Esame di Fisica Generale 2 del 20/6/2014

Per il 1 esonero svolgere gli esercizi 1 e 2 (2 ore); per il secondo esonero svolgere gli esercizi 3 e 4 (2 ore)
Chi sostiene l'esame deve svolgere tutti gli esercizi in 4 ore
NB: Per l'esonero i punteggi vanno raddoppiati

ESERCIZIO 1
Una carica elettrica positiva è uniformemente distribuita ($\rho = 3.5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C/m^3}$) tra due superfici cilindriche coassiali di raggi $R_1 = 15\,\mathrm{cm}$ e $R_2 = 25\,\mathrm{cm}$ rispettivamente. Trovare:

1. Il valore del campo elettrico in tutto lo spazio (4.5 punti)
2. La differenza di potenziale tra la superficie esterna e l'asse delle due superfici cilindriche (4.5 punti)

ESERCIZIO 2
Un condensatore di capacità $C_1 = 2\,\mu\mathrm{F}$ viene collegato in serie ad un condensatore di capacità $C_2 = 1.5\,\mu\mathrm{F}$. Tale serie viene quindi collegata in parallelo a un condensatore di capacità $C_3 = 0.5\,\mu\mathrm{F}$. Ai capi del sistema viene applicata una d.d.p $V = 40\,\mathrm{V}$. Calcolare:

1. La capacità equivalente del sistema (1 punto)
2. La d.d.p. ai capi di ciascun condensatore (2 punti)

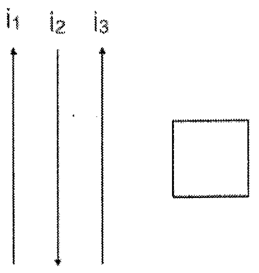
Il condensatore 2 viene riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3$. Calcolare le cariche presenti sulle armature di ciascun condensatore. (3 punti)
Se nel circuito viene inserita una resistenza $R = 50\,\Omega$ calcolare la corrente che circola nel circuito al tempo $t = 10\,\mu\mathrm{s}$. (2 punti)

ESERCIZIO 3
Si consideri un filo rettilineo indefinito percorso da corrente $i_1 = 10\,\mathrm{A}$ diretta nel verso delle y positive, che giace sullo stesso piano di una spira rettangolare di altezza $h = 25\,\mathrm{cm}$ e base $b = 15\,\mathrm{cm}$ percorsa da corrente $i_2 = 15\,\mathrm{A}$ in senso orario. La spira è ad una distanza $d = 10\,\mathrm{cm}$ dal filo. Calcolare:

1. La forza che agisce complessivamente sulla spira (4 punti)
2. La forza che agisce sui lati perpendicolari al filo (4 punti)

ESERCIZIO 4
Tre fili conduttori paralleli giacciono nello stesso piano ad una distanza $d = 15\,\mathrm{cm}$ l'uno dall'altro. Una spira quadrata di lato $l = 2d = 30\,\mathrm{cm}$ giace sullo stesso piano dei fili, anche essa ad una distanza d. La spira ha una resistenza $R = 10\,\Omega$. I fili sono percorsi da corrente $i_1 = 150\,\mathrm{A}$, $i_2 = i_0 e^{-t/\tau}$ (con $i_0 = 250\,\mathrm{A}$ e $\tau = 15\,\mathrm{s}$), $i_3 = 200\,\mathrm{A}$, dirette come in figura. Calcolare:

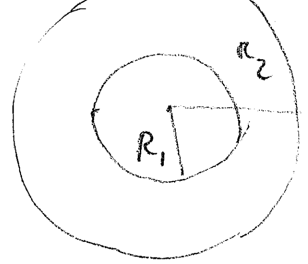
1. Il campo magnetico nel centro della spira al tempo $t = 0$ (2 punti)
2. La corrente indotta sulla spira in funzione del tempo e all'istante $t^* = 10\,\mathrm{s}$ (3.5 punti)
3. L'energia dissipata sulla spira per effetto Joule dopo un tempo $t = 20\,\mathrm{s}$ (2 punti)
4. La forza che agisce sulla spira al tempo $t = \infty$ (1 punto)



ESERCIZIO 1

1) Considero una sup. cilindrica di raggio r e altezza h coassiale alle 2 superfici:

Teorema di Gauss:



$$\int_S E \cdot n \, ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, dV$$

1) $\boxed{r < R_1}$

$$q = 0 \rightarrow \overset{(1)}{E}(r) = 0$$

2) $\boxed{R_1 < R < R_2}$

$$2\pi r h \, E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^h dh \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{R_1}^{r} \rho r \, dr =$$

