Primo esonero- 10 Novembre 2021

Esercizio 1

Un guscio sferico uniformemente carico, con densità di carica $\rho = 1 \times 10^{-8}\,\mathrm{C/m^3}$, raggio interno $R_1 = 1\,\mathrm{m}$ e raggio esterno $R_2 = 2\,\mathrm{m}$, è circondato da un guscio sferico conduttore concentrico S_1 di raggio interno $R_3 = 3\,\mathrm{m}$ e raggio esterno $R_4 = 4\,\mathrm{m}$, come mostrato in figura 1. Sapendo che il potenziale del conduttore S_1 vale $V_1 = 200\,\mathrm{V}$, calcolare:

- La carica totale Q del guscio sferico uniformemente carico (**2 punti**).
- Le cariche Q_1 e Q_2 sulla superficie interna ed esterna del conduttore S_1 (**4 punti**).
- Il campo elettrico $E(r)$ in tutto lo spazio (**5 punti**).
- Il valore del potenziale $V(0)$ nel centro del sistema (**5 punti**).

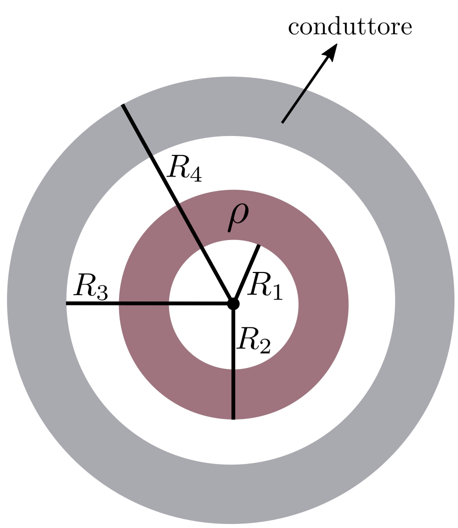

Figura 1

Esercizio 2

Un consensatore piano di capacità $C = 0.5\,\mu\mathrm{F}$ è inizialmente caricato ad una d.d.p. $V = 200\,\mathrm{V}$. La distanza tra le armature del condensatore è $d = 1\,\mathrm{cm}$. Tra le armature del condensatore viene inserita una lamina conduttrice di spessore incognito x e sezione S uguale all'area delle armature del condensatore. Il condensatore viene poi collegato al circuito mostrato in figura 2 dove $R_1 = R_2 = 2\,\mathrm{M\Omega}$ ed $R_3 = R_4 = 1\,\mathrm{M\Omega}$. Calcolare:

- La capacita C' del condensatore in funzione dello spessore x della lamina conduttrice. (**3 punti**).
- La resistenza totale del circuito (**4 punti**).
- Il valore dello spessore x della lamina sapendo che la carica sulle armature del condensatore si riduce di un fattore $1/e$ dopo un tempo $\tau = 1\,\mathrm{s}$. (**5 punti**).
- L'energia totale dissipata dalla resistenza R_1 per effetto Joule (**5 punti**).

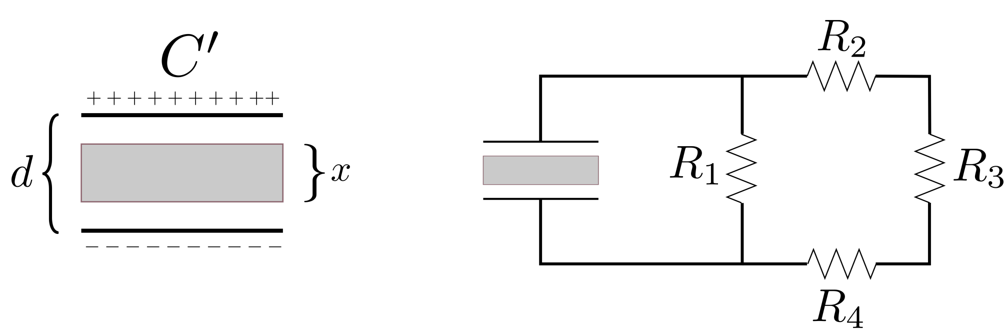

Figura 2

Soluzione Esercizio 1

La carica totale Q del guscio uniformemente carico si ottiene integrando la densità di carica ρ sul volume del guscio. Si ha:

$$Q = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \rho = \frac{4\pi\rho}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right) \sim 2.9 \cdot 10^{-7}\text{C} \ . \tag{1}$$

