generale in cui il sistema composto si trovi in un **generico stato $|\psi_{AB}\rangle$** , che scriviamo nella forma

$$\boxed{|\psi_{AB}\rangle = \sum_{ab} \psi_{ab} |ab\rangle} \quad , \quad (20.81)$$

e proponiamoci di derivare le espressioni degli elementi della matrice densità ρ e delle matrici densità ridotte ρ^A e ρ^B in termini dei coefficienti ψ_{ab} .

Essendo $|\psi_{AB}\rangle$ uno stato puro, la sua matrice densità è data da

$$\rho = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \sum_{ab a'b'} \psi_{ab} \psi_{a'b'}^* |ab\rangle\langle a'b'| \quad . \quad (20.82)$$

Pertanto, gli **elementi della matrice densità ρ** sono determinati, in termini dei coefficienti ψ_{ab} , da

$$\boxed{\rho_{ab a'b'} = \langle ab | \rho | a'b' \rangle = \psi_{ab} \psi_{a'b'}^*} \quad . \quad (20.83)$$

La **matrice densità ridotta ρ^A** del sistema di Alice si ottiene poi, secondo l'eq. (20.72), effettuando la traccia parziale sugli stati di Bob della matrice densità ρ del sistema composto. Per i suoi **elementi di matrice** si ha allora

$$\rho_{aa'}^A = \langle a | \rho^A | a' \rangle = \sum_b \langle ab | \rho | a'b \rangle \quad , \quad (20.84)$$

ossia, per l'eq. (20.83),

$$\boxed{\rho_{aa'}^A = \langle a | \rho^A | a' \rangle = \sum_b \psi_{ab} \psi_{a'b}^*} \quad . \quad (20.85)$$

Al risultato analogo si giunge anche per gli **elementi della matrice densità ridotta** ρ^B del sistema di Bob:

$$\boxed{\rho_{bb'}^B = \langle b | \rho^B | b' \rangle = \sum_a \psi_{ab} \psi_{ab'}^*} \quad . \quad (20.86)$$

Le eq. (20.83), (20.85) e (20.86) sono di notevole utilità. Consentono infatti di determinare gli elementi della matrice densità ρ di un sistema composto e delle matrici densità ridotte dei suoi sottosistemi direttamente in termini dei coefficienti ψ_{ab} che determinano in eq. (20.81) il vettore di stato $|\psi_{AB}\rangle$ del sistema composto.

20.5.1 Matrici densità e matrici densità ridotte per stati entangled di due particelle di spin 1/2

Come applicazione di quanto discusso, calcoliamo la matrice densità e le matrici densità ridotte per un sistema composto di **due particelle di spin 1/2**, il cui generico stato può essere scritto nella forma

$$\boxed{|\psi_{AB}\rangle = \psi_{11} |++\rangle + \psi_{12} |+-\rangle + \psi_{21} |-+\rangle + \psi_{22} |--\rangle} \quad , \quad (20.87)$$

in accordo con l'eq. (20.81).

Assumiamo dapprima che le due particelle si trovino nello **stato entangled di Bell** $|\phi_+\rangle$ di eq. (20.12),

$$\boxed{|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|++\rangle + |--\rangle)} \quad . \quad (20.88)$$

Per questo stato, i coefficienti ψ_{ab} di eq. (20.87) valgono dunque

$$\boxed{\psi_{11} = \psi_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \psi_{12} = \psi_{21} = 0} \quad . \quad (20.89)$$

La **matrice densità** ρ del sistema composto dalle due particelle si ottiene direttamente dall'eq. (20.83). Da questa, e dall'eq. (20.89), vediamo che i soli elementi di matrice di ρ diversi da zero

$$\rho_{11} = |\psi_{11}|^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad \rho_{44} = |\psi_{22}|^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad \rho_{14} = (\rho_{41})^* = \psi_{11} \psi_{22}^* = \frac{1}{2} \quad , \quad (20.90)$$

ossia la **matrice densità** ρ è rappresentata da

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad . \quad (20.91)$$

È semplice anche verificare dall'eq. (20.91) che la matrice densità soddisfa

$$\boxed{\rho^2 = \rho \quad , \quad \text{Tr} \rho^2 = 1} \quad , \quad (20.92)$$

come previsto per uno **stato puro**.

Calcoliamo la **matrice densità ridotta** ρ^A della particella di Alice. I suoi elementi di matrice sono determinati dall'eq. (20.85). Utilizzando per i coefficienti ψ_{ab} i valori di eq. (20.89), troviamo allora:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^A &= \sum_b \psi_{1b} \psi_{1b}^* = \psi_{11} \psi_{11}^* + \psi_{12} \psi_{12}^* = |\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2 = \frac{1}{2} \\ \rho_{22}^A &= \sum_b \psi_{2b} \psi_{2b}^* = \psi_{21} \psi_{21}^* + \psi_{22} \psi_{22}^* = |\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2 = \frac{1}{2} \\ \rho_{12}^A &= (\rho_{21}^A)^* = \sum_b \psi_{1b} \psi_{2b}^* = \psi_{11} \psi_{21}^* + \psi_{12} \psi_{22}^* = 0. \end{aligned} \quad (20.93)$$

ossia, in forma matriciale,

$$\boxed{\rho^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I} \quad . \quad (20.94)$$

Come ci si può aspettare per la simmetria dello stato $|\phi_+\rangle$, allo stesso risultato si giunge anche calcolando la **matrice densità ridotta** ρ^B della particella di Bob. In questo caso, infatti, gli elementi di matrice sono determinati dall'eq. (20.86), da cui, utilizzando nuovamente i coefficienti di eq. (20.89), si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^B &= \sum_a \psi_{a1} \psi_{a1}^* = \psi_{11} \psi_{11}^* + \psi_{21} \psi_{21}^* = |\psi_{11}|^2 + |\psi_{21}|^2 = \frac{1}{2} \\ \rho_{22}^B &= \sum_a \psi_{a2} \psi_{a2}^* = \psi_{12} \psi_{12}^* + \psi_{22} \psi_{22}^* = |\psi_{12}|^2 + |\psi_{22}|^2 = \frac{1}{2} \\ \rho_{12}^B &= (\rho_{21}^B)^* = \sum_a \psi_{a1} \psi_{a2}^* = \psi_{11} \psi_{12}^* + \psi_{21} \psi_{22}^* = 0, \end{aligned} \quad (20.95)$$

ossia

$$\boxed{\rho^B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I} \quad , \quad (20.96)$$

che coincide con l'espressione della matrice densità ridotta ρ^A .

Le **matrici densità ridotte** ottenute in eq. (20.94) e (20.96) coincidono con quelle dello **stato massimamente misto**, come abbiamo visto in eq. (20.53). Ritroviamo dunque, in termini delle matrici densità, un risultato che avevamo già ottenuto, ossia che in un sistema di due particelle di spin 1/2 che si trovano nello

stato entangled $|\phi_+\rangle$, le particelle sono descritte da uno stato misto nel quale le probabilità di trovarsi in qualunque stato di spin sono uguali tra loro, pari sempre cioè a $1/2$. Sappiamo ora che questo stato è lo stato massimamente misto, ossia completamente indeterminato, e **in questi stati non è possibile conoscere nulla sulle particelle di Alice e Bob**.

Per le matrici densità ρ^A e ρ^B di eq. (20.94) e (20.96) si ha evidentemente $\rho^2 = (1/4)I$ e dunque

$$\boxed{\rho^2 \neq \rho \quad , \quad \text{Tr } \rho^2 = \frac{1}{2} < 1} \quad , \quad (20.97)$$

come previsto in eq. (20.52) per lo stato massimamente misto.

È interessante, per confronto, considerare anche il caso in cui le due particelle si trovino nello **stato entangled di Bell** $|\psi_-\rangle$ di eq. (20.12), ossia nello **stato di singoletto**:

$$\boxed{|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle - |-+\rangle \right)} \quad . \quad (20.98)$$

Per questo stato, i coefficienti ψ_{ab} di eq. (20.87) valgono dunque

$$\boxed{\psi_{11} = \psi_{22} = 0 \quad , \quad \psi_{12} = -\psi_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad . \quad (20.99)$$

Dall'eq. (20.83), vediamo allora che i soli elementi non nulli della matrice densità ρ sono

$$\begin{aligned} \rho_{22} = \psi_{12} \psi_{12}^* &= \frac{1}{2} \quad , \quad \rho_{33} = \psi_{21} \psi_{21}^* = \frac{1}{2} \\ \rho_{23} = (\rho_{32})^* &= \psi_{12} \psi_{21}^* = -\frac{1}{2} \quad , \end{aligned} \quad (20.100)$$

ossia la **matrice densità** è rappresentata da

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad . \quad (20.101)$$

Possiamo anche mostrare che questa matrice densità ha la seguente utile rappresentazione

$$\boxed{\rho = \frac{1}{4} (1 - \vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B)} \quad , \quad (20.102)$$

in termini degli operatori di spin $\vec{\sigma}^A$ e $\vec{\sigma}^B$ delle particelle di Alice e Bob. Ricordando infatti l'azione delle matrici di Pauli sugli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ di singola particella,

$$\begin{cases} \sigma_x |+\rangle = + |-\rangle \\ \sigma_x |-\rangle = + |+\rangle \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_y |+\rangle = + i |-\rangle \\ \sigma_y |-\rangle = - i |+\rangle \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_z |+\rangle = + |+\rangle \\ \sigma_z |-\rangle = - |-\rangle \end{cases}, \quad (20.103)$$

si trova, sugli stati di base del sistema composto,

$$\begin{cases} \sigma_x^A \sigma_x^B |++\rangle = + |--\rangle \\ \sigma_x^A \sigma_x^B |+-\rangle = + |-+\rangle \\ \sigma_x^A \sigma_x^B |-+\rangle = + |+-\rangle \\ \sigma_x^A \sigma_x^B |--\rangle = + |++\rangle \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_y^A \sigma_y^B |++\rangle = - |--\rangle \\ \sigma_y^A \sigma_y^B |+-\rangle = + |-+\rangle \\ \sigma_y^A \sigma_y^B |-+\rangle = + |+-\rangle \\ \sigma_y^A \sigma_y^B |--\rangle = - |++\rangle \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_z^A \sigma_z^B |++\rangle = + |++\rangle \\ \sigma_z^A \sigma_z^B |+-\rangle = - |-+\rangle \\ \sigma_z^A \sigma_z^B |-+\rangle = - |+-\rangle \\ \sigma_z^A \sigma_z^B |--\rangle = + |--\rangle \end{cases}, \quad (20.104)$$

da cui seguono le rappresentazioni matriciali

$$\begin{aligned} \sigma_x^A \sigma_x^B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y^A \sigma_y^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z^A \sigma_z^B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20.105)$$

Considerando che $\vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B = \sigma_x^A \sigma_x^B + \sigma_y^A \sigma_y^B + \sigma_z^A \sigma_z^B$, dalle eq. (20.105) e dalla matrice densità ρ di eq. (20.101), segue l'eq. (20.102). Questa equazione mostra anche come lo stato di singoletto non sia definito da alcuna direzione privilegiata nello spazio, ossia sia completamente simmetrico rispetto a rotazioni spaziali.

