# RELATIVITÀ RISTRETTA

Abbiamo detto che le equazioni di Maxwell ci mostrano che la luce nel vuoto si propaga con velocità c. Se pensiamo alle trasformazioni da un sistema di riferimento ad un altro ci accorgiamo che c non può cambiare. Ce lo dicono le equazioni di Maxwell. Allora la velocità della luce nel vuoto <u>deve</u> essere un invariante rispetto alle trasformazioni da un sistema inerziale ad un altro.

DAL PUNTO DI VISTA STORICO MICHELSON & MORLEY DIMOSTRARONO CHE C È COSTANTE IN TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI.

NOTA: Sperimentalmente non si sono mai trovate nell'universo particelle superluminali.

Chiamiamo d'ora in poi evento puntuale o semplicemente evento un insieme di quattro valori $(x, y, z, t)$ delle variabili spazio-temporali.

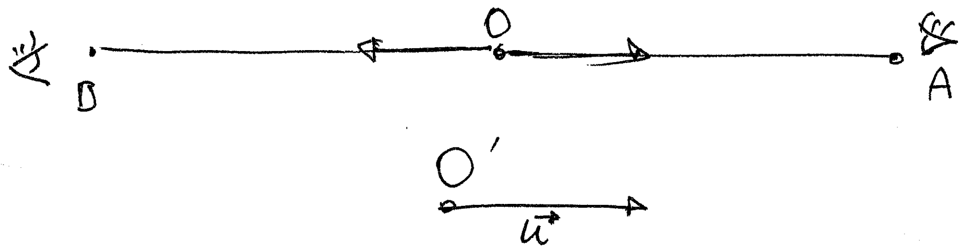
Mostriamo ora in modo molto semplice che affermare che la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento significa dire che bisogna abbandonare il concetto di tempo assoluto.

Prima di tutto gli orologi devono essere regolati correttamente. Vanno posti fermi e fissi nei loro posti nello spazio. Poi per sincronizzarli al tempo $t=0$ di un orologio nell'origine facciamo partire da lì un segnale luminoso.

L'osservatore posto in P di coord. $(x, y, z)$ regola il suo orologio in maniera che quando riceve il

segnale esso segna un tempo $t = r/c = \frac{1}{c}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
Essi vanno anche sincronizzati. Allora ~~l'orologio~~
Quando l'orologio in O si muove di $\Delta t$ si emette il segnale
~~e~~ e l'osservatore in P quando lo riceve
fa in modo che il suo orologio segni $t+\Delta t$.

~~Suppongo~~ Mostriamo ora che due eventi contemporanei in un sistema di riferimento R non lo sono in un altro R' in moto uniforme rispetto a R.



Una sorgente luminosa in O emette due segnali luminosi a $t=\emptyset$ lungo la stessa retta ma con versi opposti.
Questi si propagano con velocità c e arrivano in A e B allo stesso istante $t = \frac{l}{c}$ se $l = \overline{OA} = \overline{OB}$
L'arrivo dei due segnali è contemporaneo in R.
Osservo lo stesso fenomeno nel punto O' solidale con R' che si muove di velocità $\vec{u}$ verso A e suppongo che i raggi partano da O quando O' si sovrappone ad O e l'orologio in R' comincia a segnare il tempo t'.
I SEGNALI SI MUOVONO CON VELOCITÀ C ANCHE IN R'
però in R' il punto A va incontro al segnale mentre B ne fugge (entrambi con velocità $|\vec{u}|$).
$\Rightarrow$ per lui il segnale raggiunge A in

$$t'_A = \frac{l}{c+u} \quad \text{e B in} \quad t'_B = \frac{l}{c-u}.$$

Per lui gli eventi non sono contemporanei

∄ un tempo assoluto.

# IL PRINCIPIO DI RELATIVITÀ DI EINSTEIN E LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

Dobbiamo trovare le trasformazioni tra $x, y, z, t$ e $x', y', z', t'$ che eliminano i difetti ma conservano i pregi delle trasformazioni Galileiane.
Esse infatti non prevedono, erroneamente, $c = \text{cost.}$ in tutti i sist. di riferimento MA vanno bene nel caso in cui i sistemi e gli oggetti si muovano con $v \ll c$.

Sappiamo che devono essere lineari altrimenti il rapporto tra due lunghezze dovrebbe avere valori $\neq$ per osservatori fermi in diversi sist. di riferimento inerziale in contraddizione con le osservazioni.