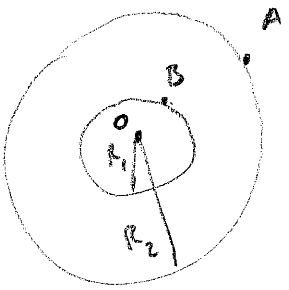
$$= \frac{1}{\varepsilon_0} h \rho \cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{2}} (r^2 - R_1^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho h \pi (r^2 - R_1^2) \Rightarrow$$

$$\overset{2)}{E}(r) = \frac{\rho (r^2 - R_1^2)}{2 \varepsilon_0 r}.$$

3) $\boxed{R > R_2}$

$$2\pi r h \, E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \int_0^h dh \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{R_1}^{R_2} r \, dr \Rightarrow$$

$$\overset{3)}{E}(r) = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2 \varepsilon_0 r}.$$



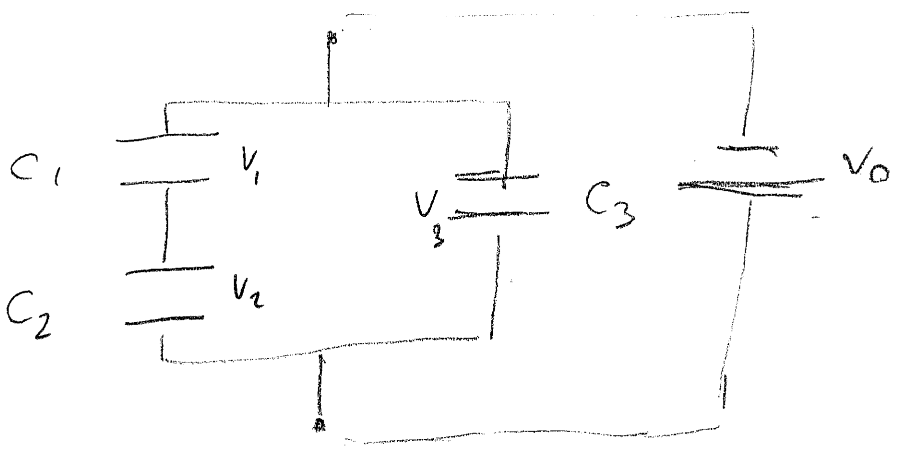
$$\Delta V = V_A - V_O = \int_A^O \bar{E} \cdot d\bar{l} =$$

$$= \int_A^B \bar{E}_2 \, d\bar{l} + \int_B^O \bar{E}_1 \, d\bar{l} = - \int_B^A \bar{E}_2 \, d\bar{l}$$

$$\Delta V = V_A - V_O = - \int_{R_1}^{R_2} E_2(r) \, dr = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho (r^2 - R_1^2)}{2 \varepsilon_0 r} \, dr =$$

$$= \frac{\rho}{4 \varepsilon_0} (R_1^2 - R_2^2) + \underbrace{\frac{\rho R_1^2}{2 \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}}_{+} = -1{,}7 \text{ V}.$$

ESERCIZIO 2



1) $C_{TOT} = C_3 + C_S$

$$C_S = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_{TOT} = C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1{,}3\ \mu F$$

2) $V_3 = V_1 + V_2 = V_0$

Dato che 1 e 2 sono in serie:

$$q_1 = C_1 V_1 = q_2 = C_2 V_2$$

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1} V_2 \qquad V_1 \left(1 + \frac{C_1}{C_1}\right) = V_0 \qquad V_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)$$

$$V_1 = \frac{V_0}{1 + C_2/C_1} = 22{,}88\ V \qquad V_2 = \frac{V_0}{1 + C_1/C_2} = 17{,}1\ V$$

Inserendo il dielettrico la capacità diventa:

$$C_2' = \varepsilon_r C_e = 4,5 \ \mu F$$

Avremo quindi:

$$V_1' = \frac{V_0}{1 + C_2'/C_1} = 12,3 \ V$$

$$V_2' = \frac{V_0}{1 + C_1/C_2'} = 27,7 \ V$$

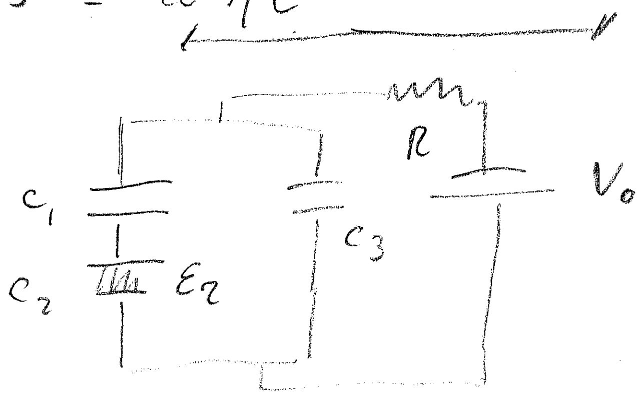
Avremo quindi:

$$q_1 = C_1 V_1' = 55,4 \ \mu C$$

$$q_2 = C_2' V_2' = q_1' = 55,4 \ \mu C$$

$$q_3' = q_3 = C_3 V_3 = 20 \ \mu C$$

Con R nel circuito

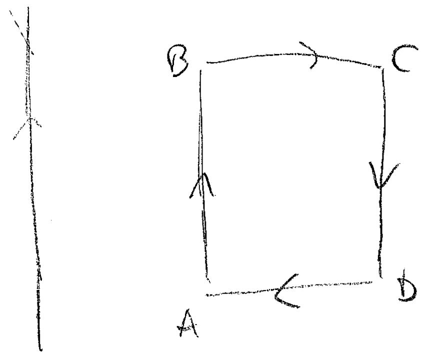


$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC_T'} \qquad C_T' = C_3 + \frac{C_1 C_2'}{C_1 + C_2'} = 1,88 \ \mu F$$

