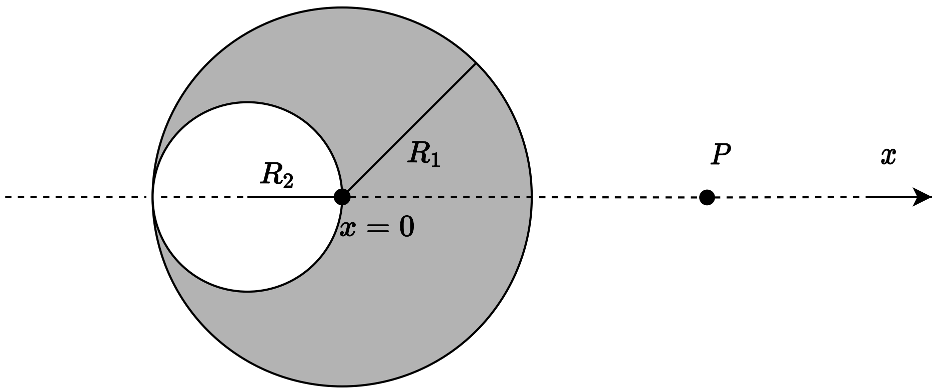
Prova scritta - 18 Giugno 2020

Esercizio 1

Un corpo sferico di raggio $R_1 = 10$ cm, centrato in $x = 0$, è uniformemente carico con densità $\rho = 10^{-7}$ C/m^3 in tutto il volume tranne in una cavità interna sferica di raggio $R_2 = R_1/2$ con centro in $x = -R_2$. . Calcolare :

1. La carica totale del sistema (5 pt.);
2. Il campo elettrico nel punto P di coordinate $x_P = 20$cm (5 pt.);
3. La differenza di potenziale tra i punti $\Delta V = V(x = -R_1) - V(x = 0)$ (7 pt.).

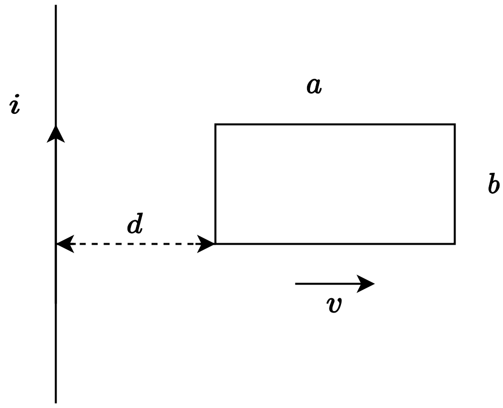


$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$F/m

Esercizio 2

Un filo indefinito rettilineo è percorso da corrente $I = i_0 \cos(\omega t)$. Una spira rettangolare di lati a e b, resistenza R e induttanza trascurabile è vincolata a distanza d dal filo. Calcolare :

1. I campo magnetico generato dal filo (5 pt.);
2. L'espressione della corrente che circola nella spira per $t > 0$ (6 pt.);
3. L'espressione della forza agente sulla spira ferma (5 pt.).



1 Soluzione esercizio 1

1. Possiamo considerate il corpo con la cavità equivalente ad un sistema con una sfera S_1 piena con densità di carica rho di raggio R_1 con una sfera S_2 con densità di carica $-rho$ di raggio R_2 al posto della cavità.

   La carica totale sarà la somma delle due cariche delle due sfere

$$Q = Q_{S_1} + Q_{S_2} = \int \rho dV_1 - \int \rho dV_1 = \frac{4}{3}\rho\pi(R_1^3 - R_2^3) = 3.67 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C} \quad (5pt.); \tag{1}$$

2. Il campo elettrico è dato dalla somma dei campi elettrici prodotti da S_1 e S_2. Esaminiamo solo il campo elettrico l'ungo l'asse x. Il campo elettrico prodotto dalla sfera S_1 nel punto P dalla legge di Gauss

$$\int \vec{E}_1^{ext} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \tag{2}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho R_1^3}{3x_p^2 \epsilon_0}\hat{x}\,. \tag{3}$$