PRINCIPI DI BASE

1) PRINCIPIO DI RELATIVITÀ EINSTEINIANO: tutte le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo devono essere le stesse in tutti i possibili riferimenti inerziali.
2) la velocità della luce nel vuoto, in particolare, deve avere lo stesso valore in tutti questi sistemi di riferimento
3) per velocità $|v| \ll c$ le nuove trasformazioni debbono ridursi a quelle galileiane che, per due sist. di rif. inerziali tali che uno si muove rispetto all'altro di velocità $v$ che fissiamo // e concorde con l'asse $z$, sono:

$$
\begin{aligned}
x &= x' \\
y &= y' \\
z &= z' + ut' \\
t &= t'
\end{aligned}
\quad \longrightarrow \quad \text{legge di composizione delle velocità} \quad
\begin{aligned}
v_x &= v'_x \\
v_y &= v'_y \\
v_z &= v'_z + u
\end{aligned}
$$

Al pari delle galileiane debbono quindi rispettare il principio di reciprocità ed (sotto una speciale

Poiché solo in direzione z decido di muovermi le modifiche riguarderanno solo la z.

Introduciamo una relazione semplice (lineare) tra z e z'

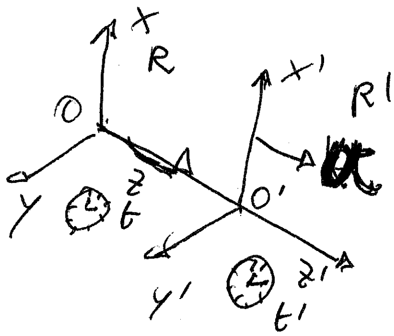
$$z' = \gamma\,(z - ut) \qquad \text{con } \gamma = \text{costante caratteristica nella trasf. ne (x quella galileiana } \gamma = 1)$$

Ma se così è allora come abbiamo fatto notare già dobbiamo rinunciare al tempo assoluto ⇒ proviamo

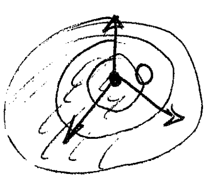
$$t' = at + bz$$

e cerchiamo $\gamma$, a e b / i punti 1), 2) e 3) siano soddisfatti.

Consideriamo un fenomeno fisico semplice,




supponiamo che in O ci sia una sorgente puntiforme che a $t = \emptyset$, istante in cui O' passa per O, emette un breve segnale elettromagnetico che si propaga nello spazio formando un onda sferica




Il raggio di quest'onda

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

cresce col passare del tempo

In R l'equazione della superficie d'onda raggiunta al tempo t dal segnale emesso in $t = \emptyset$ è, in coord. cartesiane

$$x^2+y^2+z^2 = (ct)^2 \qquad (i)$$

Anche la superficie d'onda in R' (per i principi base 1) e 2)) deve essere una sfera di raggio $r' = ct'$ ⇒

$$x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2$$

sostituendo in questa espressione le relazioni tra $z'$ e $z$ e $t'$ e $t$ che abbiamo ipotizzato troviamo

$$x^2+y^2+\gamma^2(z^2-2ut\,z+u^2t^2)=c^2(a^2t^2+2abzt+b^2z^2)$$

Raccogliendo a fattor comune $z$ e $zt$ al I° membro e $c^2t^2$ al II° membro

$$x^2+y^2+(\gamma^2-b^2c^2)z^2-2(\gamma^2u+c^2ab)zt=\left(a^2-\gamma^2\frac{u^2}{c^2}\right)c^2t^2$$

che deve essere identica alla (1). Perché valga l'identità poniamo

$$\gamma^2-b^2c^2=1$$
$$\gamma^2u+c^2ab=0$$
$$a^2-\gamma^2\frac{u^2}{c^2}=1$$

Risolviamo. Dalla prima

$$b^2=\frac{1}{c^2}(\gamma^2-1)$$

dalla terza

$$a^2=1+\gamma^2\frac{u^2}{c^2}$$

riscriviamo la seconda

$$\gamma^2u=-c^2ab$$

facciamo il quadrato e sost. $a^2$ e $b^2$ e otteniamo

$$\gamma^2=\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\quad;\quad\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

sostituendo questa espressione in quelle per $a^2$ e $b^2$ otteniamo

$$b=-\gamma\frac{u}{c^2}\quad,\quad a=\gamma$$

Introducendo le espressioni di $a$, $b$ e $\gamma$ nelle eq. ni per $z'$ e $t'$ otteniamo le famose relazioni lineari chiamate TRASFORMAZIONI DI LORENTZ (dal nome del fisico olandese che le scrisse per primo) che sono la base della teoria della RELATIVITÀ RISTRETTA.