Dalle eq. (20.85) e (20.86), considerando i valori dei coefficienti ψ_{ab} di eq. (20.99), possiamo calcolare gli elementi delle **matrici densità ridotte**. Per la matrice ρ^A si ottiene

$$\begin{aligned} \rho_{11}^A &= \sum_b \psi_{1b} \psi_{1b}^* = \psi_{11} \psi_{11}^* + \psi_{12} \psi_{12}^* = |\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2 = \frac{1}{2} \\ \rho_{22}^A &= \sum_b \psi_{2b} \psi_{2b}^* = \psi_{21} \psi_{21}^* + \psi_{22} \psi_{22}^* = |\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2 = \frac{1}{2} \\ \rho_{12}^A &= (\rho_{21}^A)^* = \sum_b \psi_{1b} \psi_{2b}^* = \psi_{11} \psi_{21}^* + \psi_{12} \psi_{22}^* = 0, \end{aligned} \quad (20.106)$$

e gli stessi risultati si ottengono anche per la matrice ρ^B . Dunque, anche **per le due particelle nello stato entangled di singoletto le matrici densità ridotte** sono

$$\boxed{\rho^A = \rho^B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I}, \quad (20.107)$$

ossia le particelle sono nello **stato massimamente misto**.

Allo stesso risultato si giunge anche utilizzando l'eq. (20.102) per la matrice densità ρ dello stato di singoletto. Infatti, calcolando la traccia ridotta di ρ sugli stati della particella di Bob, si trova

$$\begin{aligned}\rho^A &= \text{Tr}_B \rho = \frac{1}{4} \text{Tr}_B (1 - \vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B) = \frac{1}{4} [\text{Tr}_B (I^A I^B) - \text{Tr}_B (\vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B)] = \\ &= \frac{1}{4} I^A \text{Tr}_B (I^B) - \vec{\sigma}^A \cdot \text{Tr}_B (\vec{\sigma}^B) = \frac{1}{2} I^A,\end{aligned}\quad (20.108)$$

dove abbiamo indicato con I^A e I^B le matrici identità nei sottospazi rispettivamente di Alice e Bob, e utilizzato $\text{Tr}_B (I^B) = 2$ e $\text{Tr}_B (\vec{\sigma}^B) = 0$. Il risultato per ρ^A ottenuto in eq. (20.108) è in accordo con quello di eq. (20.107) e allo stesso risultato si giunge calcolando $\rho^B = \text{Tr}_A \rho$.

Notiamo che esattamente lo stesso risultato di eq. (20.107) per le matrici densità ridotte si era ottenuto in eq. (20.94) e (20.96) per le due particelle nello stato entangled $|\phi_+\rangle$. Vediamo pertanto che, mentre la matrice densità ρ identifica univocamente lo stato $|\psi_{AB}\rangle$ del sistema composto, lo stesso non vale per le matrici densità ridotte ρ^A e ρ^B dei due sottosistemi. Ossia, **gli stati di due particelle che si trovano in stati entangled distinti possono essere descritte dalle stesse matrici densità ridotte**. In particolare, è possibile verificare che per tutti gli stati entangled di Bell di eq. (20.12) le matrici densità ridotte corrispondono alla matrice (20.107) dello stato massimamente misto.

Concludiamo questo studio sugli stati di due particelle di spin $1/2$ con la seguente considerazione. L'eq. (20.93) mostra che per un generico stato $|\psi_{AB}\rangle$ di eq. (20.87), la matrice densità ridotta della particella di Alice è espressa da

$$\rho^A = \begin{pmatrix} |\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2 & \psi_{11} \psi_{21}^* + \psi_{12} \psi_{22}^* \\ \psi_{22} \psi_{12}^* + \psi_{21} \psi_{11}^* & |\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2 \end{pmatrix}. \quad (20.109)$$

Come sappiamo, se la particella di Alice si trova in uno stato puro, la matrice ρ^A ha un autovalore pari a 1 e l'altro 0, e dunque il suo determinante è nullo. Viceversa, se la particella di Alice si trova in uno stato misto, e dunque lo stato composto $|\psi_{AB}\rangle$ è uno stato entangled, i due autovalori sono entrambi minori di 1 e diversi da 0. Ne segue allora che, per uno stato entangled, la matrice densità ridotta ρ^A ha determinante diverso da 0. Imponendo questa condizione sulla matrice (20.109) si ottiene

$$\begin{aligned}\det \rho^A &= (|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2) (|\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2) - |\psi_{11} \psi_{21}^* + \psi_{12} \psi_{22}^*|^2 = \\ &= |\psi_{11}|^2 |\psi_{22}|^2 + |\psi_{12}|^2 |\psi_{21}|^2 - 2 \text{Re} (\psi_{11} \psi_{21}^* \psi_{12}^* \psi_{22}) = \\ &= |\psi_{11} \psi_{22} - \psi_{12} \psi_{21}|^2 \neq 0.\end{aligned}\quad (20.110)$$

Allo stesso risultato si giunge studiando la matrice densità ridotta ρ^B della particella di Bob. Vediamo dunque che **lo stato composto $|\psi_{AB}\rangle$ di eq. (20.87) è uno stato**

entangled se e solo se risulta soddisfatta la condizione

$$\boxed{\psi_{11} \psi_{22} - \psi_{12} \psi_{21} \neq 0} . \quad (20.111)$$

Viceversa, se la condizione (20.111) non è soddisfatta, allora lo stato $|\psi_{AB}\rangle$ delle due particelle rappresenta uno stato prodotto. Ritroviamo in tal modo, con una diversa argomentazione, lo stesso risultato che avevamo già ottenuto in eq. (20.11).

20.6 Matrice densità ed ensemble statistici

Il formalismo della matrice densità trova una sua naturale applicazione anche in un contesto in parte differente da quello che stiamo qui discutendo, ossia nella **meccanica statistica quantistica**. Come è noto, questa è la branca della fisica che descrive, in accordo con i principi della meccanica quantistica, i sistemi termodinamici, ossia quei sistemi costituiti da un numero molto grande di costituenti microscopici, quali particelle elementari, atomi o molecole. Nella descrizione di questi sistemi emergono infatti nuove leggi fisiche che non hanno validità esatta ma piuttosto una valenza statistica, e diventano esatte solo nel limite in cui il numero di costituenti microscopici del sistema tende ad infinito.

Una descrizione dettagliata della meccanica statistica quantistica e delle sue leggi esula dagli scopi di questo testo. Vogliamo tuttavia qui illustrare brevemente come il formalismo della matrice densità sia particolarmente adatto alla descrizione statistica dei sistemi termodinamici. Questo ci consentirà inoltre di derivare un'importante **relazione tra matrice densità ed entropia**, che troverà applicazione anche nel contesto più generale della meccanica quantistica.

Uno dei risultati principali della meccanica statistica, che abbiamo già avuto occasione di discutere nella derivazione dello spettro del corpo nero (vedi eq. (??)), stabilisce che per un sistema termodinamico che si trovi all'equilibrio termico ad una temperatura T in un volume V , la probabilità di avere energia E_n , corrispondente ad uno degli autovalori dell'Hamiltoniana, è data da:

$$\boxed{p(E_n) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}} . \quad (20.112)$$

In questa equazione, $\beta = 1/(k_B T)$, dove k_B è la costante di Boltzmann, che nel seguito porremo uguale a 1⁶, e Z è la cosiddetta funzione di partizione, che garantisce in eq. (20.112) la corretta normalizzazione della probabilità,

$$\boxed{Z = \sum_n e^{-E_n/KT}} . \quad (20.113)$$

⁶Si osservi come porre uguale a 1 la costante di Boltzmann k_B equivalga semplicemente a misurare la temperatura T in unità di energia invece che in gradi Kelvin.

Consideriamo ora un insieme di sistemi che si trovino tutti all'equilibrio termodinamico nelle stesse condizioni macroscopiche considerate, ossia a temperatura T nel volume V . Nella meccanica statistica, questo insieme è chiamato **ensemble canonico**. Da quanto abbiamo discusso sulla matrice densità, e in particolare dalla sua definizione di eq. (20.26), risulta allora evidente che lo stato quantistico di un ensemble canonico è descritto, in accordo con l'eq. (20.112), dalla **matrice densità**

$$\boxed{\rho = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} |E_n\rangle\langle E_n|}, \quad (20.114)$$

dove gli $|E_n\rangle$ sono gli autostati dell'Hamiltoniana H del sistema. L'eq. (20.114) può essere anche riscritta in forma operatoriale osservando che

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta H} |E_n\rangle\langle E_n| = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \sum_n |E_n\rangle\langle E_n|, \quad (20.115)$$

e quindi, per la relazione di completezza,

$$\boxed{\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}}. \quad (20.116)$$

Nella meccanica statistica, la conoscenza della matrice densità consente allora di determinare tutte le **medie termodinamiche**, ossia i valori medi sull'ensemble, mediante l'eq. (20.28), che esprime i valori medi in termini di tracce dei corrispondenti operatori con la matrice densità. Ad esempio, l'energia media E nell'ensemble è espressa da

$$\boxed{E = \text{Tr}(\rho H)}. \quad (20.117)$$

possiamo verificare esplicitamente. Dall'eq. (20.114) segue infatti:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho H) &= \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \text{Tr}(|E_n\rangle\langle E_n| H) = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle E_n| H |E_n\rangle = \\ &= \frac{1}{Z} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = \sum_n E_n p(E_n) = E, \end{aligned} \quad (20.118)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione del valore medio dell'energia.

Nell'ensemble canonico, la connessione tra meccanica statistica e termodinamica è determinata dalla funzione di partizione Z di eq. (20.113). Si può infatti mostrare che la funzione di partizione Z è legata all'energia libera di Helmholtz $F = E - TS$, dove S è l'entropia del sistema, dalla relazione

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z. \quad (20.119)$$

Da questa equazione, è possibile derivare in particolare un'importante **relazione che lega l'entropia S alla matrice densità**:

$$\boxed{\boxed{S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)}} . \quad (20.120)$$

Utilizzando infatti le eq. (20.116), (20.117) e (20.119) si ha:

$$\begin{aligned} -\text{Tr}(\rho \ln \rho) &= -\text{Tr} \left[\rho \ln \left(\frac{1}{Z} e^{-\beta H} \right) \right] = \text{Tr} \rho \ln Z + \beta \text{Tr}(\rho H) = \\ &= -\beta F + \beta E = -\beta (E - TS - E) = S, \end{aligned} \quad (20.121)$$

che dimostra l'eq. (20.120). L'importanza di questa equazione, nella meccanica statistica, deriva anche dalla sua generalità. Essa infatti risulta valida non solo per l'ensemble canonico ma per un qualunque ensemble statistico descritto da una matrice densità ρ . Nella prossima sezione mostreremo come la stessa equazione, che è stata qui derivata nel contesto della meccanica statistica, può essere considerata per definire un'entropia per un qualunque sistema quantistico.

20.7 Entropia quantistica ed entropia di entanglement

Si deve a von Neumann l'idea di applicare l'eq. (20.120) nella meccanica quantistica per definire quella che è chiamata **entropia quantistica** o anche **entropia di von Neumann** di un sistema. Specificatamente, consideriamo un sistema quantistico descritto da una matrice densità ρ , che può corrispondere in generale ad uno stato puro o misto. Si definisce allora entropia quantistica del sistema la grandezza S espressa da

$$\boxed{\boxed{S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)}} . \quad (20.122)$$

Dall'identità delle eq. (20.120) e (20.122) segue evidentemente che, per un sistema quantistico termodinamico, ad esempio per le particelle di un gas all'equilibrio termico, l'entropia quantistica coincide con l'entropia termodinamica.

