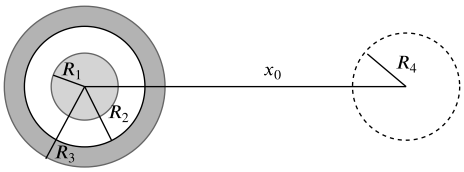
Prova scritta - 21 gennaio 2020

Esercizio 1

Su una sfera di raggio $R_1 = 40$ cm è distribuita una carica con una densità volumetrica $\rho(r) = q_0(1 - e^{-r^3/R_1^3})$, con $q_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ C . La sfera è circondata da un guscio sferico di raggio interno $R_2 = 70$ cm ed esterno $R_3 = 90$ cm costituito da un materiale conduttore. Calcolare

- Il valore della carica Q presente sulle superfici del guscio (4 punti)
- Il potenziale V_{R_1} nel punto R_1 (imporre il potenziale all'infinito uguale a zero) (4 punti)
- il flusso del campo elettrico attraverso una sfera di raggio $R_4 = 0.3$ cm con il centro distante $x_0 = 2$ m dal centro della sfera di raggio R_1 (3 punti)

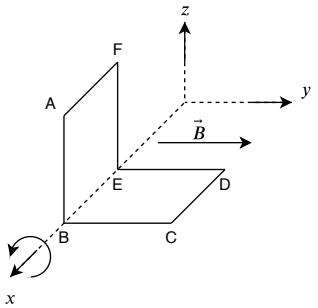


$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m

Esercizio 2

Si consideri spira in figura composta dai segmenti AB,BC,CD,DE,EF e FA tutti di lunghezza uguale $\ell = 20$ cm. Al tempo $t_0 = 0$ i segmenti AB ed FE sono paralleli all'asse z, AF e CD sono paralleli all'asse x, BC e DE sono paralleli all'asse y. La spira ha una resistenza complessiva pari a $R = 500\,\Omega$ e ruota con velocità angolare $\omega = 100$ rad/s costante attorno all'asse x. Tutto il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.5$ T diretto lungo l'asse y. Calcolare:

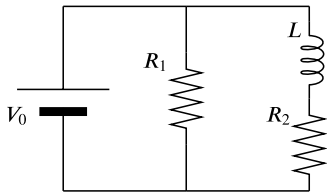
- la forza elettromotrice al tempo $t = \pi/(2\omega)$ (4 punti)
- La corrente massima che circola nella spira (4 punti)
- I tempi per cui la corrente è nulla (3 punti)



Esercizio 3

Un generatore di corrente che eroga una differenza di potenziale $V_0 = 150$ V viene collegato al tempo $t = 0$ al circuito in figura. Il circuito è composto da due resistenze uguali $R_1 = R_2 = R = 50\,\Omega$ e un induttore $L = 5$ H. Al tempo $t = 0$ la corrente che passa attraverso la resistenza R_1 è uguale a $i_{R_1}(t = 0) = V_0/R$ mentre la corrente che passa nella resistenza R_2 è $i_{R_2}(t = 0) = 0$. Calcolare:

- La corrente che circola nella resistenza R_1 (3 punti)
- La corrente che circola nella resistenza R_2 in funzione del tempo (4 punti)
- Le correnti che circolano nel circuito a $t \to \infty$ (4 punti)



1 Soluzione esercizio 1

La carica contenuta nella sfera di raggio R_1 è

$$Q = \int_{r<R_1} \rho(r) dV = \int_0^{R_1} q_0 (1 - e^{-r^3/R_1^3}) 4\pi r^2 dr \tag{1}$$

$$= q_0 4\pi \left[\frac{r^3}{3} + \frac{R_1^3}{3} e^{-r^3/R_1^3} \right]_0^{R_1} = q_0 4\pi \frac{R_1^3}{3e} = 4.93 \cdot 10^{-8}\,, \quad (4\,punti) \tag{2}$$

La carica sulla superfice interna del guscio è $-Q$ mentre nella superfice esterna Q. Il campo elettrico per $R_2 < r < R_3$ è nullo perché il guscio è costituito da un materiale conduttore

$$\vec{E}_{int} = 0\,, \tag{3}$$

nella regione $R_1 < r < R_2$ e per $r > R_3$ è

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{u}_r \tag{4}$$

Il potenziale nel sulla superfice R_1 si calcola come

$$V_{R_1} - V(\infty) = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{5}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} E_{ext} dr + \int_{R_2}^{R_3} E_{int} dr + \int_{R_3}^{\infty} E_{ext} dr \tag{6}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr + 0 + \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr \tag{7}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right] = 967\,V. \quad (4\,punti) \tag{8}$$