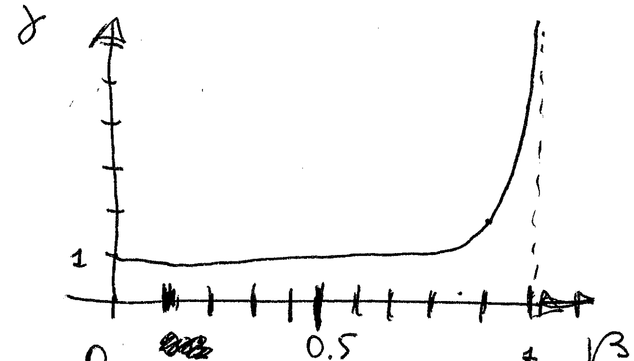
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma\,(z - u\,t) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}\,z\right) \end{aligned} \qquad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}}$$

queste trasformazioni soddisfano i principi 1) e 2) perché li abbiamo utilizzati per ricavarle.
È soddisfatto anche il punto 3) perché se $u \ll c$ $\Rightarrow$ $u^2/c^2$ può essere trascurato rispetto a 1 e le Trasformazioni di Lorentz ~~diventano~~ quelle di Galileo. Se si risolve rispetto a $x, y, z, t$ le trasformazioni si verifica anche la reciprocità

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \gamma\,(z' + u\,t') \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}\,z'\right) \end{aligned}$$

che differiscono dalle precedenti solo perché $u \to -u$. ($\gamma$ non cambia perché dipende da $u^2$)

definiamo $\beta = u/c$



Osservando la dipendenza di $\gamma$ da $u/c = \beta$ osserviamo che finché $\beta < 0.2$ $\gamma \sim 1$

$0.2 \times 3 \times 10^8\ m/s = 0.6 \times 10^8\ m/s$

cioè $60000\ km/s$ non si

Osserviamo deviazioni significative dalle formule Galileiane.

Notiamo anche che $\lim_{\beta \to 1} \gamma = +\infty$

e questo ha contribuito molto a fare accettare l'idea che $c \sim 3 \times 10^8\, m/s$ costituisce un limite superiore invalicabile per la velocità di un qualsiasi corpuscolo o segnale.

LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

Supponiamo di avere un punto P in movimento. La sua velocità sarà diversa a seconda che l'osservatore che misura la velocità sia fermo in R o in R'

L'osservatore in R' trova

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'}, \quad v_y' = \frac{dy'}{dt'}, \quad v_z' = \frac{dz'}{dt'}$$

mentre quello in R trova

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

ora differenziamo ambo i membri delle trasf.-ni di Lorentz

$$\begin{aligned} dx' &= dx \\ dy' &= dy \\ dz' &= \gamma(dz - u\,dt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{u}{c^2} dz\right) \end{aligned}$$

dividiamo ora membro a membro le prime tre per la quarta e dopo sia numeratore che denominatore delle espressioni a destra per $dt$.

Otteniamo così la REGOLA DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

$$v'_x = \frac{1}{\gamma} \frac{dx}{dt - \frac{u}{c^2}dz} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_x}{1 - \frac{u}{c^2}v_z}$$

$$v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{dy}{dt - \frac{u}{c^2}dz} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2}v_z}$$

$$v'_z = \frac{dz - u\,dt}{dt - \frac{u}{c^2}dz} = \frac{v_z - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_z}$$

per $u \ll c$ si riducono ancora una volta alle trasf.ni galileiane.

Facciamo un esempio semplice: la velocità del punto materiale in R è // alla velocità relativa u.

$\Rightarrow \quad v_x = v_y = \emptyset \qquad v_z = v = \pm|\vec{v}|$

vediamo le equazioni in $v'_{x,y,z}$

$$v'_x = \emptyset \qquad v'_y = \emptyset$$

$$v'_z = \frac{v_z - u}{1 - \frac{u v_z}{c^2}} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Se $v_z \equiv c \Rightarrow$

$$v'_z = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c}} = c\,\frac{(c-u)}{(c-u)} = c$$

come deve essere.

CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE E DILATAZIONE DEL TEMPO.

Conseguenza delle trasformazioni di Lorentz è che il tempo scorre più lentamente nel sistema in moto e le lunghezze sono contratte.

Il fatto che queste conseguenze ci appaiono "strane" è dovuto al fatto che il nostro intelletto si è sviluppato in sistemi "galileiani".

Vediamo la contrazione delle lunghezze

supponiamo di misurare in R la lunghezza di un regolo fermo in R' e disposto parallelamente a z'. Un osservatore fermo in R deve misurare contemporaneamente rispetto al suo orologio $z_1$ e $z_2$

$$L = z_2 - z_1$$

La condizione di contemporaneità non è ovviamente necessaria in R' in quanto il regolo è fermo in R'. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Comunque:

$$L' = z_2' - z_1'$$

Se applichiamo la trasf. ne di Lorentz per z

$$z_1' = \gamma(z_1 - ut)$$
$$z_2' = \gamma(z_2 - ut)$$

nelle quali figura lo stesso t.

$$z_2' - z_1' = L' = \gamma(z_2 - z_1) = \gamma L$$

$$\boxed{L = \frac{1}{\gamma} L' = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}\, L'}$$

$\gamma^{-1} < 1$ sempre

$\Rightarrow L < L'$.