Affinchè il campo elettrico all'interno del conduttore S_1 sia nullo, sulla superficie sferica interna di raggio R_3 dovrà distribuirsi una carica elettrica $Q_1 = -Q$, mentre la carica Q_2 sulla superficie esterna si può trovare dalla conoscenza del potenziale $V_1 = 200\,\text{V}$ di S_1. Si ha infatti:

$$V(R_4) - V(\infty) = V_1 = \int_{R_4}^{\infty} \vec{E}(r) \cdot \vec{dr} \ , \tag{2}$$

ed in termini della carica incognita Q_2, il campo elettrico all'esterno del conduttore S_1 è dato da

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \qquad r > R_4 \ . \tag{3}$$

Sostituendo la precedente equazione nell'integrale di Eq. (2), si ha:

$$V_1 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_4} \implies Q_2 = 4\pi\epsilon_0 R_4 V_1 \sim 8.9 \cdot 10^{-8}\text{C} \ . \tag{4}$$

Il campo elettrico tra R_3 ed R_4 è ovviamente zero perchè la regione appartiene al conduttore S_1, inoltre applicando il teorema di Gauss si ha $E(r) = 0$ per $r < R_1$, dal momento che la carica interna ad una superificie sferica di raggio $r < R_1$ è nulla. Per $R_1 \leq r \leq R_2$, applicando nuovamente il teorema di Gauss, si ha:

$$\int_{S(r)} \vec{E}(r) \cdot \vec{dr} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{R_1}^{r} 4\pi\rho r^2 dr = \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0}(r^3 - R_1^3) \ ,$$

$$\implies \vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(r^3 - R_1^3)\hat{r} \ , \quad R_1 \leq r \leq R_2 \ , \tag{5}$$

dove con $\int_{S(r)}$ abbiamo indicato l'integrale su una superficie sferica di raggio r. Infine, per $R_2 \leq r < R_3$, si ha invece:

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \qquad R_2 \leq r < R_3 \ . \tag{6}$$

Il valore $V(0)$ del potenziale elettrico nel centro del sistema, si può ottenere utilizzando:

$$V(0) - V(R_3) = V(0) - V_1 = \int_0^{R_3} \vec{E}(r) \cdot \vec{dr} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(r) \cdot \vec{dr} + \int_{R_2}^{R_3} \vec{E}(r) \cdot \vec{dr}$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \left(R_2^2 - R_1^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) \ . \tag{7}$$

Utilizzando i dati del problema si trova $V(0) \sim 1015\,\mathrm{V}$.

Soluzione Esercizio 2

Dopo l'aggiunta della lamina conduttrice, il condensatore può essere visto come la serie di un condensatore di capacità $C_1 = \epsilon_0 S/d_1$ ed un condensatore di capacità $C_2 = \epsilon_0 S/d_2$, con $d_1 + d_2 = d - x$. Si ha pertanto:

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C}{1 - x/d} \ . \tag{8}$$

La resistenza totale del circuito è data dal parallelo tra la resistenza R_1 e la serie delle resistenze R_2, R_3 ed R_4:

$$R_{tot} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \sim 1.333\,\mathrm{M\Omega} \ . \tag{9}$$

La carica sulle armature del condensatore diminuisce esponenzialmente secondo la legge

$$q(t) = q_0 \cdot e^{-t/\tau} \ , \tag{10}$$

dove $q_0 = VC = 1.0 \times 10^{-4}\mathrm{C}$ è la carica iniziale e

$$\tau = R_{tot} C' = \frac{R_{tot} C}{1 - x/d} \ . \tag{11}$$

Imponendo $\tau = 1\,\mathrm{s}$, si ottiene $x \sim 0.33 \cdot d = 0.33\,\mathrm{cm}$. L'energia totale dissipata dalla resistenza R_1 è data da:

$$W_{R_1} = \int_0^\infty R_1 \cdot i_1^2(t)\ dt \ , \tag{12}$$

dove $i_1(t)$ è la corrente che scorre al tempo t nel ramo cui appartiene R_1. Chiamando i_2 la corrente che scorre nel ramo delle resistenze R_2, R_3 ed R_4, si ha:

$$i_1(t) + i_2(t) \equiv i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{q_0}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \ . \tag{13}$$

Inoltre, dovendo essere

$$R_1 \cdot i_1(t) = (R_2 + R_3 + R_4) \cdot i_2(t) \ , \tag{14}$$

si ha $i_1(t) = 2 i_2(t)$. Pertanto:

$$i_1(t) = \frac{2q_0}{3\tau} \cdot e^{-t/\tau} \ , \tag{15}$$

ed infine

$$W_{R_1} = R_1 \frac{4q_0^2}{9\tau^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = R_1 \frac{2q_0^2}{9\tau} \sim 4.4 \times 10^{-3}\mathrm{J} \ . \tag{16}$$