Per determinare l'entropia quantistica di un sistema, è utile esprimere l'eq. (20.122) in termini degli **autovalori della matrice densità**. Indicando come in precedenza con p_n questi autovalori, sappiamo anche che per un qualunque operatore $f(\rho)$, funzione della matrice densità, gli autovalori sono dati da $f(p_n)$. Essendo la traccia determinata dalla somma degli autovalori, possiamo allora esprimere l'entropia quantistica di eq. (20.122) nella forma

$$\boxed{\boxed{S = -\sum_n p_n \ln p_n}} . \quad (20.123)$$

Poichè, come sappiamo, gli autovalori della matrice densità sono numeri reali compresi tra 0 ed 1 (si veda l'eq. (20.46)), dall'eq. (20.123) segue che l'entropia quantistica è sempre maggiore o uguale a zero,

$$\boxed{S \geq 0} . \quad (20.124)$$

Come abbiamo visto, per uno stato puro la matrice densità ha un unico autovalore pari a 1 e tutti gli altri nulli. Dall'eq. (20.123) segue allora che

$$\boxed{\boxed{S = 0}} \quad \text{per uno stato puro} , \quad (20.125)$$

ossia **uno stato puro corrisponde ad uno stato di minima entropia**. In termini di informazione, possiamo affermare che l'entropia nulla corrisponde al fatto che **uno stato puro fornisce la massima informazione che può essere conosciuta su un sistema**.

Per uno stato misto, invece, la matrice densità ha autovalori strettamente minori di 1, e dunque si ha sempre

$$\boxed{\boxed{S > 0}} \quad \text{per uno stato misto} . \quad (20.126)$$

Pertanto **uno stato misto è caratterizzato da un'entropia positiva e l'informazione posseduta sul sistema è sempre ridotta**.

Possiamo determinare qual è il massimo valore possibile dell'entropia quantistica. Uguagliando a zero la derivata dell'eq. (20.123) rispetto agli autovalori p_n , ed imponendo la condizione $\text{Tr } \rho = \sum_n p_n = 1$ mediante un moltiplicatore di Lagrange λ , troviamo

$$\frac{\partial}{\partial p_n} [S - \lambda (\text{Tr } \rho - 1)] = \frac{\partial}{\partial p_n} \left[- \sum_k p_k \ln p_k - \lambda \left(\sum_k p_k - 1 \right) \right] = -\ln p_n - 1 - \lambda = 0 , \quad (20.127)$$

da cui si ottiene $p_n = \exp(-\lambda - 1)$ per ogni n . La condizione $\sum_n p_n = 1$ e l'eq. (20.123) implicano allora

$$\boxed{p_n = 1/N} \quad \text{e} \quad \boxed{S_{max} = \ln N} , \quad (20.128)$$

dove N è la dimensione dello spazio vettoriale del sistema. Il **valore massimo dell'entropia** si ottiene dunque quando il sistema si trova con la stessa probabilità in uno qualunque degli stati di base, ossia, come abbiamo già visto in eq. (20.52), quando il sistema si trova **nello stato massimamente misto**. In questo caso, l'informazione che si ha sul sistema è la minima possibile.

Riassumendo, abbiamo visto che l'entropia quantistica può assumere solo valori nell'intervallo

$$\boxed{0 \leq S \leq \ln N} \quad , \quad (20.129)$$

dove il valore minimo $S_{min} = 0$ si ottiene in corrispondenza di uno stato puro, ed il valore massimo $S_{max} = \ln N$ si ha quando il sistema si trova nello stato massimamente misto. L'entropia quantistica ci fornisce dunque una misura di *quanto è misto* lo stato di un sistema e, conseguentemente, di *quanta informazione* si ha sullo stato stesso.

Consideriamo ora un **sistema composto** da due sottosistemi. Sappiamo che lo stato di ciascun sottosistema è descritto dalla corrispondente **matrice densità ridotta**, ρ^A o ρ^B . Possiamo allora definire, in termini di queste matrici, le corrispondenti entropie quantistiche dei due sottosistemi:

$$\boxed{S_A = -\text{Tr}(\rho^A \ln \rho^A)} \quad , \quad \boxed{S_B = -\text{Tr}(\rho^B \ln \rho^B)} \quad . \quad (20.130)$$

Consideriamo dapprima il caso in cui il sistema composto si trovi in uno **stato prodotto**, $|\varphi_A \chi_B\rangle$. In questo caso, ciascun sottosistema si trova in uno stato puro, rispettivamente $|\varphi_A\rangle$ e $|\chi_B\rangle$, e le corrispondenti matrici densità ridotte sono espresse dai proiettori $\rho^A = |\varphi_A\rangle\langle\varphi_A|$ e $\rho^B = |\chi_B\rangle\langle\chi_B|$ (vedi eq. (20.80)). Queste matrici hanno un autovalore pari a 1 e tutti gli altri nulli, che implica, in virtù dell'eq. (20.123), per le entropie dei due sottosistemi,

$$\boxed{S_A = S_B = 0} \quad \text{per uno stato prodotto} . \quad (20.131)$$

Viceversa, se il sistema composto si trova in uno **stato entangled**, allora i due sottosistemi sono descritti da uno stato misto, e le corrispondenti entropie, come risultanti dall'eq. (20.123), sono entrambe positive, ossia

$$\boxed{S_A, S_B > 0} \quad \text{per uno stato entangled} . \quad (20.132)$$

Vediamo dunque che **le entropie dei sottosistemi di un sistema composto forniscono una misura quantitativa del grado di entanglement dello stato del sistema composto**. Per questa ragione, l'entropia quantistica dei sottosistemi di un sistema composto è anche detta **entropia di entanglement**. Dall'eq. (20.129) segue che la somma delle due entropie può variare nell'intervallo

$$\boxed{0 \leq S_A + S_B \leq \ln N_A + \ln N_B} \quad , \quad (20.133)$$

dove N_A ed N_B sono le dimensioni degli spazi vettoriali dei due sottosistemi. In eq. (20.133), pertanto, il valore minimo 0 corrisponde ad uno stato puro ed il valore massimo $\ln N_A + \ln N_B = \ln N_A N_B$ ad uno **stato massimamente entangled**, nel quale i due sottosistemi sono descritti da stati massimamente misti.

L'eq. (20.133) evidenzia una proprietà molto particolare del fenomeno dell'entanglement. Infatti, mentre per uno stato prodotto l'entropia S_{AB} del sistema composto è data dalla somma delle entropie dei suoi sottosistemi,

$$\boxed{S_A + S_B = S_{AB} = 0} \quad , \quad \text{per uno stato prodotto} \quad (20.134)$$

come vale sempre per un sistema classico quando i due sottosistemi non interagiscono tra loro, in uno stato entangled si ha invece sempre

$$\boxed{S_A + S_B > S_{AB} = 0} \quad , \quad \text{per uno stato entangled} \quad (20.135)$$

ossia la somma delle entropie dei due sottosistemi $S_A + S_B$ è sempre maggiore dell'entropia $S_{AB} = 0$ del sistema totale. Dunque, **per un sistema composto che si trovi in uno stato entangled, l'entropia non è una quantità additiva. I due sottosistemi sono intrecciati tra loro.**

Nella sezione 20.5.1 abbiamo visto che, per un sistema di due particelle di spin $1/2$, i quattro stati di Bell di eq. (20.12) sono stati entangled nei quali ciascuna delle due particelle si trova nello stato massimamente misto, per il quale le matrici densità ridotte valgono $\rho^A = \rho^B = (1/2) I$. Per gli **stati di Bell**, dunque,

$$S_A = S_B = \ln 2, \quad (20.136)$$

ossia questi stati rappresentano, come già derivato, esempi di **stati massimamente entangled**.

20.8 Entanglement e correlazioni quantistiche

Consideriamo un sistema composto dalle due particelle di Alice e Bob che si trovi in uno **stato prodotto** $|\varphi_A \chi_B\rangle$.

Supponiamo che Alice effettui sulla sua particella una misura di un'osservabile L^A . Il valore medio risultante dalla misura è allora dato da

$$\langle L^A \rangle = \langle \varphi_A \chi_B | L^A | \varphi_A \chi_B \rangle = \langle \varphi_A | L^A | \varphi_A \rangle \langle \chi_B | \chi_B \rangle = \langle \varphi_A | L^A | \varphi_A \rangle. \quad (20.137)$$

Analogamente, se Bob effettua sulla sua particella una misura di un'osservabile M^B , il valore medio è dato da

$$\langle M^B \rangle = \langle \varphi_A \chi_B | M^B | \varphi_A \chi_B \rangle = \langle \varphi_A | \varphi_A \rangle \langle \chi_B | M^B | \chi_B \rangle = \langle \chi_B | M^B | \chi_B \rangle. \quad (20.138)$$

Supponiamo ora che Alice e Bob effettuino simultaneamente, ciascuno sulla propria particella, una misura delle osservabili L^A ed M^B . Consideriamo quindi il prodotto $L^A M^B$ dei due risultati e calcoliamone il valore medio:

$$\langle L^A M^B \rangle = \langle \varphi_A \chi_B | L^A M^B | \varphi_A \chi_B \rangle = \langle \varphi_A | L^A | \varphi_A \rangle \langle \chi_B | M^B | \chi_B \rangle, \quad (20.139)$$

ossia

$$\boxed{\langle L^A M^B \rangle = \langle L^A \rangle \langle M^B \rangle} . \quad (20.140)$$

Dunque, il valore medio del prodotto delle due misure è uguale al prodotto dei valori medi. Ciò significa che, **in uno stato prodotto, i risultati delle misure effettuate sulle due particelle sono indipendenti tra loro.**

Notiamo che, in termini delle matrici densità, l'indipendenza delle misure nello stato prodotto si riflette nell'eq. (20.80), ossia nel fatto che, **nello stato prodotto, la matrice densità ρ del sistema composto è data dal prodotto tensoriale delle matrici densità ridotte ρ^A e ρ^B dei due sottosistemi,**

$$\boxed{\rho = |\varphi_A \chi_B\rangle\langle\varphi_A \chi_B| = |\varphi_A\rangle\langle\varphi_A| \otimes |\chi_B\rangle\langle\chi_B| = \rho^A \otimes \rho^B} . \quad (20.141)$$

In termini delle matrici densità, infatti, i valori medi di L^A ed M^B si esprimono come

$$\begin{aligned} \langle L^A \rangle &= \text{Tr}(\rho L^A) = \text{Tr}[(\rho^A \otimes \rho^B) L^A] = \text{Tr}(\rho^A L^A) \text{Tr}(\rho^B) = \text{Tr}(\rho^A L^A) \\ \langle M^B \rangle &= \text{Tr}(\rho M^B) = \text{Tr}[(\rho^A \otimes \rho^B) M^B] = \text{Tr}(\rho^A) \text{Tr}(\rho^B M^B) = \text{Tr}(\rho^B M^B) \end{aligned} \quad (20.142)$$

e per il valore medio del prodotto si ritrova

$$\begin{aligned} \langle L^A M^B \rangle &= \text{Tr}[\rho (L^A \otimes M^B)] = \text{Tr}[(\rho^A \otimes \rho^B) (L^A \otimes M^B)] = \\ &= \text{Tr}[(\rho^A L^A) \otimes (\rho^B M^B)] = \text{Tr}(\rho^A L^A) \text{Tr}(\rho^B M^B) = \\ &= \langle L^A \rangle \langle M^B \rangle , \end{aligned} \quad (20.143)$$

in accordo con quanto già ottenuto in eq. (20.140).

In generale, si definisce la **correlazione $C(L^A, M^B)$** tra due osservabili L^A ed M^B come la quantità

$$\boxed{C(L^A, M^B) = \langle L^A M^B \rangle - \langle L^A \rangle \langle M^B \rangle} . \quad (20.144)$$

L'eq. (20.140) indica allora che, **per un sistema composto che si trovi in uno stato prodotto, la correlazione tra una coppia qualunque di osservabili L^A ed M^B , relative ai due sottosistemi, è sempre nulla:**

$$\boxed{C(L^A, M^B) = 0} \quad \text{in uno stato prodotto,} \quad (20.145)$$

ossia, **in uno stato prodotto non vi è alcuna correlazione tra i sottosistemi di Alice e Bob.**

In uno **stato entangled**, invece, l'eq. (20.141) non è valida e, in generale, le correlazioni possono essere diverse da zero. Per quanto visto, possiamo anzi affermare

che se per un sistema composto è possibile trovare una coppia di osservabili L^A ed M^B , relative ai due sottosistemi, correlate tra loro, per le quali cioè

$$\boxed{C(L^A, M^B) \neq 0}, \quad (20.146)$$

allora lo stato del sistema è uno stato entangled. L'esistenza di correlazioni rappresenta dunque un'altra caratteristica peculiare del fenomeno dell'entanglement, e possiamo affermare che tanto maggiori (in valore assoluto) risultano le correlazioni tanto più elevato è l'entanglement di uno stato.