Considerando il principio di reciprocità lo stesso accade per un oggetto fermo in R e osservato da R'.

Quindi: GLI OGGETTI IN MOTO RISPETTO AD UN OSSERVATORE APPAIONO CONTRATTI (CIOÈ PIÙ CORTI) NELLA DIREZIONE DEL MOTO RISPETTO AL RISULTATO OTTENUTO DA UN OSSERVATORE RISPETTO A CUI SONO FERMI.

Vediamo la dilatazione del tempo

consideriamo un orologio fermo in $O'$ di $R'$.
Con questo orologio un osservatore fermo in $R'$ misura

$$T' = t_2' - t_1'$$

usando le trasf.ni di Lorentz

$$t_1 = \gamma t_1' \qquad t_2 = \gamma t_2'$$

$$\boxed{T = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma T'} \qquad \gamma \geq 1$$

$$\Rightarrow T \geq T_1$$

Quindi un orologio fermo (nel sistema di rif. $R'$) segna sempre un intervallo di tempo minore di quello $T$ segnato da un orologio in moto. Vale il principio di reciprocità quindi l'orologio più lento è sempre quello fermo rispetto all'osservatore.

Si chiama TEMPO PROPRIO DI UN CORPO IN MOTO (e lo indichiamo con la lettera $\tau$) IL TEMPO SEGNATO DA UN OROLOGIO CHE SI MUOVE RISPETTO AL CORPO STESSO.

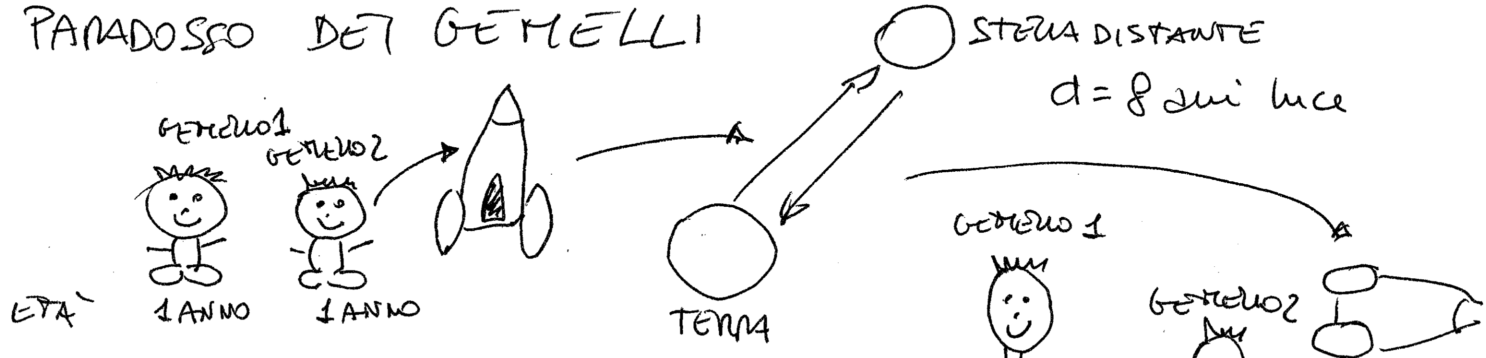
DATA la relazione sopra $T = \gamma T'$ se poniamo $t' = t_1 = 0$, $t_2' = \tau$ e $t_2 = t$ $\Rightarrow$

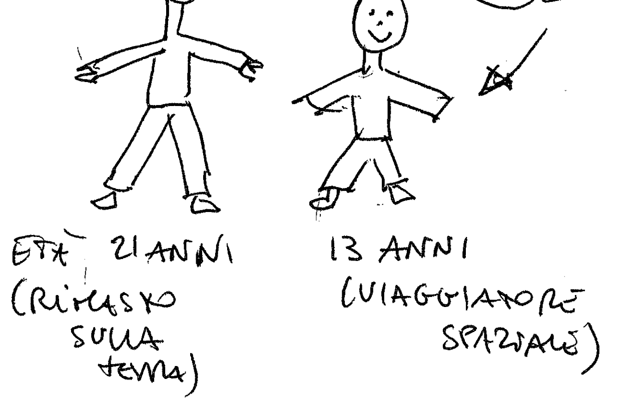
$$\boxed{t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}}$$

Questa relazione è stata verificata nel caso delle particelle elementari instabili sperimentalmente.
I "muoni" per esempio si muovono con velocità prossime a quelle della luce e si disintegrano spontaneamente dopo un tempo proprio di $2.2 \times 10^{-6}$ secondi.
Anche se la loro velocità è prossima a $c$ essi non potrebbero percorrere più di 660 mt prima di disintegrarsi.