$$RC_T' = 94,2 \ \mu s$$

$$i(t^* = 10 \mu s) = \frac{V_0}{R} e^{-t^*/\tau} = 0,72 \ A$$

ESERCIZIO 3



Il campo in un punto P qualsiasi vale

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

le forze sui 2 lati perpendicolari al filo si annullano a vicenda x ragioni di simmetria

Nei lati AB e CD:

$$d\bar F_{AB} = i_2\, d\bar l \times \bar B(d) \Rightarrow F_{AB} = \int_A^B i_2\, d\bar l \times \bar B(d) = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 h \frac{1}{d} \quad \text{(ATTRATTIVA)}$$

$$d\bar F_{CD} = i_2\, d\bar l \times \bar B \Rightarrow F_{CD} = \int_C^D i_2\, d\bar l \times B(d+b) = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{h}{(d+b)} \quad \text{(REPULSIVA)}$$

$$\bar F_{TOT} = \bar F_{AB} + \bar F_{CD} = 7{,}46 \cdot 10^{-5} - 2{,}98 \cdot 10^{-5} = 4{,}48 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

la forza sul lato AD è data da:

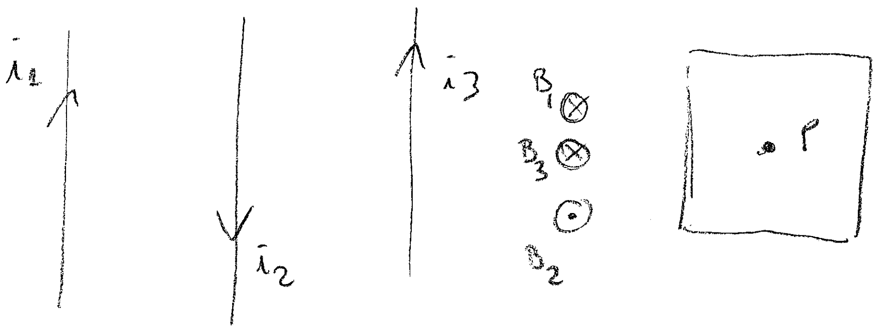
$dF = i\, d\bar l \times \bar B$ $\qquad dF = i\, dl\, B(r)$ diretta verso il basso.

$$dF = i_2\, dl \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

$$F = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) = 2{,}74 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

SU BC è = ma di verso opposto

ESERCIZIO 4



Il campo magnetico in P è la somma dei contributi generati da ogni filo.

NB: B_1 e B_3 entranti
B_2 uscente

$$B = B_1 + B_2 + B_3$$

$$B_P(t=0) = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi\, 4d} + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi\, 3d} - \frac{\mu_0 i_3}{2\pi\, 2d} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{4i_2 - 3i_1 - 6i_3}{12d}\right) =$$

$$= -71{,}84\ \mu T$$

2) L'unico campo dipendente da t è B_2 $\rightarrow$ solo B_2 genera f.e.m.

$$f.e.m = -\frac{d}{dt}\phi(B)$$

$$\phi(B_2) = 2d\int_{2d}^{4d} \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r}\,dr = \frac{2d\,\mu_0 i_2 \ln 2}{2\pi} = \frac{2d\,\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi}\ln 2$$

$$f.e.m. = -\frac{d\phi(B_2)}{dt} = \frac{2d\,\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi\tau}\ln 2$$

$$i = \frac{f.e.m}{R} = \frac{i_0 2d\,\mu_0 e^{-t/\tau}\ln 2}{2\pi\tau R}$$

$$fem(t^*) = \frac{2d\,\mu_0 i_0 e^{-\frac{t^* = 10s}{\tau}}}{2\pi\tau}\ln 2 = 3{,}53\cdot 10^{-7}\ V$$

$$E = \int_0^{t^*} P(t)\, dt = \int_0^{t^*} i^2 R\, dt = \frac{4 d^2 \mu_0^2 i_0^2\, 2\ln 2}{4\pi^2 \tau^2 R} \int_0^{t^*} e^{-\frac{2t}{\tau}}\, dt$$

$$= \frac{4 d^2 \mu_0^2 i_0^2\, 2\ln 2}{4\pi^2 \tau^2 R} \left(-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right)_0^{t^*} = \frac{\cancel{4} d^2 \mu_0^2 i_0^2\, 2\ln 2}{\cancel{4}\pi^2 \tau R} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) = 1{,}52 \cdot 10^{-15}\ J$$

4) A $t = \infty$ $B_2 \to 0$ fem $\to 0$ $\Rightarrow$ la forza è $= 0$!