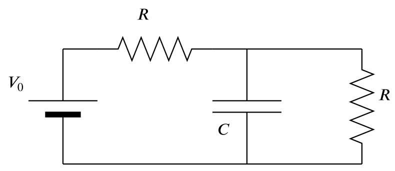
Prova scritta - 11 febbraio 2020

Esercizio 1

Un condenzatore scarico di capacità $C = 0.002F$ viene collegato al circuito in figura al tempo $t = 0$. Il generatore eroga $V_0 = 2$ V e le resistenze sono entrambe uguali a $R = 100\,\Omega$. Calcolare

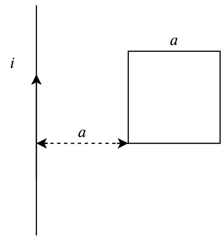
- Le correnti che circolano nel circuito (4 punti);
- Le correnti che circolano nel circuito nel limite $t \to \infty$ (3 punti);
- La carica totale immagazzinata nel condensatore al tempo infinito (4 punti).



Esercizio 2

Una spira quadrata di lato $a = 20$ cm e distante a da un filo indefinito percorso da corrente $i = i_0 e^{-t/\tau}$ con $i_0 = 10$ A e $\tau = 0.1$ s ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A). La spira è vincolata a restare ferma nella sua posizione. Calcolare:

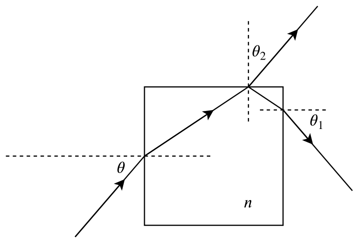
- La corrente che circola nel circuito (6 punti);
- L'energia dissipata per effetto Joule se la spira ha resistenza $R = 2\,\Omega$ (5 punti);



Esercizio 3

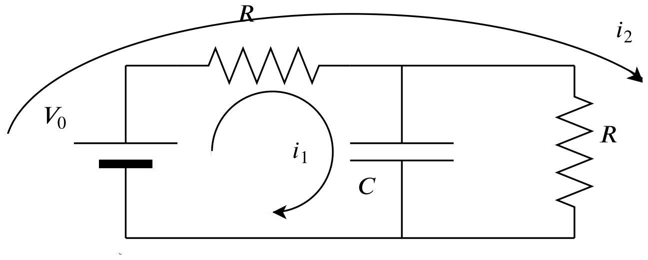
Un sottile fascio di luce incide con angolo di incidenza $\theta = \pi/3$ su una faccia di un cubo di giaccio (indice di rifrazione $n = 1.31$) come in figura . Calolare

- L'angolo θ_2 con cui il raggio di luce esce dalla superficie superiore (5 punti)
- L'angolo θ_1 con cui il raggio di luce esce dalla superficie opposta a quella d'entrata (4 punti)
- Per quale valori di n il fascio di luce si riflette totalmente sulla superficie superiore senza rifrangere (2 punti).



1 Soluzione esercizio 1

Consideriamo le due correnti come in figura



dove i_1 circola nella maglia con in generatore, la resistenza e il condensatore e i_2 circola nella maglia con in generatore e le due resistenze. Usando la legge di kirchhoff sulle maglie otteniamo

$$\begin{cases} V_0 = R(i_1 + i_2) + \frac{q}{C} \\ V_0 = R(i_1 + i_2) + Ri_2\,. \end{cases} \tag{1}$$

Al tempo zero il condensatore è scarico quindi $q(t = 0) = q_0 = 0$ risolvendo il sistema a $t = 0$ per $i_{10} = i_1(t = 0)$ e $i_{20} = i_2(t = 0)$ otteniamo

$$\begin{cases} V_0 = R(i_{10} + i_{20}) + 0 \\ V_0 = R(i_{10} + i_{20}) + Ri_{20} \end{cases} \implies \begin{cases} i_{10} = V_0/R \\ i_{20} = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