Alcuni muoni giungono sulla terra nei raggi cosmici prodotti all'inizio della nostra atmosfera (a circa 10 km. di altezza). Alcuni riescono a raggiungere il suolo in accordo con le previsioni relativistiche sulla dilatazione del tempo.

PARADOSSO DEI GEMELLI




Un gemello parte per un viaggio extraterrestre mentre l'altro resta sulla terra. L'astronauta viaggia a

$$v = 0.8c = 240.000 \text{ km/s}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.6$$

sull'astronave il tempo allora scorre al 60% del tempo della terra.

Nel sistema di riferimento della terra l'astronave percorre 8 anni luce in 10 anni ($1$ anno luce $\sim 9.5 \times 10^{12}$ km) nel viaggio di andata e altrettanti nel viaggio di ritorno. Essa ritorna quindi sulla terra dopo 20 anni. Sull'astronave sono trascorsi solo 12 anni. Il gemello rimasto sulla terra è allora di 8 anni più vecchio.

INVARIANTI RISPETTO ALLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Abbiamo detto che la velocità della luce è un invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz

e lo abbiamo visto -
Vediamo ne un altro -
Calcoliamo $\tau^2$

$$\tau^2 = \left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right] t^2 = \frac{1}{c^2}\left(c^2t^2 - u^2t^2\right)$$

O' si muove di moto uniforme rispetto a R inerz.

$$u^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{t^2} \Rightarrow$$

$$\tau^2 = \frac{1}{c^2}\left(c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2\right)$$

MA il tempo proprio al I° membro (segnato dall'orologio in O') non dipende dal riferimento R rispetto a cui sono misurate le quantità che appaiono al II° membro -

$\Rightarrow$ $\boxed{(ct^2) - x^2 - y^2 - z^2}$ è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz -

Questo si può verificare facilmente passando da R a R' ~~perché~~ e ottenendo

$$(ct^2) - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

e nel riferimento in cui il corpo è in quiete
$x' = y' = z' = 0$ e $t' = \tau$ e ritroviamo l'espressione di prima per $\tau^2$
Quanto detto vale anche per gli intervalli infinitesimi

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2}\left[c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\right]$$

Poiché le trasformazioni di Lorentz mostrano invarianti in cui compare il prodotto $ct$ (vd $\tau^2$ e $d\tau^2$) conviene assumere come variabile temporale

$$\boxed{x^4 = ct}$$

che ha le dim. di una lunghezza.

Se $x^4 = 1\,mm$ $\quad t = 3.3\,ps$.

Così un evento puntuale è individuato dalle 4 variabili dimensionalmente omogenee

$$x^i = x^1, x^2, x^3, x^4 \qquad \begin{array}{l} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \\ x^4 = ct \end{array}$$

Le trasformazioni di Lorentz per i nostri soliti R e R' diventano

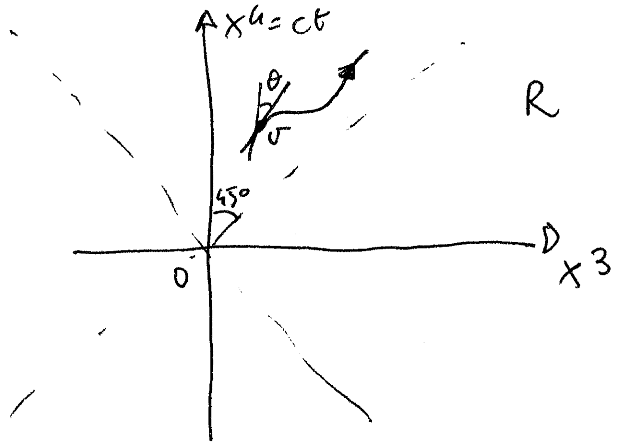
$$\begin{array}{ll} x^{1'} = x^1 & x^1 = x^{1'} \\ x^{2'} = x^2 & x^2 = x^{2'} \\ x^{3'} = \gamma\,(x^3 - \beta x^4) & x^3 = \gamma\,(x^{3'} + \beta x^{4'}) \\ x^{4'} = \gamma\,(x^4 - \beta x^3) & x^4 = \gamma\,(x^{4'} + \beta x^{3'}) \end{array}$$

con $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $\beta = \dfrac{u}{c}$

Rappresentiamo (visto che $x^1 = x^{1'}$ e $x_2 = x_2'$) lo spazio solo per le coordinate $x^3$ e $x^4$. Il moto di un punto in questo spazio è rappresentato da una curva detta linea di universo la cui tangente (vd. fig.) forma con l'asse $x^4$ un angolo $\theta$ variabile da punto a punto e/