Come esempio, consideriamo un sistema composto da **due particelle di spin 1/2** che si trovano nello **stato entangled di singoletto**,

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), \quad (20.147)$$

e calcoliamo in questo stato la **correlazione delle componenti di spin** σ_x^A e σ_x^B delle due particelle, ossia la quantità

$$C(\sigma_x^A, \sigma_x^B) = \langle \sigma_x^A \sigma_x^B \rangle - \langle \sigma_x^A \rangle \langle \sigma_x^B \rangle. \quad (20.148)$$

Ricordando l'azione della matrice di Pauli σ_x sugli stati di singola particella, $\sigma_x |+\rangle = |-\rangle$ e $\sigma_x |-\rangle = |+\rangle$, per i valor medi di σ_x^A e σ_x^B si trova

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^A \rangle &= \langle \psi_- | \sigma_x^A | \psi_- \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle + - | - \langle - + | \right) \sigma_x^A \left(| + - \rangle - | - + \rangle \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle + - | - \langle - + | \right) \left(| - - \rangle - | + + \rangle \right) = 0, \\ \langle \sigma_x^B \rangle &= \langle \psi_- | \sigma_x^B | \psi_- \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle + - | - \langle - + | \right) \sigma_x^B \left(| + - \rangle - | - + \rangle \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle + - | - \langle - + | \right) \left(| + + \rangle - | - - \rangle \right) = 0, \end{aligned} \quad (20.149)$$

in accordo con il fatto che lo stato di singoletto è uno stato massimamente entangled e dunque, come trovato in eq. (20.107), le due particelle si trovano nello stato massimamente misto.

Calcoliamo ora il valore medio del prodotto $\sigma_x^A \sigma_x^B$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^A \sigma_x^B \rangle &= \langle \psi_- | \sigma_x^A \sigma_x^B | \psi_- \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle + - | - \langle - + | \right) \sigma_x^A \sigma_x^B \left(| + - \rangle - | - + \rangle \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle + - | - \langle - + | \right) \left(| - + \rangle - | + - \rangle \right) = \frac{1}{2} (0 - 1 - 1 + 0) = -1. \end{aligned} \quad (20.150)$$

Allo stesso risultato si giunge naturalmente anche utilizzando il formalismo della matrice densità. Utilizzando la matrice densità ρ di eq. (20.101) e la matrice

rappresentativa dell'operatore $\sigma_x^A \sigma_x^B$ calcolata in eq. (20.105), si ritrova infatti

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^A \sigma_x^B \rangle &= \text{Tr}[\rho(\sigma_x^A \sigma_x^B)] = \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (0 - 1 - 1 + 0) = -1, \end{aligned} \quad (20.151)$$

in accordo con l'eq. (20.150). Dalle eq. (20.149) e (20.150) segue allora la correlazione

$$\boxed{C(\sigma_x^A, \sigma_x^B) = -1} \quad . \quad (20.152)$$

Ritroviamo pertanto il risultato, ben noto, per cui **nello stato di singoletto le misure delle componenti di spin σ_x^A e σ_x^B delle due particelle sono perfettamente anticorrelate (la correlazione vale cioè -1), ossia le misure di σ_x^A e σ_x^B sulle due particelle producono sempre risultati opposti**. È possibile mostrare, con un calcolo analogo, che allo stesso risultato si giunge per tutte le componenti di spin, ossia, **nello stato di singoletto**

$$\boxed{C(\sigma_x^A, \sigma_x^B) = C(\sigma_y^A, \sigma_y^B) = C(\sigma_z^A, \sigma_z^B) = -1} \quad . \quad (20.153)$$

Questi risultati sono consistenti con il fatto che lo stato di singoletto è lo stato di spin totale $s = 0$.

Come discusso in precedenza, l'esistenza di correlazioni non nulle indica che lo stato di singoletto è uno stato entangled. Inoltre, il fatto che queste **correlazioni** assumano in modulo il **valore massimo possibile** indica anche che lo stato di singoletto è uno **stato massimamente entangled**.

Può essere anche utile mostrare esplicitamente che **non tutte le correlazioni in uno stato entangled sono diverse da zero**. Ad esempio, se consideriamo le due osservabili σ_x^A e σ_z^B si trova

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^A \sigma_z^B \rangle &= \langle \psi_- | \sigma_x^A \sigma_z^B | \psi_- \rangle = \frac{1}{2} (\langle + - | - \langle - + |) \sigma_x^A \sigma_z^B (| + - \rangle - | - + \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (\langle + - | - \langle - + |) (- | - - \rangle - | + + \rangle) = 0, \end{aligned} \quad (20.154)$$

da cui, considerando che entrambi i valori medi $\langle \sigma_x^A \rangle$ e $\langle \sigma_z^B \rangle$ sono nulli, segue

$$C(\sigma_x^A, \sigma_z^B) = \langle \sigma_x^A \sigma_z^B \rangle - \langle \sigma_x^A \rangle \langle \sigma_z^B \rangle = 0, \quad (20.155)$$

che dimostra quanto volevamo.

Capitolo 21 | Entanglement e realismo locale: EPR, Bell e il problema della misura

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il fenomeno dell'entanglement e gli strumenti matematici necessari per la sua descrizione. In questo capitolo discuteremo alcune delle sue più importanti conseguenze concettuali, tra cui il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen, le disuguaglianze di Bell, gli stati GHZ, il teletrasporto quantistico e il problema della misura.

21.1 L'esperimento di Einstein, Podolsky e Rosen

Un importante contributo alla comprensione dell'entanglement e delle sue correlazioni venne dato nel 1935 da **Einstein, Podolsky e Rosen** (EPR), con la pubblicazione di un famoso lavoro dal titolo¹: *La descrizione della realtà fisica della meccanica quantistica si può considerare completa?*

Per comprendere la questione posta da EPR, occorre in primo luogo chiarire cosa si intende per *descrizione completa della realtà fisica*. La definizione di **completezza** di una teoria, adottata da EPR, è la seguente: affinché una teoria possa considerarsi completa, è necessario che ogni elemento della realtà fisica trovi una sua controparte nella teoria. In altri termini, non devono esistere elementi della realtà fisica che non sono previsti dalla teoria.

Ma cosa dobbiamo considerare dunque un **elemento della realtà fisica**? A tal proposito, EPR si limitano ad assumere una condizione ritenuta non necessaria ma certamente sufficiente a definire la realtà, così formulata: *se, senza disturbare in alcun modo un sistema, è possibile predire con certezza (cioè con probabilità uguale ad uno) il valore di un'osservabile fisica, allora esiste un elemento della realtà fisica corrispondente a questa osservabile*.

¹A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. 47, 777–780 (1935)

Consideriamo ad esempio una particella di spin $1/2$ che si trovi nell'autostato $|+\rangle$ di σ_z . In questa circostanza, possiamo affermare che la componente σ_z dello spin della particella è un elemento della realtà fisica. Infatti, *senza disturbare in alcun modo il sistema*, il valore di σ_z può essere predetto con certezza. D'altra parte, se la descrizione della realtà fornita dalla meccanica quantistica è completa, allora alla componente di spin σ_x non corrisponde invece un elemento della realtà fisica, giacchè, per la particella che si trovi nell'autostato $|+\rangle$ di σ_z , il valore di σ_x non può essere predetto con certezza. Per determinarne il valore con certezza occorre effettuare una misura di σ_x , andando però in tal modo a modificare lo stato della particella e dunque a disturbare il sistema.

La questione posta da EPR è dunque se la descrizione della realtà fisica che ci fornisce la meccanica quantistica sia completa o se invece esistano elementi della realtà che la teoria non prevede essere tali. Nell'esempio precedente, questo potrebbe essere il caso dell'osservabile σ_x . Se il valore di σ_x potesse essere predetto con certezza ma la meccanica quantistica non ci fornisse tale previsione, allora la meccanica quantistica non sarebbe completa.

Naturalmente, è ben possibile considerare la possibilità che **tutte le osservabili fisiche siano reali**, ossia che i loro valori siano sempre ben determinati, indipendentemente dalla misura, e che ogni misura, pertanto, non riveli altro che un valore che già esisteva precedentemente. Questa rappresentazione della realtà, che è quella che ci presenta anche la fisica classica, prende il nome di **realismo**.

Se vale il realismo, è allora evidente che la meccanica quantistica non è completa, giacchè, in generale, i valori delle osservabili fisiche nella meccanica quantistica non sono predetti con certezza. In una teoria completa, invece, più profonda della meccanica quantistica, tali valori sarebbero allora determinati da altre variabili rilevanti nella descrizione dei sistemi fisici, la cui esistenza non è prevista dalla meccanica quantistica, che dunque noi non conosciamo e forse non possiamo nemmeno conoscere, e che per questa ragione sono chiamate **variabili nascoste**. Le teorie realistiche, alternative alla meccanica quantistica, sono dunque dette **teorie a variabili nascoste**.

Il primo contributo fondamentale del lavoro di EPR è stato quello di avere riconosciuto che il fenomeno dell'**entanglement** svolge un ruolo centrale nella descrizione quantistica della realtà. Per stabilire la completezza o meno della meccanica quantistica, EPR propongono infatti di analizzare un esperimento mentale effettuato con due particelle in uno stato entangled, e di studiarne due osservabili che la meccanica quantistica considera incompatibili. Per queste ultime, EPR considerano la posizione e l'impulso delle due particelle, ma qui ci considereremo invece, per maggiore semplicità, le componenti di spin σ_z e σ_x di due particelle di spin $1/2$.

Consideriamo dunque due particelle di spin $1/2$ che siano state prodotte ad un tempo iniziale nello stato di spin di singoletto,

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), \quad (21.1)$$

e si siano successivamente allontanate l'una dall'altra senza che il loro stato di spin, nell'evoluzione temporale, ne risulti modificato. Assumiamo quindi che le due particelle giungano in possesso di Alice e Bob, i quali possano eseguire misure ciascuno sulla propria particella. Assumiamo inoltre che la distanza finale tra le particelle sia tale che queste non possano più interagire tra loro, ossia che nel tempo che intercorre tra le misure di Alice e Bob nessun segnale, che si propaghi anche alla velocità della luce, abbia il tempo di trasmettersi tra le due particelle. In queste condizioni, si dice che le due **misure** sono **causalmente disconnesse**.

Supponiamo che Alice decida di effettuare sulla propria particella una misura della componente σ_z^A dello spin ed ottenga come risultato $\sigma_z^A = +1$. In virtù della perfetta anticorrelazione $C(\sigma_z^A, \sigma_z^B) = -1$ che si ha nello stato di singoletto, sappiamo allora che una misura di σ_z^B effettuata da Bob produce con certezza il risultato $\sigma_z^B = -1$. Questa previsione della meccanica quantistica è in accordo con l'esperienza ed è conseguenza, come sappiamo, dell'entanglement tra le due particelle.

