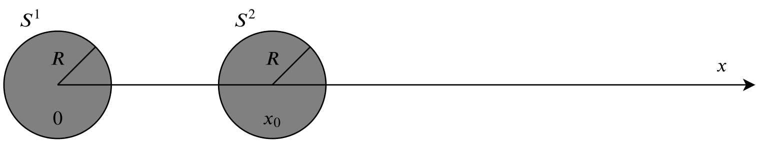
Primo Esonero - 12 Novembre 2019

Esercizio 1

Due sfere S^1 e S^2 entrambe di raggio $R = 0.1\,m$ sono disposte come in figura, la prima centrata in $x = 0$ e la seconda in $x = x_0 = 0.3\,m$. Su ciascuna delle due sfere è distribuita una densità di carica volumetrica $\rho = \frac{k}{r}$, dove $k = 1.110^{-10}\,C/m^2$ e r è la distanza dal centro della sfera. Calcolare

1. Il campo elettrico generato dalle due sfere nel punto $x = \frac{R}{2}$ (6 punti)
2. La differenza di potenziale tra il punto $x = x_0 - R$ e $x = x_0 + R$, $\Delta V = V(x_0 - R) - V(x_0 + R)$ (6 punti)
3. La differenza di potenziale tra il punto $x = x_0 - R$ e $x = R$, $\Delta V = V(x_0 - R) - V(R)$ (5 punti)

$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F m^{-1}$



Soluzione

1. Il campo elettrico in un qualsiasi punto dell'asse x è uguale alla somma dei campi elettrici generati dalle due sfere. Per la sfera centrata in $x = 0$ usando la legge di Gauss otteniamo per $x < R$

$$\int \vec{E}_1(x < R) \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV\,, \tag{1}$$

$$E_1(x < R) 4\pi x^2 = \frac{2\pi k x^2}{\epsilon_0}\,, \tag{2}$$

$$\vec{E}_1(x < R) = \frac{k}{2\epsilon_0} \hat{u}_x\,. \tag{3}$$

Per $x > R$ sempre usando la legge di Gauss

$$E_1(x > R) 4\pi x^2 = \frac{2\pi k R^2}{\epsilon_0}\,, \tag{4}$$

$$\vec{E}_1(x > R) = \frac{kR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \hat{u}_x\,. \tag{5}$$

Per la sfera centrata in x_0 il campo elettrico all'interno della sfera sarà dato dalla (3) per $x > x_0$ mentre sarà uguale e opposto per $x < x_0$

$$\vec{E_2}(|x - x_0| < R) = \frac{k}{2\epsilon_0} \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \hat{u}_x \,. \tag{6}$$

mentre all'esterno della sfera il campo elettrico sarà dato dalla (5) con $x \to |x - x_0|$ e $\hat{u}_x \to \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \hat{u}_x$

$$\vec{E_2}(|x - x_0| < R) = \frac{kR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{|x - x_0|^2} \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \hat{u}_x. \tag{7}$$

Il campo elettrico totale è uguale alla somma $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$ e dato che vogliamo calcolarlo nel punto $x = \frac{R}{2}$ dobbiamo sommare la (3) e la (7)

$$\vec{E}(\frac{R}{2}) = \frac{k}{2\epsilon_0} - \frac{kR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{(R/2 - x_0)^2} = \frac{k}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{R^2}{(R/2 - x_0)^2}\right] = 6.202 \, N/C \tag{8}$$

(6 punti)

2. La differenza di potenziale tra il punto $x = x_0 - R$ e $x = x_0 + R$

$$\Delta V = V(x_0 - R) - V(x_0 + R) = -\int_{x_0+R}^{x_0-R} \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{9}$$

$$\int_{x_0-R}^{x_0+R} (E_1 + E_2) dx = \int_{x_0-R}^{x_0+R} \frac{kR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{x_0-R}^{x_0} -\frac{k}{2\epsilon_0} dx + \int_{x_0}^{x_0+R} \frac{k}{2\epsilon_0} dx \tag{10}$$

$$= \int_{x_0-R}^{x_0+R} \frac{kR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{x^2} dx = \frac{kR^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{x_0 - R} - \frac{1}{x_0 + R}\right] = 1.552 \, V \,. \tag{11}$$

(6 punti)