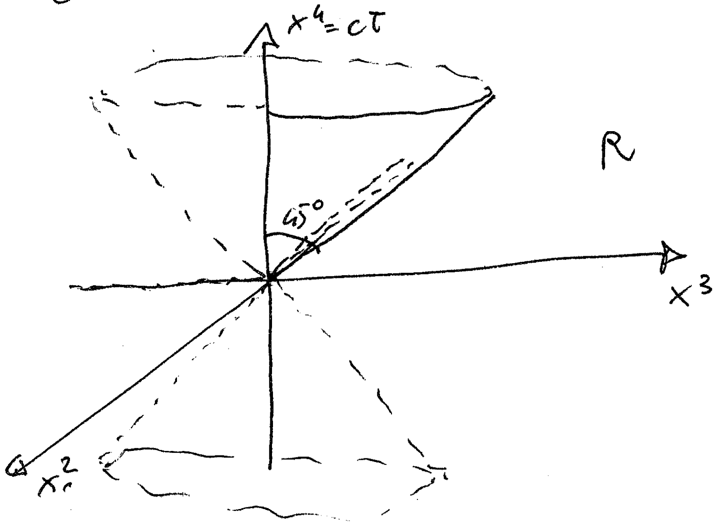
$$\tan\theta = \frac{dx^3}{dx^4} = \frac{dz}{c\,dt} = \frac{v}{c}$$ con $v$ velocità del punto.

$$\boxed{\theta = \arctan\beta \quad . \quad \beta < 1 \Rightarrow \theta < 45^\circ}$$




se $v$ = cost $\Rightarrow$ $\beta$ = cost.
se il punto passa per O in $x^3 = x^4 = \emptyset$ allora la sua linea di universo è una retta passante per O.

supponiamo ora che in O ($x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = \emptyset$) una sorgente emetta dei fotoni.
Disegniamo anche un'altra coordinata spaziale ($x^2$ per es).




Torniamo al piano $x^3, x^4$. Le linee di universo dei fotoni sono le linee di universo con inclinazione 45° nel semipiano positivo ($x^3\ x^4$). (Quelle nel semipiano negativo sono i fotoni che raggiungono $x^3 = x^2 = 0$ a $t = 0 = x^4$)

Poiché c è un limite superiore alla velocità che gli oggetti possono avere gli oggetti possono muoversi solo nella regione del semipiano $x^4 > 0$ esterna all'angolo $\theta = 45$.
Se consideriamo ora anche la variabile $x^2$ gli eventi sono delimitati da un cono di rotazione intorno all'asse $x^4$, vertice in O e semiapertura 45°.
Se infine teniamo conto di tutte le variabili spaziali $x^1, x^2, x^3$ oltre che di $x^4$ si ottiene lo spazio quadridimensionale di Minkowski.

La condizione $x^4 = \phi$ definisce un iperpiano delle variabili $x^1, x^2, x^3$ degli eventi puntuali in R che sono contemporanei all'evento O: IL PRESENTE. Questo iperpiano separa il FUTURO ($x^4 > 0$) dal PASSATO ($x^4 < 0$).

Le linee di universo dei fotoni definiscono un ipercono di rotazione con semiapertura $\theta = 45°$ attorno all'asse $x^4$ e vertice in O detto CONO DI LUCE. Gli eventi appartenenti alla regione esterna non possono essere raggiunti da nessun segnale emesso in O. Quelli appartenenti alla regione interna sì.

L'equazione dell'ipercono di luce è

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (ct)^2$$

cioè

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0$$

LUOGO DEI PUNTI RAGGIUNTI AL TEMPO $t = x^4/c$ DAL SEGNALE EMESSO IN O a $t=\phi$

UN <u>INVARIANTE</u> molto importante rispetto alle trasformazioni di Lorentz è <u>l'elemento di volume</u> nello spazio di Minkowski

$$dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} dx^{4'} = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

come si riconosce subito dal fatto che

$$dx^1 = dx^{1'} \qquad dx^2 = dx^{2'}$$

$$dx^3 = \frac{1}{\gamma} dx^{3'} \qquad dx^4 = \gamma dx^{4'}$$

dove abbiamo fatto uso delle $\overset{\text{fermo in } R'}{L'} = \gamma L$ e $\overset{\text{tempo di } R'}{T'} = \frac{1}{\gamma} T$

QUADRIVETTORI

Utilizzando un procedimento analogo a quello che aveva portato all'introduzione dei vettori definiamo i

QUADRIVETTORI -

Dati due sistemi di riferimento inerziali R e R' inerziali le trasformazioni di Lorentz ci dicono come si trasformano le coordinate spazio-temporali. Bisogna allora trovare le regole specifiche di trasformazione di altre quantità fisiche come l'energia, la quantità di moto e i campi (che noi non faremo) -