Dalla seconda equazione del sistema (1) ricaviamo

$$i_2 = \frac{V_0}{2R} - \frac{i_1}{2} \tag{3}$$

Derivando rispetto al tempo la prima equazioni del sistema (1) e imponendo $\frac{dq}{dt} = i_1$ otteniamo

$$0 = \frac{R}{2}\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C} \tag{4}$$

$$\int_{V_0/R}^{i_1(t)} \frac{di_1}{i_1} = \int_0^t -\frac{2}{RC}dt \tag{5}$$

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}\,. \tag{6}$$

Invece per la corrente i_2

$$i_2(t) = \frac{V_0}{2R}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\,. \qquad \text{(4 punti)} \tag{7}$$

Nel limite $t \to \infty$ otteniamo

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = \frac{V_0}{2R} = 0.01A\,. \qquad \text{(3 punti)} \end{cases} \tag{8}$$

La carica del condensatore è legata ala corrente che circola in esso

$$\frac{dq}{dt} = i_1 = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{2t}{RC}} \tag{9}$$

$$\int_0^{q_\infty} dq = \int_0^\infty \frac{V_0}{R}e^{\frac{-2t}{RC}} \tag{10}$$

$$q_\infty = \frac{V_0 C}{2} = 0.002C\,. \qquad \text{(4 punti)} \tag{11}$$

2 Soluzione esercizio 2

Il campo magnetico generato dal filo si può ricavare dalla legge di Ampere considerando una circonferenza di raggio x centrata sull'asse del filo percorso da corrente i

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \tag{12}$$

$$B 2\pi x = \mu_0 i \tag{13}$$

$$B = \frac{\mu i}{2\pi x} \, . \tag{14}$$

Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è

$$\Phi(B) = \int \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = a \int_a^{2a} \frac{\mu i}{2\pi x} dx = a \frac{\mu i}{2\pi} \log(2) = \frac{a\mu i_0}{2\pi} e^{-t/\tau} \log(2) \, . \tag{15}$$

La forza elettromotrice è data dalla legge di Faraday

$$\xi = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{a\mu i_0}{2\pi\tau} e^{-t/\tau} \log(2) \, . \tag{16}$$

La corrente circola in senso antiorario ed è uguale a

$$i = \frac{\xi}{R} = \frac{a\mu i_0}{2\pi\tau R} e^{-t/\tau} \log(2) \, . \qquad \text{(6 punti)} \tag{17}$$

La potenza dissipata per effetto Joule

$$P = \xi^2/R = \left(\frac{a\mu i_0}{2\pi\tau}\right)^2 \frac{1}{R} e^{-2t/\tau} (\log(2))^2 \, . \tag{18}$$

L'energia

$$W = \int_0^\infty P dt = \left(\frac{a\mu i_0}{2\pi\tau}\right)^2 \frac{1}{R} e^{-2t/\tau} (\log(2))^2 \Big|_0^\infty \tag{19}$$

$$= \left(\frac{a\mu i_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2\tau R} (\log(2))^2 = 1.922e - 13 \, . \qquad \text{(5 punti)} \tag{20}$$

3 Soluzione esercizio 3

Dalla legge di Snell ricaviamo l'angolo di rifrazione θ'

$$\sin\theta' = \frac{1}{n} \sin\theta \, , \tag{21}$$

l'angolo α che il fascio di luce forma con la superfice superiore é $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta'$, quindi l'angolo θ_2 sarà uguale a

$$\sin\theta_2 = n \sin\alpha = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = n \cos\theta' = n\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}} = \sqrt{n^2 - \sin^2\theta} \tag{22}$$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}\right) = 1.386 \qquad \text{(5 punti).} \tag{23}$$

L'angolo di incidenza sulla parete opposta alla parete di entrata è uguale a θ' quindi l'angolo di uscita del fascio di luce attraverso la faccia opposta è uguale a

$$\theta_1 = \theta = \pi/3 \qquad \text{(4 punti)} \tag{24}$$

l'angolo di uscita dalla superficie superiore è

$$\theta_2 = \arcsin\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}\right) \tag{25}$$

Se $n > \sqrt{1 + \sin^2\theta} = \sqrt{7/4}$ non esistono soluzioni reali di θ_2 e si avrà una riflessione totale del raggio di luce..
Se $n > \sqrt{2}$ non esistono soluzioni reali di θ_2 per qualsiasi valore di θ (2 punti).