Secondo Esonero - 17 gennaio 2020

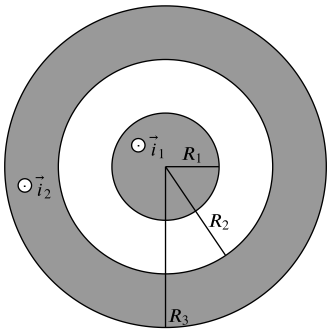
Esercizio 1

Un cilindro di raggio $R_1 = 1cm$ e lunghezza indefinita é contenuto all'interno di una guaina cilindrica coassiale di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3. Il cilindro interno é percorso da corrente parallela all'asse del cilindro i_1, mentre il cilindro esterno è percorso da corrente i_2 nella stessa direzione di i_1. Sapendo che la circuitazione attraverso una circonferenza di raggio r_1 ($R_1 < r_1 < R_2$) vale $C_1 = 20\pi \cdot 10^{-7}$ Tm e che la circuitazione attraverso una seconda circonferenza di raggio r_2 ($r_2 > R_3$) vale $C_2 = 40\pi \cdot 10^{-7}$ Tm calcolare:

- i_1 e i_2 (4 punti)

Sapendo che la corrente i_1 ha densità di corrente $J = kr$ e che il cilindro costituito da un materiale con permeabilità magnetica $\mu_r = 8 \cdot 10^3$ calcolare

- k (5 punti)
- Il campo magnetico per $r = R_1/2$ (5 punti)

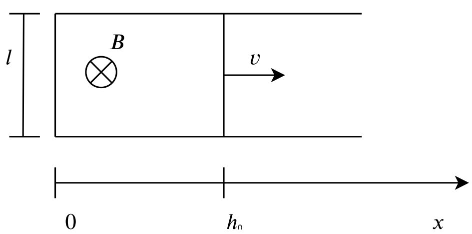


$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A

Esercizio 2

Una sbarra di lunghezza $l = 20$ cm si muove senza attrito lungo due binari con velocità costante $v = 4$ m/s formando un circuito chiuso rettangolare. La sbarretta e i binari sono dei conduttori con sezione trascurabile e rapporto resistività ρ su sezione s uguale a $k = \rho/s = 0.2\,\Omega$/m. Tutto il circuito è immerso in un campo magnetico $B = 0.3$ T perpendicolare al piano del circuito come in figura. Al tempo $t_0 = 0$ la sbarra si trova a distanza $h_0 = 30$ cm dal lato opposto del circuito. Trascurando l'auto induzione del circuito calcolare:

- La forza elettromotrice indotta nel circuito (4 punti)
- La corrente che circola nel circuito al tempo $t_1 = 0.2s$ (5 punti)
- L'energia dissipata per effetto Joule dal tempo $t_0 = 0$ al tempo t_1 (5 punti)
- La forza $\vec{F}_e$ necessaria per muovere la sbarretta con velocità costante v (5 punti)



1 Soluzione esercizio 1

Usando la legge di Ampere per un circonferenza di raggio r_1 otteniamo

$$C_1 = B_1 2\pi r_1 = \mu_0 i_1 \implies i_1 = \frac{C_1}{\mu_0} = 5A. \text{ (2 punti)} \tag{1}$$

Ripetendo lo stesso procedimento per una circonferenza di raggio r_2

$$C_2 = B_2 2\pi r_2 = \mu_0(i_1 + i_2) \implies i_2 = \frac{C_2}{\mu_0} - i_1 = 5A. \text{ (2 punti)} \tag{2}$$

La corrente i_1 deve essere uguale al flusso di J attraverso la superfice perpendicolare all'asse del cilindro

$$i_1 = \int \vec{J} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_0^{R_1} kr 2\pi r dr = \frac{2}{3} k\pi R_1^3 \implies k = \frac{3i_1}{2\pi R_1^3} = 2.387 \cdot 10^6 \text{ A/m}^3. \text{ (5 punti)} \tag{3}$$

Infine applicando la legge di Ampere lungo una circonferenza di raggio $R_1/2$ in un mezzo con permeabilità magnetica μ_r

$$B\pi R_1 = \mu_0 \mu_r \int_0^{R_1/2} k 2\pi r^2 dr\,, \tag{4}$$

$$B\pi R_1 = \mu_0 \mu_r k 2\pi \frac{R_1^3}{24}\,, \tag{5}$$

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{i_1}{\pi R_1} \frac{1}{8} = 0.2\,T\,, \text{ (5 punti)} \tag{6}$$

2 Soluzione esercizio 2

La posizione della sbarra al tempo t è

$$h(t) = h_0 + vt\,. \tag{7}$$

Il flusso del campo magnetico B attraverso il circuito è

$$\Phi(B) = \int \vec{B} \cdot d\Sigma = Bl(h_0 + vt)\,. \tag{8}$$

La forza elettromotrice indotta nel circuito

$$\xi = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = -Blv = -0.24 \frac{Tm^2}{s} = -0.24V\,. \text{ (4 punti)} \tag{9}$$

La resistenza del circuito al tempo t é uguale a

$$R = 2kl + 2kh(t) = 2k(l + h_0 + vt)\,. \tag{10}$$

La corrente che circola nel circuito al tempo t é quindi

$$i = \frac{\xi}{R} = -\frac{Blv}{2k(l + h_0 + vt)} \qquad i(t_1) = 0.462A, \text{ (5 punti)} \tag{11}$$

la corrente circola nel verso antiorario. La potenza dissipata dalla resistenza

$$P = \xi i = \frac{(Blv)^2}{2k(l + h_0 + vt)}\,. \tag{12}$$

Integrando la potenza P da 0 a t_1 otteniamo l'energia dissipata

$$W = \int_0^{t_1} \frac{(Blv)^2}{2k(l + h_0 + vt)} dt = \frac{(Blv)^2}{2kv} \log\left(\frac{l + h_0 + vt_1}{l + h_0}\right) = 0.0344J\,. \text{ (5 punti)} \tag{13}$$

Dato che la sbarra si muove a velocità costante la somma delle forze deve essere nulla, quindi la forza esterna $\vec{F}_e$ deve essere opposta alla forza di Lorentz $\vec{F}_L$

$$0 = \vec{F}_L + \vec{F}_e\,. \tag{14}$$

La forza di Lorenz è

$$\vec{F}_L = i\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{(Bl)^2 v}{2k(l + h_0 + vt)} \hat{u}_x \,, \tag{15}$$

da cui

$$\vec{F}_e = \frac{(Bl)^2 v}{2k(l + h_0 + vt)} \hat{u}_x \,. \text{ (5 punti)} \tag{16}$$