Si introduce per questo il concetto di quadrivettore $A^i$ che è un insieme di quattro quantità

$$A^i \; (i=1,2,3,4) \quad o \quad A^1, A^2, A^3 \text{ e } A^4$$

che passando da un riferimento $RM_4$ a uno $RM_4'$ (come R e R' nostri solo ti ma aggiungo M perché ora consideriamo tutto quello spazio di Minkowski) diretti assi $x^3$ e $x^{3'}$ paralleli tra loro ed a velocità relativa $u=\text{cost}$, si trasformano come $x^1, x^2, x^3$ e $x^4$ (che diremo QUADRIVETTORE "tipo")

$$A^{1'} = A^1$$
$$A^{2'} = A^2$$
$$A^{3'} = \gamma(A^3 - \beta A^4)$$
$$A^{4'} = \gamma(A^4 - \beta A^3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = u/c$$

e

$$A^1 = A^{1'}$$
$$A^2 = A^{2'}$$
$$A^3 = \gamma(A^{3'} + \beta A^{4'})$$
$$A^4 = \gamma(A^{4'} + \beta A^{3'})$$

NOTA: LA DIREZIONE DI u fissa la direzione di $x^3$ e $x^{3'}$

Per definire il modulo di $A^i$ vediamo il quadrivettore tipo

$x^1$
$x^2$
$x^3$
$x^4 = ct$

La distanza tra il punto $O(0,0,0,0)$ e il punto $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ detto "intervallo" è

$$s_{PO} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2}$$

che è invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz.

Il quadrato dell'intervallo che separa P da O è

$$s^2 = x^{1\,2} + x^{2\,2} + x^{3\,2} - x^{4\,2}$$

quindi anche il quadrato del modulo del quadrivettore $A^i$ è

$$A^2 = A^{1\,2} + A^{2\,2} + A^{3\,2} - A^{4\,2}$$

Anch'esso invariante per trasfo di Lorentz.

In questo formalismo bisogna introdurre anche le componenti COVARIANTI che si indicano con l'indice in basso $A_i$ $(i=1\dots4)$ tali che

$$A_1 = A^1 \,;\quad A_2 = A^2 \,,\quad A_3 = A^3 \,;\quad A_4 = -A^4$$

Il quadrato del modulo del vettore si può allora definire anche come

$$\sum_{1}^{4} A^i A_i = A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3 + A^4A_4 \doteq (A^iA_i)$$

con la convenzione che gli indici ripetuti si intendono sommati (INDICI MUTI).

Per analogia si definisce il prodotto scalare $(A^i B_i)$ di due quadrivettori $A^i$ e $B^i$ a mezzo della relazione

$$(A^i B_i) = A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 + A^4 B_4$$

dalla quale segue che

$$(A^i B_i) = (A_i B^i)$$

Più in generale gli indici superiori e inferiori di ogni coppia di indici muti possono essere scambiati di posto.

Il prodotto scalare di due quadrivettori è sempre invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz

$A^1, A^2, A^3 \rightarrow$ componenti spaziali  $A^4 \rightarrow$ componente temporale

Di fronte ad una rotazione nello spazio 3D (x, y, z) le prime tre componenti si trasformano come un vettore e la quarta non varia (si comporta come uno scalare).

Vediamo esempi di quadrivettori:

<u>Quadrivelocità</u>

$$u^i = \frac{dx^i}{c\,d\tau} = \left(\gamma \frac{\vec{u}}{c}, \gamma\right) \qquad (u^i u_i) = -1$$

Quadriaccelerazione

$$w^i = \frac{du^i}{c\,d\tau};$$

DEFINIZIONE RELATIVISTICA DI QUANTITÀ DI MOTO ED ENERGIA

Così come è per le equazioni di Maxwell anche le leggi della meccanica devono essere invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Nella loro formulazione classica (data da Newton) esse sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo. Quindi la nuova formulazione deve ridursi alle leggi classiche per velocità molto minori di quelle della luce.

Nella meccanica classica la quantità di moto era $m_0\vec{v}$ per un punto materiale di massa $m_0$ e velocità $\vec{v}$. Relativisticamente la quadrivelocità è $\quad u^i = \frac{dx^i}{c\,d\tau}$

Allora possiamo, per la definizione relativistica di quantità di moto, pensare di sostituire a $\vec{v}$ il prodotto $cv^i$ della quadrivelocità per $c$.

Definiamo quindi come <u>quantità di moto di un punto materiale</u> la parte spaziale del quadrivettore

$$p^i = m_0 c v_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

che vale

$$\boxed{\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

e che differisce del fattore $\gamma$ dalla definizione classica.