3. La differenza di potenziale tra il punto $x = x_0 - R$ e $x = R$

$$\Delta V = V(x_0 - R) - V(R) = \int_{x_0-R}^{R} \frac{kR^2}{2\epsilon_0 x^2} - \frac{kR^2}{2\epsilon_0 (x - x_0)^2} \, dx \tag{12}$$

$$= \frac{kR^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{x_0 - R} - \frac{1}{R} + \frac{1}{R - x_0} - \frac{1}{x_0 - R - x_0}\right] = 0 \tag{13}$$

(5 punti)

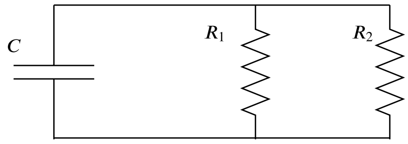
Esercizio 2

Un condensatore di capacità $C = 0.002F$ carico con una differenza di potenziale $V_0 = 3V$ viene scaricato completamente collegandolo al circuito in figura, dove $R_1 = 300\,\Omega$ e $R_2 = 700\,\Omega$. Calcolare:

1. La potenza dissipata da tutto il circuito (7 punti)

2. L'energia dissipata per effetto Joule da tutto il circuito (3 punti)

3. L'energia dissipata per effetto Joule in R_1 (6 punti)



Soluzione

1. La resistenza totale del circuito è data dal parallelo di R_1 e R_2

$$R_{tot} = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1} = 210\,\Omega. \tag{14}$$

La carica immagazzinata nel condensatore al tempo zero è $q_0 = V_0 C = 0.006\,C$. In un istante generico avremo che

$$V_C = V_R \quad \Longrightarrow \quad \frac{q}{C} = -R_{tot}\frac{dq}{dt}\,, \tag{15}$$

dove abbiamo usato $i = -\frac{dq}{dt}$ perché la carica sulle armature del condensatore diminuisce. Integrando dal tempo $t = 0$ ad un tempo generico t otteniamo

$$-\int_0^t \frac{dt}{R_{tot}C} = \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} \tag{16}$$

$$q = q_0 e^{-t/(R_{tot}C)} \tag{17}$$

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{R_{tot}C} e^{-t/(R_{tot}C)}. \tag{18}$$

La potenza dissipata è

$$P = R_{tot} i^2 = R_{tot}\left(\frac{q_0}{R_{tot}C}\right)^2 e^{-2t/(R_{tot}C)}. \tag{19}$$

(7 punti)

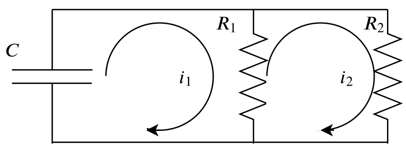
2. L'energia totale dissipata è

$$W = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty R_{tot}\left(\frac{q_0}{R_{tot}C}\right)^2 e^{-2t/(R_{tot}C)} dt \tag{20}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} = 0.009\,J \tag{21}$$

(3 punti)

3. Per calcolare la corrente che passa nella resistenza R_1 consideriamo due maglie: la prima con corrente i_1 passante per il condensatore e la resistenza R_1; la seconda con corrente i_2 passante per la resistenza R_1 e R_2.



La seconda legge di Kirchhoff impone

$$\begin{cases} V_C = R_1(i_1 - i_2) \\ 0 = R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 \,. \end{cases} \tag{22}$$

La seconda equazione implica $i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} i_1$. Dato che il condensatore è attraversato solamente dalla corrente i_1 abbiamo che la corrente i_1 è uguale alla corrente che passa nel circuito RC equivalente con resistenza R_{tot} calcolata in equazione (18) [1]

$$i_1 = i = \frac{q_0}{R_{tot} C} e^{-t/(R_{tot} C)}. \tag{23}$$

La potenza dissipata su R_1 è

$$P_{R_1} = R_1(i_1 - i_2)^2 = R_1(i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} i)^2 = \frac{R_{tot}}{R_1} P \tag{24}$$

L'energia totale dissipata è

$$W_{R_1} = \int_0^\infty P_{R_1} dt = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \left(\frac{R_{tot}}{R_1} \right) = 0.0063\, J \tag{25}$$

(6 punti)

[1] La seconda equazione ci dice $i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} i_1$, che sostituendola nella prima equazione otteniamo $V_C = \frac{R_2 R_1}{R_1+R_2} i_1$, ovvero che i_1 soddisfa la stessa equazione per i (15), quindi $i_1 = i$.