Il flusso del campo elettrico attraverso la circonferenza di raggio R_4 usando la legge di Gauss

$$\Phi(E) = \int_{C_{R_4}} \vec{E} \cdot d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}, \tag{9}$$

dove q è la carica contenuta all'interno della superfice. All'interno della circonferenza di raggio R_4 non ci sono cariche elettriche quindi

$$\Phi(E) = 0 \quad (3\,punti) \tag{10}$$

2 Soluzione esercizio 2

Al tempo t l'angolo tra la normale alla superficie ABEF ed il campo magnetico $\vec{B}$ è uguale a ωt mentre l'angolo tra la normale alla superficie BCDE e B è $\frac{\pi}{2} + \omega t$. Il flusso di $\vec{B}$ attraverso la superficie delimitata dalla spira si può scrivere come il flusso attraverso il quadrato ABEF più il flusso attraverso BCDE

$$\Phi(B) = \Phi_{ABEF}(B) + \Phi_{BCDE}(B) \tag{11}$$

$$= \int_{ABEF} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{BCDE} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma \tag{12}$$

$$= B \left[\int_{ABEF} \cos(\omega t)\, d\Sigma + \int_{BCDE} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) d\Sigma \right] \tag{13}$$

$$= B\ell^2 \left[\cos(\omega t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) \right] \tag{14}$$

$$= B\ell^2 \left[\cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right] \tag{15}$$

La forza elettromotrice indotta

$$\xi = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = -B\ell^2 \omega \left[\cos(\omega t) - \sin(\omega t) \right]\,, \tag{16}$$

per $t = \pi/(2\omega)$ è uguale a

$$\xi(t = \pi/(2\omega)) = B\ell^2\omega = 2\,V\,, \quad (4\,punti) \tag{17}$$

La corrente é uguale a

$$i = \frac{\xi}{R} = -\frac{B\ell^2\omega}{R}\left[\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right]\,. \tag{18}$$

Il massimo del modulo della corrente si ha quando la derivata è zero

$$\frac{di}{dt} = -\frac{B\ell^2\omega}{R}\left[-\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right] = 0 \tag{19}$$

che si ottiene per

$$\omega t = \frac{3\pi}{4} + n\pi \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

La corrente massima sarà quindi

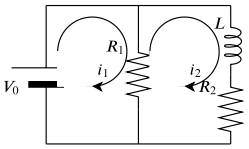
$$|i_{max}| = \frac{B\ell^2\omega}{R}\sqrt{2} = 5.657 \cdot 10^{-3}\,A. \quad (4\,punti) \tag{21}$$

Mentre la corrente è zero quando

$$\cos(\omega t) - \sin(\omega t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{\pi}{4\omega} + \frac{n\pi}{\omega} \quad (3\,punti) \tag{22}$$

3 Soluzione esercizio 3

Per risolvere il circuito consideriamo le due maglie in figura dove circola i_1 e i_2



L'equazione per la maglia 1 è

$$V_0 = R(i_1 - i_2)\,, \tag{23}$$

Da cui ricaviamo la corrente che passa per la resistenza R_1

$$i_{R_1} = i_1 - i_2 = \frac{V_0}{R} = 3\,A\,. \quad (3\,punti) \tag{24}$$

La corrente che circola nella resistenza R_2 è uguale a $i_{R_2} = i_2$, per ricavarla dobbiamo considerare le leggi di kirchhoff

$$\begin{cases} V_0 = R(i_1 - i_2) \\ -L\frac{di_2}{dt} = R(i_2 - i_1) + Ri_2\,. \end{cases} \tag{25}$$

Le condizioni iniziali $i_{R_1}(t=0) = V_0/R$ e $i_{R_2}(t=0) = 0$ implicano che

$$\begin{cases} i_1(t=0) = V_0/R \\ i_2(t=0) = i_{R_2}(t=0) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $i_2 = i_1 - V_0/R$ e la sostituiamo alla seconda equazione ottenendo

$$L\frac{di_1}{dt} = 2V_0 - Ri_1 \tag{27}$$

La cui soluzione è

$$i_1 = \frac{V_0}{R}\left(2 - e^{-Rt/L}\right)\,. \tag{28}$$

Mentre la corrente i_2 è

$$i_2 = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)\,. \quad (4\,punti) \tag{29}$$

Per $t \to \infty$ l'effetto dell'induttore va a zero e il circuito si comporta come il parallelo di due resistenze.

$$\begin{cases} i_1(t\to\infty) = 2V_0/R = 6\,A \\ i_2(t\to\infty) = V_0/R = 3\,A \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} i_{R_1}(t\to\infty) = V_0/R \\ i_{R_2}(t\to\infty) = V_0/R \end{cases} \quad (4\,punti) \tag{30}$$