Allora, osservano EPR, *poichè al momento della misura i due sistemi*, ossia le particelle di Alice e Bob, *non interagiscono più, nessun cambiamento reale può avere luogo sul secondo sistema come conseguenza di qualcosa che viene fatto sul primo sistema*. In altri termini, la misura effettuata da Alice non può influenzare in alcun modo il risultato della misura di Bob, perchè le due misure sono causalmente disconnesse. Questa assunzione prende il nome di **località**: nessuna influenza può viaggiare più veloce della luce e dunque un sistema può essere influenzato solo da ciò che accade nel suo intorno. Ma allora, poichè a seguito della misura di Alice risulta possibile prevedere con certezza il risultato della misura di Bob, senza disturbare in alcun modo, in virtù della località, la particella di Bob, si deve concludere che all'osservabile σ_z della particella di Bob corrisponde un elemento della realtà fisica.

Tuttavia, e questa è l'osservazione centrale nell'argomento di EPR, Alice avrebbe potuto decidere di misurare, invece della componente σ_z dello spin della propria particella, una qualunque altra componente, ad esempio σ_x . Sappiamo che nella meccanica quantistica lo stato di singoletto può essere anche espresso in termini degli autostati di σ_x^A e σ_x^B in modo analogo all'eq. (21.1), ossia

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle_x - |-+\rangle_x \right), \quad (21.2)$$

e che in questo stato, dunque, anche le osservabili σ_x^A e σ_x^B sono caratterizzate da perfetta anticorrelazione, $C(\sigma_x^A, \sigma_x^B) = -1$. Pure questo risultato è infatti confermato dall'esperienza. Ma allora, esattamente per lo stesso argomento svolto in precedenza, poichè a seguito della misura di σ_x^A da parte di Alice risulta possibile prevedere con certezza il risultato della misura di σ_x^B da parte di Bob, senza disturbare in alcun modo, per l'ipotesi di località, la particella di Bob, si arriva a concludere che anche all'osservabile σ_x^B , oltre che a σ_z^B , deve corrispondere un elemento della realtà fisica.

È evidente allora che lo stesso argomento si può applicare alla componente di spin $\sigma_{\hat{n}}$ in una qualunque direzione $\hat{n}$. EPR concludono così che tutte le componenti di spin della particella di Bob devono corrispondere ad un elemento della realtà fisica.

Dunque, insieme alla località deve valere anche il realismo, ossia tutte le osservabili fisiche devono essere elementi della realtà e il loro valore è sempre determinato, indipendentemente dalla misura. Questa rappresentazione della realtà, che combina il realismo con la località, è chiamata **realismo locale**.

La conclusione cui giungono EPR dall'analisi di questo esperimento mentale è in disaccordo con le previsioni della meccanica quantistica. Secondo la meccanica quantistica, infatti, due qualunque componenti di spin, come σ_x e σ_z , sono osservabili incompatibili, e non possono dunque possedere entrambe con certezza un valore determinato. Pertanto, si deve concludere che **o non vale il realismo locale, oppure la descrizione della realtà fisica fornita dalla meccanica quantistica è incompleta**, giacché esistono elementi della realtà fisica, come le osservabili σ_x^B e σ_z^B , che non hanno controparte nella teoria. In altri termini, **la meccanica quantistica è incompatibile con il realismo locale**.

Poiché EPR consideravano assodata la validità del realismo locale, ne concludono che la descrizione della realtà fisica fornita dalla meccanica quantistica è incompleta, e che quest'ultima doveva dunque essere sostituita da una teoria alternativa. Su questa conclusione, tuttavia, oggi sappiamo che EPR si sbagliavano. Gli esperimenti condotti molti anni dopo sulle **disuguaglianze di Bell** hanno mostrato invece che **non vale il realismo locale**, mentre **la descrizione della realtà fornita dalla meccanica quantistica**, per quanto sappiamo, **può ben essere completa**.

21.2 Le disuguaglianze di Bell

Si deve a **John Bell** il merito di aver mostrato, in un articolo del 1964 intitolato *Sul paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen*², che la validità del realismo locale poteva essere decisa sperimentalmente. Bell ha dimostrato l'esistenza di una classe di **disuguaglianze**, espresse in termini di **correlazioni tra coppie di osservabili**, che devono risultare necessariamente **soddisfatte se vale il realismo locale** e che possono essere verificate sperimentalmente. La meccanica quantistica prevede invece che le disuguaglianze di Bell possano essere violate, in accordo con il fatto, osservato da EPR, che la meccanica quantistica è incompatibile con il realismo locale.

Discuteremo qui una disuguaglianza di Bell, proposta da d'Espagnat³, che risulta particolarmente semplice da discutere. Consideriamo a tale scopo un insieme di elementi, ad esempio gli alunni di una classe, e tre proprietà fisiche, che denotiamo con A , B e C , che ciascun elemento dell'insieme può o meno possedere. Per ogni alunno della classe la proprietà A potrebbe essere ad esempio quella di avere i capelli castani, la proprietà B di avere gli occhi azzurri e la proprietà C di essere più alto di 1,75 m. Possiamo allora dimostrare che se le proprietà A , B e C sono reali, ossia esistono indipendentemente dalla misura, cioè **se vale il realismo**, allora deve

²J.S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics 1, 195–200 (1964).

³B. d'Espagnat, *The quantum theory and reality*, Scientific American 241 (5), 158–181 (1979).

risultare soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$\boxed{N(A, \mathcal{B}) \leq N(\mathcal{B}, C) + N(A, \mathcal{C})} \quad , \quad (21.3)$$

dove $N(A, \mathcal{B})$ indica il numero di elementi dell'insieme che possiedono la proprietà A e non possiedono la proprietà B , e analogamente per gli altri termini dell'eq. (21.3).

Dimostriamo ora la validità della disuguaglianza (21.3). Se vale il realismo, allora ciascun elemento dell'insieme o possiede una data proprietà oppure non la possiede. Si può pertanto scrivere:

$$\begin{aligned} N(A, \mathcal{B}) &= N(A, \mathcal{B}, C) + N(A, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \, , \\ N(\mathcal{B}, C) &= N(A, \mathcal{B}, C) + N(\mathcal{A}, \mathcal{B}, C) \, , \\ N(A, \mathcal{C}) &= N(A, B, \mathcal{C}) + N(A, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \, , \end{aligned} \quad (21.4)$$

dove ad esempio $N(A, B, \mathcal{C})$ indica il numero di elementi dell'insieme che possiedono la proprietà A , possiedono la proprietà B e non possiedono la C , e analogamente per le altre combinazioni.

La seconda e la terza delle eq. (21.4) implicano allora

$$\begin{aligned} N(A, \mathcal{B}, C) &= N(\mathcal{B}, C) - N(\mathcal{A}, \mathcal{B}, C) \leq N(\mathcal{B}, C) \, , \\ N(A, \mathcal{B}, \mathcal{C}) &= N(A, \mathcal{C}) - N(A, B, \mathcal{C}) \leq N(A, \mathcal{C}) \, . \end{aligned} \quad (21.5)$$

Sostituendo dunque le disuguaglianze (21.5) nella prima delle eq. (21.4) si ottiene la disuguaglianza (21.3) che volevamo dimostrare. Questa disuguaglianza dunque è sempre valida, per qualunque insieme di elementi e tre qualunque proprietà, purchè, come abbiamo ipotizzato, le proprietà fisiche siano reali.

Si potrebbe pensare allora di verificare la disuguaglianza (21.3) su un insieme di particelle, ad esempio **un insieme di elettroni**, per verificare se le proprietà fisiche degli elettroni sono reali oppure, come afferma invece la meccanica quantistica, si manifestano solo a seguito della misura. Come proprietà A , B e C potremmo scegliere ad esempio le componenti di spin dell'elettrone lungo tre distinte direzioni, che secondo la meccanica quantistica, essendo osservabili incompatibili, non possono avere valori simultaneamente determinati.

Tuttavia, questa verifica sperimentale non è possibile. Non vi è infatti alcun modo di determinare se un elettrone possiede simultaneamente due proprietà A e B , giacchè non possiamo garantirci che la misura della proprietà A non influisca sul risultato della successiva misura di B . Questo è anzi esattamente quanto previsto dalla meccanica quantistica, se le proprietà A e B si riferiscono ad osservabili incompatibili. Pertanto, il numero $N(A, \mathcal{B})$ di elettroni che possiedono la proprietà A e non possiedono la B non può essere determinato, e non risulta dunque nemmeno possibile una verifica sperimentale della disuguaglianza (21.3).

Questa limitazione può essere tuttavia superata considerando, come nel lavoro EPR, non singoli elettroni ma coppie di elettroni che si trovano in uno stato entangled, ad esempio nello stato di singoletto. In questo caso, infatti, per determinare il

numero di elettroni $N(A, \mathcal{B})$, possiamo misurare la proprietà A , ad esempio il valore di σ_z , sul primo elettrone della coppia e la proprietà B , ad esempio il valore di σ_x , sul secondo elettrone. Sappiamo infatti che, se si trova ad esempio che il secondo elettrone ha spin $\sigma_x = +1$, allora il primo elettrone avrà spin $\sigma_x = -1$.

Se ci assicuriamo di effettuare sulla coppia di elettroni **misure causalmente disconnesse** ed assumiamo il **realismo locale**, assumiamo cioè che oltre al realismo valga anche la **località**, allora la misura di A effettuata sul primo elettrone non può avere alcuna influenza sul risultato della misura di B effettuata sul secondo elettrone. In questo modo risulta possibile determinare il numero di elettroni $N(A, \mathcal{B})$ misurando sulle coppie di elettroni nello stato entangled di singoletto il numero di coppie $n(A, B)$ nelle quali il primo elettrone possiede la proprietà A ed il secondo elettrone la proprietà B . La disuguaglianza (21.3) può quindi essere riscritta nella forma

$$n(A, B) \leq n(B, C) + n(A, C) \quad . \quad (21.6)$$

L'eq. (21.6) è un esempio di **disuguaglianza di Bell** e deve risultare necessariamente soddisfatta, come abbiamo visto, se valgono allo stesso tempo il realismo e la località. **La verifica sperimentale della disuguaglianza di Bell (21.6) consente dunque di stabilire la validità o meno, nel mondo fisico, del realismo locale.**

Poichè la **meccanica quantistica è incompatibile con il realismo locale**, è naturale attendersi che la disuguaglianza di Bell (21.6) possa essere violata dalla meccanica quantistica. Mostriamo ora che questo è precisamente ciò che accade. A tale scopo, scegliamo come proprietà A , B e C , per le coppie di elettroni nello stato entangled di singoletto, le seguenti proprietà:

- la **proprietà A** è di avere spin $\sigma_z = +1$;
- la **proprietà B** è di avere spin $\sigma_x = +1$;
- la **proprietà C** è di avere spin $\sigma_{\hat{n}} = +1$ con $\hat{n} = 1/\sqrt{2} (1, 0, 1)$.

È evidente che il numero di coppie $n(A, B)$ è direttamente proporzionale, nella meccanica quantistica, alla probabilità $p(A, B)$ che il primo elettrone nello stato di singoletto possieda la proprietà A , ossia abbia spin $\sigma_z = +1$, ed il secondo elettrone possieda la proprietà B , ossia abbia spin $\sigma_x = +1$. Lo stesso vale poi per i numeri di coppie $n(A, C)$ ed $n(B, C)$. Possiamo dunque riscrivere la disuguaglianza di Bell (21.6) nella meccanica quantistica in termini delle corrispondenti probabilità,

$$p(A, B) \leq p(B, C) + p(A, C) \quad . \quad (21.7)$$

Per verificare se disuguaglianza (21.7) è o meno soddisfatta, calcoliamo, nella meccanica quantistica, la probabilità $p(\sigma_{\hat{n}} = +1, \sigma_{\hat{m}} = +1)$ che, per due particelle di spin $1/2$ nello stato di singoletto, la prima particella abbia spin $\sigma_{\hat{n}} = +1$ nella direzione del generico versore $\hat{n}$ e la seconda particella abbia spin $\sigma_{\hat{m}} = +1$ nella direzione del generico versore $\hat{m}$.