Se $v^2 \ll c^2 \Rightarrow \gamma \sim 1 \Rightarrow \vec{p}$ coincide con la def. classica.

Consideriamo ora la quarta componente del quadrivettore $p^i$

$$p^4 = m_0 \gamma c = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Per piccole velocità questa espressione può essere sviluppata in serie di Taylor in funzione di $v^2/c^2$

$$p_4 = m_0 c \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots\right) \simeq \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2\right)$$

La parte tra parentesi è la somma di un termine costante $m_0 c^2$ più un termine $\frac{1}{2} m_0 v^2$ che rappresenta l'en. cinetica del punto materiale.

Possiamo scrivere in generale

$$p^4 = \frac{1}{c} E$$

$$E = E^{TOT} = E^{QUIETE} + E^{CINETICA}$$

$$\boxed{E^{QUIETE} = m_0 c^2}$$

$$\boxed{E^{CINETICA} = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)}$$

che si riduce alla formula classica per $v^2/c^2 \ll 1$
$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_0 v^2$

<u>Il quadrivettore $p^i$ si chiama quadrivettore quantità di moto energia.</u>

Il suo modulo quadro vale

$$p^i p_i = p^2 - \frac{1}{c^2} E = - m_0^2 c^2$$

da cui si ricava la

$$\boxed{E = c \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2}}$$

RELAZIONE RELATIVISTICA TRA ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO

ovvero

$$\boxed{|\vec{p}| = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - (m_0 c^2)^2}} \qquad (\alpha)$$

Conseguenza importante di questa formulazione relativistica è che possono esistere anche particelle di massa a riposo $m_0 = \emptyset$ che si muovono con velocità

-c ed hanno una quantità di moto ed energia non nulle -
Se per stabilire infatti la relazione tra quantità di moto ed energia usiamo la ($\alpha$) con $m_0 = 0$

$$p = E/c$$ → si può dimostrare che questo è l'impulso dell'onda elettromagnetica partendo dalle eq.ni di Maxwell

Allora si può interpretare un'onda elettromagnetica come dovuta ad un insieme di particelle di massa nulla ma di energia e quantità di moto definite. che sono dette fotoni -

INVARIANZA DELLE EQUAZIONI DI PROPAGAZIONE PER $\vec{A}$ E $\phi$ (e quindi delle equazioni di Maxwell) RISPETTO ALLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

Ricordiamo in Gauge di Lorentz

$$(\beta)\quad \begin{cases} \Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \qquad \Box \phi = -\rho/\varepsilon_0 & \text{EQ.NI DI PROPAGAZIONE PER } \vec{A} \text{ e } \phi \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0 & \text{GAUGE DI LORENTZ} \end{cases}$$

equivalenti alle eq.ni di Maxwell
con $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Vogliamo ora mostrare che le ($\beta$) possono essere scritte come relazioni fra quadrivettori cioè in "forma covariante"

"Forma covariante" → che rimane sempre la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali -
a destra delle equ.ni di propagazione appaiono $\vec{J}$ e $\rho$ che sono strettamente legate

Se un osservatore in R vede $\rho$ fermo in R'
vede $\vec{J} = -u\rho$

Osserviamo che la carica $dq$ contenuta nell'elemento di volume è invariante essendo uno scalare $dq = \rho dx^1 dx^2 dx^3$ ~~...~~ che ha lo stesso valore in tutti i riferimenti.
Ma $dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$ è anch'esso un invariante.
Allora $d\rho$ deve avere le proprietà di trasformazione di $dx^4$

Definiamo allora la quadricorrente, che è un quadrivettore

$$\boxed{J^i = \left(\frac{1}{c}\vec{J}, \rho\right)}$$

L'equazione di continuità $\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ diventa

$$\boxed{\frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0}$$

LA QUADRIDIVERGENZA DELLA QUADRICORRENTE È SEMPRE NULLA

Si può vedere che è un invariante relativistico.

Usiamo la def. di $J^i$ nelle EQ.NI DI PROPAGAZIONE

$$\Box (c A^\alpha) = -\frac{1}{\varepsilon_0} J^\alpha \qquad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} J^4$$

Si vede che

$$\boxed{\phi^i = (c\vec{A}, \phi)}$$

è un quadrivettore quindi invariante per trasf.ni di Lorentz.
Le equaz. di propagazione diventano

$$\boxed{\Box \phi^i = -\frac{1}{\varepsilon_0} J^i} \qquad (\Box \text{ è un operatore scalare})$$

e la condizione di Lorentz

$$\boxed{\frac{\partial \phi^i}{\partial x^i} = 0}$$

LA QUADRIDIVERGENZA DEL QUADRIPOTENZIALE È NULLA IN TUTTI I RIFERIMENTI DELLO SPAZIO DI MINKOWSKI