   Mentre il campo elettrico relativo alla sfera S_2 nel punto P

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho R_2^3}{3(x_p + R_2)^2\epsilon_0}\hat{x}\,. \tag{4}$$

   Il campo elettrico nel punto P totale è nella direzione $\hat{x}$, il suo modulo è uguale

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R_1^3}{x_p^2} - \frac{R_2^3}{(x_p + R_2)^2}\right) = 86.6 N/C \quad (5pt.). \tag{5}$$

3. Il campo elettrico generato dalla sfera S_1 nello spazio all'interno della sfera S_2 (solo lungo l'asse x) é uguale a

$$\vec{E}_1(-R_1 < x < 0) = \frac{\rho x}{3\epsilon_0}\hat{x}\,. \tag{6}$$

   Il campo elettrico generato dalla sfera S_2 al suo interno è

$$\vec{E}_2(-R_1 < x < 0) = -\frac{\rho(x + R_2)}{3\epsilon_0}\hat{x}\,. \tag{7}$$

   Il campo elettrico totale all'interno della sfera S_2 (all'interno della cavità) è quindi la somma dei due contributi

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2 \hat{x}\,. \tag{8}$$

   La differenza di potenziale quindi

$$\Delta V = V(x = -R_1) - V(x = 0) = -\int_0^{-R_1} \vec{E} \cdot d\vec{x} \tag{9}$$

$$= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2 \int_{-R_1}^{0} dx = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2 R_1 = -18.8V \quad (7pt.) \tag{10}$$

2 Soluzione esercizio 2

1. Il campo magnetico prodotto da un filo indefinito può essere calcolato usando la legge di Ampere

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I\,, \tag{11}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi x}\cos(\omega t)\hat{u}_\phi. \quad (5pt.) \tag{12}$$

   Dove $\hat{u}_\phi$ é il versore entrante al piano della spira.

2. Il flusso del campo magnetico attraverso al spira Σ con normale $\hat{n}$

$$\Phi(B) = \int \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma \tag{13}$$
$$= \int_0^b dy \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i_0}{2\pi x} cos(\omega t) dx \tag{14}$$
$$= \frac{\mu_0 i_0 b}{2\pi} \cos(\omega t) \log\left(1 + \frac{a}{d}\right). \tag{15}$$

La corrente indotta nella spira (scegliendo il verso di percorrenza orario)

$$i = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} \tag{16}$$
$$= \frac{\mu_0 i_0 b}{2\pi R} \omega \sin(\omega t) \log\left(1 + \frac{a}{d}\right) \quad (6pt.). \tag{17}$$

3. La forza di Lorentz $F = i\vec{l} \times \vec{B}$ è non nulla solo nei lati paralleli al filo. In $x = d$ la forza è uguale a

$$\vec{F}(x = d) = -\left(\frac{\mu_0 i_0 b}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{Rd} \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) \log\left(1 + \frac{a}{d}\right) \hat{x} \tag{18}$$

Il segno meno indica che la forza in d attrae la spira al filo se $0 < t < \frac{\pi}{2\omega}$. mentre in $x = d + a$

$$\vec{F}(x = d + a) = \left(\frac{\mu_0 i_0 b}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R(d + a)} \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) \log\left(1 + \frac{a}{d}\right) \hat{x} \tag{19}$$

ed è repulsiva nell'intervallo temporale $0 < t < \frac{\pi}{2\omega}$. La risultante delle forze è quindi uguale a

$$\vec{F} = \vec{F}(x = d) + \vec{F}(x = d + a) \tag{20}$$
$$= \left(\frac{\mu_0 i_0 b}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R} \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) \log\left(1 + \frac{a}{d}\right) \left[\frac{1}{d + a} - \frac{1}{d}\right] \hat{x} \tag{21}$$
$$= \left(\frac{\mu_0 i_0 b}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{\omega}{2} \sin(2\omega t) \log\left(1 + \frac{a}{d}\right) \left[\frac{1}{d + a} - \frac{1}{d}\right] \hat{x} \quad (5pt.) \tag{22}$$