In virtù della simmetria rotazionale dello stato di singoletto possiamo scegliere, senza perdere di generalità, l'asse z nella direzione del versore $\hat{n}$ e l'asse x in modo tale che il versore $\hat{m}$ sia contenuto nel piano $x - z$. In tal modo si ha:

$$\hat{n} = (0, 0, 1) , \quad \hat{m} = (\sin \theta, 0, \cos \theta) , \quad (21.8)$$

dove θ rappresenta dunque l'angolo tra la direzioni $\hat{n}$ ed $\hat{m}$.

Con questa scelta, lo stato corrispondente a $\sigma_{\hat{n}} = +1$ corrisponde allora all'auto-stato $|+\rangle$ di σ_z , mentre lo stato corrispondente a $\sigma_{\hat{m}} = +1$ è l'autostato $|m+\rangle$ con autovalore $+1$ della matrice

$$\sigma_{\hat{m}} = \vec{\sigma} \cdot \hat{m} = \sin \theta \sigma_x + \cos \theta \sigma_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} . \quad (21.9)$$

È semplice verificare che questo autostato è rappresentato dal vettore

$$|m+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} . \quad (21.10)$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\hat{m}} - 1) |m+\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \sin^2 \theta/2 & 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2 \\ 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2 & -2 \cos^2 \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (21.11)$$

ossia $\sigma_{\hat{m}} |m+\rangle = |m+\rangle$. La probabilità $p(\sigma_{\hat{n}} = +1, \sigma_{\hat{m}} = +1)$ è allora

$$\begin{aligned} p(\sigma_{\hat{n}} = +1, \sigma_{\hat{m}} = +1) &= |\langle +, m+ | \psi_- \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +, m+ | (|+-\rangle - |-+\rangle) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} |\langle m+ | - \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2) \end{aligned} \quad (21.12)$$

Ricordando che θ definisce l'angolo tra le due direzioni $\hat{n}$ ed $\hat{m}$, ossia, come segue dall'eq. (21.8), $\hat{n} \cdot \hat{m} = \cos \theta$, possiamo anche scrivere il precedente risultato nella forma⁴

$$p(\sigma_{\hat{n}} = +1, \sigma_{\hat{m}} = +1) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2) = \frac{1}{4} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{4} (1 - \hat{n} \cdot \hat{m}) . \quad (21.15)$$

⁴È istruttivo considerare come allo stesso risultato di eq. (21.15) si possa anche giungere utilizzando il formalismo della matrice densità.

Osserviamo a tale scopo che il proiettore sull'autostato corrispondente a $\sigma_{\hat{n}} = +1$ è espresso da $\Pi_{\hat{n}} = 1/2 (1 + \sigma_{\hat{n}})$. Agendo infatti sugli autostati $|n+\rangle$ e $|n-\rangle$ di $\sigma_{\hat{n}}$ questo proiettore produce, come ci si aspetta, $\Pi_{\hat{n}} |n+\rangle = |n+\rangle$ ed $\Pi_{\hat{n}} |n-\rangle = 0$. Utilizzando allora l'espressione (20.102) per la matrice densità dello stato di singoletto ed utilizzando l'eq. (20.43), troviamo che la probabilità

Utilizzando l'eq. (21.15), siamo allora in grado di verificare le previsioni della meccanica quantistica per la disuguaglianza di Bell (21.7). Per le tre proprietà A , B e C sopra considerate, i versori che definiscono le direzioni dello spin sono

$$\hat{n}_A = (0, 0, 1) , \quad \hat{n}_B = (1, 0, 0) , \quad \hat{n}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1) . \quad (21.16)$$

Dall'eq. (21.15) segue allora che le probabilità che entrano nella disuguaglianza di Bell (21.7) valgono

$$\begin{aligned} p(A, B) &= \frac{1}{4} (1 - \hat{n}_A \cdot \hat{n}_B) = \frac{1}{4} , \\ p(B, C) &= \frac{1}{4} (1 - \hat{n}_B \cdot \hat{n}_C) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) , \\ p(A, C) &= \frac{1}{4} (1 - \hat{n}_A \cdot \hat{n}_C) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) . \end{aligned} \quad (21.17)$$

La disuguaglianza di Bell (21.7) corrisponde allora a

$$p(A, B) = \frac{1}{4} \leq p(B, C) + p(A, C) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \longrightarrow \boxed{1 \leq (2 - \sqrt{2}) \simeq 0.59} , \quad (21.18)$$

che risulta evidentemente non soddisfatta. Vediamo dunque che **la disuguaglianza di Bell (21.6), che deve risultare sempre verificata se vale il realismo locale, può essere invece violata dalla meccanica quantistica.**

Gli esperimenti sulle disuguaglianze di Bell sono stati condotti per molti anni e con sempre maggior precisione, utilizzando stati entangled principalmente di fotoni ed elettroni. Questi esperimenti **hanno mostrato che le disuguaglianze di Bell sono violate, escludendo dunque la validità di qualunque teoria realistica**

$p(\sigma_{\hat{n}} = +1, \sigma_{\hat{m}} = +1)$ è data da

$$\begin{aligned} p(\sigma_{\hat{n}} = +1, \sigma_{\hat{m}} = +1) &= \text{Tr} [\rho (\Pi_{\hat{n}}^A \otimes \Pi_{\hat{m}}^B)] = \text{Tr} \left[\frac{1}{4} (1 - \vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B) \left(\frac{1}{2} (1 + \sigma_{\hat{n}}^A) \otimes \frac{1}{2} (1 + \sigma_{\hat{m}}^B) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{16} \text{Tr} [(1 - \vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B) (1 + \sigma_{\hat{n}}^A + \sigma_{\hat{m}}^B + \sigma_{\hat{n}}^A \sigma_{\hat{m}}^B)] , \end{aligned} \quad (21.13)$$

dove gli indici A e B denotano gli operatori agenti rispettivamente nei sottospazi di Alice e Bob delle due particelle. Considerando che $\text{Tr}(L^A \otimes M^B) = \text{Tr}(L^A) \text{Tr}(M^B)$ e che le matrici di Pauli soddisfano $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$ e $\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2 \delta_{ij}$, dall' eq. (21.13) si ottiene:

$$\begin{aligned} p(\sigma_{\hat{n}} = +1, \sigma_{\hat{m}} = +1) &= \frac{1}{16} \text{Tr} [1 - (\vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B) (\sigma_{\hat{n}}^A \sigma_{\hat{m}}^B)] = \frac{1}{16} [4 - \text{Tr}_A(\vec{\sigma}^A \sigma_{\hat{n}}^A) \cdot \text{Tr}_B(\vec{\sigma}^B \sigma_{\hat{m}}^B)] = \\ &= \frac{1}{16} (4 - 4 \hat{n} \cdot \hat{m}) = \frac{1}{4} (1 - \hat{n} \cdot \hat{m}) , \end{aligned} \quad (21.14)$$

in accordo con quanto ottenuto in eq. (21.15).

locale. Le violazioni delle disuguaglianze di Bell osservate sono inoltre risultate sempre in accordo con le previsioni della meccanica quantistica. Per questi esperimenti, è stato assegnato nel 2022 ad Alain Aspect, John F. Clauser e Anton Zeilinger il premio Nobel per la fisica.

21.3 Entanglement a tre particelle, stati GHZ e realismo locale

Quando si considerano stati entangled costituiti da tre o più particelle, l'incompatibilità tra teorie realistiche locali e meccanica quantistica si esprime non più soltanto in termini di disuguaglianze tra medie statistiche, come nel caso delle disuguaglianze di Bell per stati entangled di due particelle, ma anche in termini di correlazioni perfette, ossia risultati di misure che si verificano con probabilità 1. Gli stati entangled che evidenziano tale incompatibilità sono chiamati **stati GHZ** (da Greenberger, Horne e Zeilinger⁵).

Per illustrare il fenomeno, consideriamo il seguente stato di tre particelle di spin 1/2:

$$|\psi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+++\rangle - |---\rangle \right) \quad (21.19)$$

È semplice verificare che questo stato è autostato simultaneo dei tre operatori

$$\Sigma_1 = \sigma_x^A \sigma_y^B \sigma_y^C, \quad \Sigma_2 = \sigma_y^A \sigma_x^B \sigma_y^C, \quad \Sigma_3 = \sigma_y^A \sigma_y^B \sigma_x^C \quad (21.20)$$

dove $\vec{\sigma}^A$, $\vec{\sigma}^B$, $\vec{\sigma}^C$ sono gli operatori di spin delle tre particelle, che immaginiamo possedute rispettivamente da Alice, Bob e Charlie. Ricordando infatti l'azione delle matrici di Pauli σ_x e σ_y sugli stati di singola particella,

$$\begin{cases} \sigma_x |+\rangle = +|-\rangle \\ \sigma_x |-\rangle = +|+\rangle \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_y |+\rangle = +i|-\rangle \\ \sigma_y |-\rangle = -i|+\rangle \end{cases}, \quad (21.21)$$

vediamo che

$$\begin{aligned} \Sigma_1 |\psi_{GHZ}\rangle &= \sigma_x^A \sigma_y^B \sigma_y^C \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+++\rangle - |---\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|--\rangle + |++\rangle \right) = +|\psi_{GHZ}\rangle. \end{aligned} \quad (21.22)$$

⁵D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Zeilinger, *Going Beyond Bell's Theorem*, in *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, edited by M. Kafatos (Springer, Dordrecht, 1989), pp. 69–72.

D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Shimony, A. Zeilinger, *Bell's theorem without inequalities*, Am. J. Phys. 58, 1131–1143 (1990)

Per la simmetria dello stato $|\psi_{GHZ}\rangle$ rispetto allo scambio delle tre particelle si ha allora anche:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 |\psi_{GHZ}\rangle &= + |\psi_{GHZ}\rangle \\ \Sigma_2 |\psi_{GHZ}\rangle &= + |\psi_{GHZ}\rangle \\ \Sigma_3 |\psi_{GHZ}\rangle &= + |\psi_{GHZ}\rangle \end{aligned} \quad , \quad (21.23)$$

che dimostra quanto volevamo⁶.

Supponiamo dunque che Alice, Bob e Charlie effettuino le misure di Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 sulle tre particelle nello stato GHZ. Gli esperimenti mostrano che, in tutti e tre i casi, si ottiene il risultato $+1$, in accordo con le previsioni della meccanica quantistica.

Consideriamo allora cosa implica questo risultato se assumiamo che il mondo fisico sia descritto da una **teoria realistica locale**. In questo caso, tutte le componenti di spin delle tre particelle hanno valori sempre ben definiti, che possono essere ± 1 . Indichiamo dunque questi valori con a_x , a_y , a_z per le tre componenti di spin della particella di Alice, e analogamente con b_x , b_y , b_z e con c_x , c_y , c_z per le tre componenti di spin delle particelle di Bob e Charlie.

Se vale il realismo locale, allora, i risultati delle tre misure, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = +1$, implicano che

$$a_x b_y c_y = +1, \quad a_y b_x c_y = +1, \quad a_y b_y c_x = +1 \quad . \quad (21.25)$$

Moltiplicando tra loro i primi membri delle tre eq. (21.25) otteniamo

$$(a_x b_y c_y) (a_y b_x c_y) (a_y b_y c_x) = a_x b_x c_x (a_y b_y c_y)^2 = a_x b_x c_x, \quad (21.26)$$

giacchè i quadrati delle variabili di spin valgono sempre $+1$. Le eq. (21.25) e (21.26) implicano allora

$$a_x b_x c_x = +1 \quad . \quad (21.27)$$

Pertanto, se Alice, Bob e Charlie effettuano sulle tre particelle una misura dell'osservabile

$$\Sigma_x = \sigma_x^A \sigma_x^B \sigma_x^C \quad , \quad (21.28)$$

la previsione di una teoria realistica locale, che segue dall'eq. (21.27), è che

$$\boxed{\boxed{\Sigma_x = +1}} \quad \text{se vale il realismo locale} \quad . \quad (21.29)$$

⁶È semplice verificare che i tre operatori Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 commutano tra loro, ossia

$$[\Sigma_1, \Sigma_2] = [\Sigma_1, \Sigma_3] = [\Sigma_2, \Sigma_3] = 0, \quad (21.24)$$

da cui segue che, insieme allo stato $|\psi_{GHZ}\rangle$, esiste una base completa di autostati in comune tra i tre operatori.

Consideriamo ora la previsione della meccanica quantistica. Applicando l'operatore Σ_x allo stato $|\psi_{GHZ}\rangle$, ed utilizzando le eq. (21.21), si ottiene

$$\Sigma_x |\psi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x^A \sigma_x^B \sigma_x^C (|+++\rangle - |--\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|--\rangle - |+++\rangle), \quad (21.30)$$

ossia

$$\boxed{\Sigma_x |\psi_{GHZ}\rangle = -|\psi_{GHZ}\rangle} \quad . \quad (21.31)$$

Lo stato $|\psi_{GHZ}\rangle$ è dunque autostato dell'operatore Σ_x con autovalore -1 . Pertanto, la previsione della meccanica quantistica è che una misura di Σ_x nello stato $|\psi_{GHZ}\rangle$ produca con certezza il risultato

$$\boxed{\boxed{\Sigma_x = -1}} \quad \text{se vale la **meccanica quantistica**,} \quad (21.32)$$

in contrasto con la previsione di eq. (21.29) di ogni teoria realistica locale. Vediamo pertanto che **una singola misura effettuata sulle tre particelle nello stato entangled GHZ consente di discriminare, univocamente, tra le due possibilità: la validità del realismo locale oppure delle previsioni della meccanica quantistica. Gli esperimenti condotti sugli stati GHZ escludono nuovamente il realismo locale**, come già indicato dagli esperimenti sulle disuguaglianze di Bell, e **confermano le previsioni della meccanica quantistica**.

Può essere utile evidenziare da dove ha origine la diversa previsione per la misura di Σ_x tra una teoria realistica locale e la meccanica quantistica. Nella teoria realistica locale, infatti, per i valori delle componenti di spin vale l'eq. (21.26), e dunque

$$\boxed{\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 = +\Sigma_x} \quad . \quad (21.33)$$

Nella meccanica quantistica, invece, si ha

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 &= (\sigma_x^A \sigma_y^B \sigma_y^C) (\sigma_y^A \sigma_x^B \sigma_y^C) (\sigma_y^A \sigma_y^B \sigma_x^C) = (\sigma_x^A \sigma_y^B) (\sigma_y^A \sigma_x^B) (\sigma_y^A \sigma_y^B \sigma_x^C) = \\ &= (\sigma_x^A \sigma_y^B) (\sigma_x^B) (\sigma_y^B \sigma_x^C) = -\sigma_x^A \sigma_x^B \sigma_x^C, \end{aligned} \quad (21.34)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla non commutatività degli operatori σ_x e σ_y , per i quali vale invece $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$. L'eq. (21.34), dunque, corrisponde a

$$\boxed{\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 = -\Sigma_x} \quad . \quad (21.35)$$

È precisamente la differenza di segno al secondo membro tra le eq. (21.33) e (21.35) che determina le diverse previsioni di una teoria realistica locale e della meccanica quantistica. Questa differenza segue dunque dalla non commutatività di σ_x e σ_y nella meccanica quantistica e dalla conseguente incompatibilità delle due osservabili. Tale incompatibilità impedisce che σ_x e σ_y possano essere, entrambe, elementi della realtà fisica.

21.4 Teorema di non clonazione e teletrasporto quantistico

Nelle sezioni precedenti abbiamo illustrato come il fenomeno dell'entanglement, che rappresenta uno degli aspetti più caratteristici della meccanica quantistica, abbia svolto un ruolo fondamentale nelle ricerche teoriche e sperimentali che, partendo dal lavoro di EPR e arrivando alle verifiche sperimentali delle disuguaglianze di Bell e degli stati GHZ, hanno consentito di escludere la validità del realismo locale e confermato invece le previsioni della meccanica quantistica.

Più di recente, tuttavia, oltre che in queste ricerche di carattere più fondamentale, il fenomeno dell'entanglement è stato utilizzato anche in numerose applicazioni pratiche, in particolare nel campo del **quantum computing**, ossia del calcolo quantistico. In questa sezione, discuteremo una di queste applicazioni che è particolarmente importante ed è nota con il suggestivo nome di **teletrasporto quantistico**. Prima di discutere il teletrasporto, tuttavia, è utile illustrare un importante teorema che ha rilevanti implicazioni nel contesto del quantum computing, il cosiddetto **teorema di non clonazione**.

21.4.1 Il teorema di non clonazione

Il teorema di non clonazione afferma che non è possibile produrre una copia di uno stato quantistico mantenendo lo stato originale.

Per dimostrare questo teorema, osserviamo innanzitutto che, se il processo di clonazione fosse possibile, vorrebbe dire che esiste un operatore unitario U che agisce su una coppia arbitraria di stati $|\psi\rangle|\varphi\rangle$ nel modo seguente:

$$U |\psi\rangle|\varphi\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle . \quad (21.36)$$

Dimostriamo che tale operatore unitario non può esistere. A tale scopo scegliamo due stati di base arbitrari, $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, e scriviamo dunque lo stato $|\psi\rangle$ nella forma

$$|\psi\rangle = \alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle . \quad (21.37)$$

L'eq. (21.36) implica allora:

$$\begin{aligned} U |\psi\rangle|\varphi\rangle &= U (\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle) |\varphi\rangle = \alpha U |\psi_1\rangle|\varphi\rangle + \beta U |\psi_2\rangle|\varphi\rangle = \\ &= \alpha |\psi_1\rangle|\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle|\psi_2\rangle . \end{aligned} \quad (21.38)$$

D'altra parte, si deve pure avere:

$$\begin{aligned} U |\psi\rangle|\varphi\rangle &= |\psi\rangle|\psi\rangle = (\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle) (\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle) = \\ &= \alpha^2 |\psi_1\rangle|\psi_1\rangle + \beta^2 |\psi_2\rangle|\psi_2\rangle + \alpha\beta (|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle + \beta |\psi_2\rangle|\psi_1\rangle) . \end{aligned} \quad (21.39)$$

Poichè i risultati di eq. (21.38) e (21.39) sono diversi tra loro, l'operatore unitario U non può esistere, ossia **uno stato quantistico non può essere copiato senza distruggere lo stato originale**.

Come vedremo nella prossima sezione, con il processo del **teletrasporto**, utilizzando l'entanglement, è possibile creare una copia dello stato originale a distanza, in principio anche arbitraria, ma cancellando lo stato originale, senza dunque violare il teorema di non clonazione.

Osserviamo anche che **se il processo di clonazione fosse possibile**, si potrebbe pensare di **utilizzare l'entanglement per trasmettere informazione a velocità superluminale**. Alice e Bob potrebbero infatti condividere ad esempio una coppia di particelle di spin $1/2$ nello stato di singoletto. Alice può decidere quindi di effettuare una misura sulla sua particella, ad esempio della componente di spin σ_z oppure della componente σ_x . A seguito della misura, la particella di Bob verrebbe a trovarsi istantaneamente nell'autostato di σ_z o σ_x con spin opposto. Se dopo la misura Bob potesse creare molte copie identiche della sua particella, potrebbe determinarne lo stato con precisione arbitraria e dunque sapere se Alice ha effettuato una misura di σ_z oppure di σ_x . Tale informazione sarebbe dunque stata trasmessa istantaneamente da Alice a Bob. Come conseguenza del teorema di non clonazione, invece, Bob non ha alcun modo di sapere se la sua particella si trovi in un autostato di σ_z oppure di σ_x , e dunque di conoscere quale misura Alice abbia deciso di effettuare.

21.4.2 Il teletrasporto quantistico

Se uno stato quantistico non può essere copiato, tuttavia esiste la possibilità di *teletrasportare* uno stato quantistico arbitrario, da una posizione all'altra, purchè la copia originale venga distrutta.

Mentre nella fantascienza il teletrasporto è solitamente descritto come la possibilità di trasferire un oggetto fisico da una posizione all'altra, il teletrasporto quantistico trasferisce soltanto informazione quantistica. In questo processo il trasmettitore (Alice) può anche non conoscere lo stato quantistico che viene trasmesso, così come può anche non conoscere la posizione del ricevitore (Bob). Tuttavia, per completare il teletrasporto quantistico, è necessario che un'informazione classica venga trasmessa da Alice a Bob. Per tale ragione, il teletrasporto quantistico non può avvenire a velocità maggiore della velocità della luce.

Discutiamo qui un semplice protocollo di **teletrasporto** considerando un generico sistema quantistico a due stati, detto **qubit** nel contesto del **quantum computing**. Questo sistema può essere rappresentato dai due stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ di una particella di spin $1/2$, oppure dai due stati $|H\rangle$ e $|V\rangle$ di polarizzazione di un fotone, o da qualunque altro sistema fisico. Per fissare le idee, consideriamo una particella

di spin $1/2$ e indichiamo dunque i due stati con $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Sia quindi

$$|\psi\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle \quad (21.40)$$

il generico stato della particella di Alice che deve essere teletrasportato. Come abbiamo già osservato, Alice può anche non conoscere quale sia tale stato, ossia i coefficienti α e β .

Per effettuare il teletrasporto è necessario che Alice e Bob condividano ciascuno una di due particelle che si trovano in uno stato entangled, per esempio nello stato di singoletto

$$|\psi_{-}\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B) \quad (21.41)$$

dove gli indici sottoscritti A e B denotano le particelle in possesso rispettivamente di Alice e Bob. Lo stato iniziale del sistema costituito dalle tre particelle, due di Alice ed una di Bob, è pertanto:

$$|\Phi\rangle_{A_1 A_2 B} = |\psi\rangle_{A_1} |\psi_{-}\rangle_{A_2 B} \quad (21.42)$$

ossia, esplicitamente,

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_{A_1 A_2 B} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha |+\rangle_{A_1} + \beta |-\rangle_{A_1} \right) \left(|+\rangle_{A_2} |-\rangle_B - |-\rangle_{A_2} |+\rangle_B \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha |+\rangle_{A_1} |+\rangle_{A_2} |-\rangle_B - \alpha |+\rangle_{A_1} |-\rangle_{A_2} |+\rangle_B + \right. \\ &\quad \left. + \beta |-\rangle_{A_1} |+\rangle_{A_2} |-\rangle_B - \beta |-\rangle_{A_1} |-\rangle_{A_2} |+\rangle_B \right). \end{aligned} \quad (21.43)$$

Alice effettua allora localmente, sulle sue due particelle, una **misura di Bell**, ossia una misura in uno degli stati entangled di Bell definiti in eq. (20.12) che qui riportiamo per comodità,

$$\begin{cases} |\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|+\rangle \pm |-\rangle|-\rangle) \\ |\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle \pm |-\rangle|+\rangle) \end{cases} \quad (21.44)$$

Per determinare l'effetto della misura effettuata da Alice, esprimiamo lo stato $|\Phi\rangle_{A_1 A_2 B}$ in termini degli stati di Bell per le particelle A_1 e A_2 . Si ha:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_{A_1 A_2 B} &= \frac{1}{2} \left[\alpha \left(|\phi_{+}\rangle_{A_1 A_2} + |\phi_{-}\rangle_{A_1 A_2} \right) |-\rangle_B - \alpha \left(|\psi_{+}\rangle_{A_1 A_2} + |\psi_{-}\rangle_{A_1 A_2} \right) |+\rangle_B + \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(|\psi_{+}\rangle_{A_1 A_2} - |\psi_{-}\rangle_{A_1 A_2} \right) |-\rangle_B - \beta \left(|\phi_{+}\rangle_{A_1 A_2} - |\phi_{-}\rangle_{A_1 A_2} \right) |+\rangle_B \right], \end{aligned} \quad (21.45)$$

ossia

$$|\Phi\rangle_{A_1 A_2 B} = \frac{1}{2} \left[|\phi_+\rangle_{A_1 A_2} \left(-\beta |+\rangle_B + \alpha |-\rangle_B \right) + |\phi_-\rangle_{A_1 A_2} \left(\beta |+\rangle_B + \alpha |-\rangle_B \right) + \right. \\ \left. - |\psi_+\rangle_{A_1 A_2} \left(\alpha |+\rangle_B - \beta |-\rangle_B \right) - |\psi_-\rangle_{A_1 A_2} \left(\alpha |+\rangle_B + \beta |-\rangle_B \right) \right] . \quad (21.46)$$

Dall'eq. (21.46) vediamo allora, innanzitutto, che Alice, a seguito della misura di Bell, trova le sue due particelle in uno dei quattro stati di Bell con la stessa probabilità $p = 1/4$.

A questo punto, Alice comunica a Bob il risultato della sua misura utilizzando un **canale di trasmissione classico**.

L'eq. (21.46) mostra che, se Alice ha trovato le sue due particelle nello stato $|\psi_-\rangle_{A_1 A_2}$, allora Bob sa che la sua particella si trova nello stato $|\psi\rangle$ di eq. (21.40), ossia **lo stato quantistico è stato teletrasportato**.

Inoltre, anche se Alice trova le sue particelle nello stato $|\psi_+\rangle_{A_1 A_2}$ o in uno degli stati $|\phi_\pm\rangle_{A_1 A_2}$, allora Bob, conoscendo il risultato della misura, può effettuare una trasformazione unitaria sulla sua particella per portarla nello stato $|\psi\rangle$, completando in tal modo il teletrasporto. Osserviamo infatti che:

$$\begin{aligned} \sigma_x (\beta |+\rangle + \alpha |-\rangle) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle = |\psi\rangle , \\ \sigma_z (\alpha |+\rangle - \beta |-\rangle) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle = |\psi\rangle , \\ i\sigma_y (-\beta |+\rangle + \alpha |-\rangle) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle = |\psi\rangle . \end{aligned} \quad (21.47)$$

Allora, a seconda del risultato della misura comunicatogli da Alice, Bob porta la sua particella nello stato $|\psi\rangle$ effettuando l'opportuna trasformazione in base alla seguente tabella:

Risultato della misura di Alice	Operazione sullo stato $ \psi\rangle_B$ di Bob
$ \phi_+\rangle_{A_1 A_2}$	$i\sigma_y \psi\rangle_B$
$ \phi_-\rangle_{A_1 A_2}$	$\sigma_x \psi\rangle_B$
$ \psi_+\rangle_{A_1 A_2}$	$\sigma_z \psi\rangle_B$
$ \psi_-\rangle_{A_1 A_2}$	$ \psi\rangle_B$

Il teletrasporto, dunque, in tutti i casi è così completato.

21.5 Il problema della misura

Nella descrizione del mondo fisico che ci presenta la meccanica quantistica, l'aspetto che più si distingue dalla fisica classica è certamente quello espresso dal **principio di sovrapposizione**. Le proprietà fisiche di un sistema non sono, in generale, definite, dunque non esistono, e il sistema si trova invece in una sovrapposizione di stati con diverse proprietà. Così un elettrone in un atomo non occupa una posizione definita nello spazio, nè possiede un'energia determinata, nè una determinata velocità. Il valore del suo spin in una data direzione non è $+\hbar/2$ o $-\hbar/2$, ma dovremmo piuttosto dire che è allo stesso tempo $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$. E lo stesso vale per qualunque altro sistema fisico.

Di fronte a questo radicale cambiamento della visione del mondo che ci presenta la meccanica quantistica, nonostante le conferme sperimentali ci si è continuati a porre per lungo tempo, come EPR, la domanda se questa rappresentazione del mondo fisico fosse effettivamente corretta. O se, invece, la **meccanica quantistica** non ci fornisse piuttosto una **descrizione incompleta del mondo fisico**, ossia se le proprietà fisiche non fossero sempre reali, e il loro valore, indipendentemente dalla misura, non fosse sempre ben determinato da un insieme di **variabili nascoste**.

Come abbiamo visto, la risposta a questa domanda è giunta infine dagli esperimenti. Le violazioni osservate in molteplici esperimenti delle **disuguaglianze di Bell**, risultate sempre in accordo con le previsioni della meccanica quantistica, **escludono la validità del realismo locale**, la possibilità cioè che il mondo fisico possa essere descritto da una qualunque teoria locale a variabili nascoste⁷.

Secondo la meccanica quantistica, **le proprietà fisiche, che non sono reali, vengono ad esistere soltanto a seguito di una misura**. Nell'esperimento di interferenza degli elettroni, ad esempio, dobbiamo ammettere che l'elettrone passa simultaneamente attraverso entrambe le fenditure, e dunque la sua posizione nello spazio non è definita. Tuttavia, quando andiamo ad osservare l'elettrone, lo troviamo sempre in un posizione bene definita, non lo vediamo *qui e lì*. Allo stesso modo, l'energia di un elettrone in un atomo non è definita, e l'elettrone può avere diverse energie con diverse probabilità. Tuttavia, quando andiamo a misurare l'energia dell'elettrone, il risultato è sempre un valore ben determinato.

Per descrivere questa evidenza sperimentale, nella meccanica quantistica si assume che l'evoluzione nel tempo dei sistemi fisici, usualmente descritta dall'operatore unitario di evoluzione temporale determinato dall'equazione di Schrödinger, nel momento in cui si esegue una misura si interrompe. Questa assunzione definisce il cosiddetto **collasso della funzione d'onda, o del vettore di stato**. Formalmente si assume che, se prima della misura di un'osservabile A il sistema si trovava in una sovrapposizione di autostati $|a\rangle$ dell'operatore A , e dunque il valore dell'osservabile

⁷È bene osservare, tuttavia, che poichè la validità delle disuguaglianze di Bell richiede l'assunzione non solo del realismo ma anche dell'ipotesi di località, gli esperimenti sulle disuguaglianze di Bell non escludono a priori la validità di *teorie a variabili nascoste non locali*. Una di queste teorie, ad esempio, è la cosiddetta *meccanica bohmiana*, o *teoria dell'onda pilota*.

A non esisteva prima della misura, tuttavia per effetto della misura, che ha prodotto come risultato uno degli autovalori a' , il vettore di stato *collapsa* nel corrispondente autostato $|a'\rangle$:

$$\boxed{|\varphi\rangle = \sum_a c_a |a\rangle \xrightarrow[a']{\text{Misura di } A} |a'\rangle} \quad (21.48)$$

È dunque la misura stessa che interrompe l'usuale evoluzione temporale unitaria descritta dall'equazione di Schrödinger e produce il collasso. Questa descrizione del processo di misura e del conseguente collasso del vettore di stato è quella assunta dal gruppo di fisici fondatori della meccanica quantistica che si raccoglievano attorno a Bohr, tra cui principalmente Heisenberg e Born, e viene pertanto detta **interpretazione di Copenhagen** della meccanica quantistica.

Se è indubbio che l'interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica conduca a previsioni che sono risultate sempre in accordo con gli esperimenti, appare tuttavia altrettanto evidente che l'idea del collasso presenti **difficoltà concettuali**. Se è infatti la misura a provocare il collasso, si pone la domanda: **cosa è dunque una misura?**

Nell'interpretazione di Copenhagen si pensa alla misura come ad un'interazione tra uno **strumento di misura**, che è un **sistema macroscopico** ben descritto dalle leggi della fisica classica, e l'**oggetto della misura**, che è invece un **sistema microscopico** che segue le leggi della meccanica quantistica. Ma questa distinzione tra sistemi macroscopici classici e sistemi microscopici quantistici nella meccanica quantistica non esiste. **Tutti i sistemi obbediscono alle leggi della meccanica quantistica, grandi o piccoli che siano.**

Non c'è alcun dubbio che gli effetti quantistici siano più evidenti nei sistemi microscopici, e possano invece solitamente essere trascurati, con ottima approssimazione, nella descrizione del mondo macroscopico. Ma questa differenza è solo di carattere pratico, non concettuale. Nella meccanica quantistica non c'è infatti nessuna scala che separi il mondo microscopico da quello macroscopico, per il quale valgano dunque leggi distinte. Non è forse lo strumento di misura anch'esso costituito da atomi, dunque da elettroni, protoni e neutroni che ubbidiscono tutti alle leggi della meccanica quantistica? Cosa è dunque veramente una *misura*, se non anch'essa un'ordinaria interazione tra la particella, oggetto della misura, e i molti atomi che compongono lo strumento di misura? E perchè dunque questa interazione dovrebbe interrompere l'evoluzione temporale, definita dall'equazione di Schrödinger per il sistema completo? Ma se riteniamo che la misura non sia altro che un'usuale interazione, per quanto complessa, tra sistemi fisici, la domanda che si pone è: **cosa dunque provoca il collasso?**

Queste considerazioni sintetizzano quello che viene chiamato **il problema della misura** in meccanica quantistica. Una trattazione più approfondita del problema della misura e dei tentativi di risoluzione che sono stati proposti va ben oltre il nostro scopo. Ci limitiamo qui ad osservare che, ad oggi, nessuna di queste soluzioni ha

raccolto il consenso della maggior parte dei fisici, ed il problema della misura viene dunque considerato tuttora aperto.

Le soluzioni proposte al problema della misura si dividono sostanzialmente in due categorie. La prima categoria raccoglie diverse **interpretazioni della meccanica quantistica**, alternative dunque all'interpretazione di Copenhagen, nelle quali si assume sempre che non avvenga alcun collasso. Tra queste si deve menzionare l'**interpretazione a molti mondi**, proposta da Everett, secondo la quale la funzione d'onda evolve sempre unitariamente, senza collasso, e tutti i possibili esiti si realizzano in rami distinti dell'universo. Ma vi sono poi anche altre interpretazioni proposte, tra cui l'*interpretazione a molti menti*, l'*interpretazione a storie coerenti*, l'*interpretazione relazionale* e il cosiddetto *QBism* (*Quantum Bayesianism*).

Esiste poi una seconda categoria di soluzioni proposte per superare il problema della misura che consiste invece in **teorie alternative alla meccanica quantistica**, le quali conducono dunque in linea di principio a diverse previsioni e possono pertanto essere verificate o invalidate negli esperimenti. Tra queste, rientrano le **teorie con variabili nascoste non locali**, come la *meccanica bohmiana*, secondo le quali non avviene alcun collasso perché le proprietà fisiche sono reali e dunque preesistono alla misura. Esistono poi le **teorie a collasso oggettivo**, che prevedono invece che il collasso della funzione d'onda avvenga e sia un processo reale, con un'origine fisica, come la *teoria GRW* o i *modelli di collasso gravitazionale* proposti da Penrose.

Come abbiamo detto, tuttavia, ad oggi non esiste una risposta condivisa al problema della misura. La questione è aperta e, se la soluzione sarà fornita da una teoria alternativa alla meccanica quantistica, la sua conferma ci potrà arrivare, sperabilmente in un prossimo futuro, dagli esperimenti.